

基于自适应 Eikonal 方程的改进透视 SFS 算法

王学梅 孙即祥

(国防科技大学电子科学与工程学院, 长沙 410073)

摘要 PFMM(perspective fast marching method)是一种有效解决透视投影下从明暗恢复形状(SFS)问题的方法,但是适应条件受限,且对初始数据的精度较为敏感。本文通过对 Eikonal 方程系数的分析,提出了在透视投影下基于自适应 Eikonal 方程的 PFMM,解决了 PFMM 对初始数据过于依赖的问题,是 PFMM 的推广。对合成图像的实验表明本文算法比 PFMM 精度更高,对透视投影下 SFS 问题可以得到比较好的结果。

关键词 明暗恢复形状 Eikonal 方程 快速步进法 自适应 Eikonal 方程

中图法分类号: TP391.41 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2010)05-770-05

An Improved Perspective Shape from Shading Based on Adaptive Eikonal Equation

WANG Xuemei, SUN Jixiang

(College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract PFMM(perspective fast marching method) is a successful approach to shape from shading (SFS) technique, but it is restricted by some conditions and sensitive to the precision of the initialization. In this paper, we have studied the characteristics of the coefficients in the Eikonal equation and proposed an improved perspective fast marching method based on adaptive Eikonal equation. This algorithm depends much less on the initialization which may have error from the real surface. Moreover we have proved that PFMM is a particular case of our algorithm. Experiments on synthetical pictures demonstrate that our algorithm can obtain higher accuracy than PFMM does and yield good performance for perspective SFS problem.

Keywords shape from shading, Eikonal equation, fast marching method, adaptive Eikonal equation

0 引言

从明暗恢复形状(SFS)是计算机视觉中3维形状恢复问题的关键技术之一,是计算机视觉的一个重要研究领域,其任务是利用单幅灰度图像中明暗变化来恢复表面3维形状(表面各点的相对高度或表面法向量等参数值)。

SFS问题是由Horn首先提出的^[1],现有的对SFS问题的研究普遍假设投影模型为正交投影模型,文献[2]对正交投影下的SFS方法进行了总结和分类。而现实中的图像都是在透视投影下成像的。研究透视投影下SFS问题的文献中,文献[3]忽略了摄像机和物体表面的距离变化;文献[4]对

高度函数利用分段平面来近似,但是对正交投影和透视投影只有在每个小平面的边缘才有区别,对小平面的内部,这两种投影模型的反射图是一样的;文献[5-7]对正交投影和透视投影下的图像照度方程建立了统一的模型,用Hamilton-Jacobi方程的黏稠解来求得高度,是比较经典的方法;文献[8-9]建立了透视投影模型,引入了透视投影下的图像照度方程;文献[10-11]提出的PFMM(perspective fast marching method)在透视投影下对肠胃内窥镜图像进行3维重建,得到快速有效和稳健的算法,可以用于真实图像,在透视投影下是一种比较方便实用的重建算法,但是初始数据对算法的性能影响较大。

在PFMM基础上,通过对Eikonal方程系数的分析,提出了基于自适应Eikonal方程的PFMM,降

收稿日期:2008-10-09;改回日期:2009-03-10

第一作者简介:王学梅(1978—),女。国防科技大学计算机视觉与智能信息处理专业博士研究生。主要研究方向为图像处理与模式识别。E-mail: wangxuemei1000@163.com

低了结果对初始数据的依赖性,提高了3维重建结果的精度,更好地解决了透视投影下的SFS问题。

邻两个格点中高度较小的点的高度值,即

$$z_1 = \min\{z_{i-1,j}, z_{i+1,j}\}, z_2 = \min\{z_{i,j-1}, z_{i,j+1}\} \quad (5)$$

1 SFS 和 Eikonal 方程

为简化问题,假设光源为无限远处点光源且反射模型为朗伯体表面反射模型(lambertian surface model),成像几何关系不是通常假设的正交投影而是透视投影^[11]。

假设摄像机坐标系 (u, v, z) 和世界坐标系 (x, y, \bar{z}) ,都以摄像机光心作为原点, $\bar{z}(x, y) = z(u, v)$,光源方向 $\mathbf{L} = (p_s, q_s, -1)^T$, $I(u, v)$ 是图像亮度, u, v 为图像坐标, $R(p(x, y), q(x, y))$ 是反射图函数,其中, $p = \bar{z}_x, q = \bar{z}_y$ 分别表示在 (x, y) 点处,高度为 \bar{z} 的表面在 x 方向和 y 方向的梯度值,表面法向量表示为 $\mathbf{n} = (p, q, -1)^T$ 。在正交投影下建立的反射模型的图像照度方程为

$$I(u, v) = I(x, y) = \frac{\mathbf{n}(x, y) \cdot \mathbf{L}}{\|\mathbf{n}(x, y) \cdot \mathbf{L}\|} \quad (1)$$

当光线与视线方向重合时候,即 $\mathbf{L} = (0, 0, 1)$ 时候,式(1)简化为

$$I(x, y) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \quad (2)$$

式(2)最终可以化为一阶偏微分方程来求解

$$\left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{I^2(x, y)} - 1 = f \quad (3)$$

可以看出, $f \geq 0$ 不依赖于 p 和 q 。式(3)是一种特殊形式的一阶偏微分方程,称为Eikonal方程。在离散化的网格上,假设当前格点 (i, j) ,使用文献[12-13]提出的快速步进法(FMM)方法,在格点 (i, j) ,可得式(3)的解为

$$z = \begin{cases} \sqrt{f} + z_1 & z_2 - z_1 > \sqrt{f} \\ \sqrt{f} + z_2 & z_1 - z_2 > \sqrt{f} \\ \frac{z_1 + z_2 + \sqrt{2f - (z_1 - z_2)^2}}{2} & \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

式中, z_1, z_2 是格点 (i, j) 分别在 x 方向和 y 方向的相

$$\bar{z}^{(k+1)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{f} + \bar{z}_1^{(k+1)}}{a_1} & \bar{z}_2^{(k+1)} - \bar{z}_1^{(k+1)} > \frac{\sqrt{f}}{a_1} \\ \frac{\sqrt{f} + \bar{z}_2^{(k+1)}}{b_1} & \bar{z}_1^{(k+1)} - \bar{z}_2^{(k+1)} > \frac{\sqrt{f}}{b_1} \\ \frac{1}{a_1 + b_1} (a_1 \bar{z}_1^{(k+1)} + b_1 \bar{z}_2^{(k+1)} + \sqrt{(a_1 + b_1)f - a_1 b_1 (\bar{z}_1^{(k+1)} - \bar{z}_2^{(k+1)})^2}) & \text{其他} \end{cases} \quad (18)$$

2 PFMM

PFMM的思想是将式(3)推广到透视投影情况中,得到广义的Eikonal方程(在波动理论中对应各向异性Eikonal方程),然后利用FMM方法求解Eikonal方程,从而解决了透视投影下SFS问题。透视投影下的图像照度方程为^[11]

$$I(u, v) = \frac{(u - Fp_s)\hat{p} + (v - Fq_s)\hat{q} + 1}{\|\mathbf{L}\| \sqrt{(u\hat{p} + v\hat{q} + 1)^2 + F^2(\hat{p}^2 + \hat{q}^2)}} \quad (6)$$

式中, F 为焦距, $\|\mathbf{L}\| = \sqrt{p_s^2 + q_s^2 + 1}, \bar{z} = \ln z, \hat{p} = \bar{z}_u = \frac{\partial(\ln z)}{\partial u}, \hat{q} = \bar{z}_v = \frac{\partial(\ln z)}{\partial v}$ 。将式(6)整理为

$$a_1 \hat{p}^2 + b_1 \hat{q}^2 = f(\hat{p}, \hat{q}) \quad (7)$$

式中,

$$a_1 = I^2 \|\mathbf{L}\|^2 (u^2 + F^2) \quad (8)$$

$$b_1 = I^2 \|\mathbf{L}\|^2 (v^2 + F^2) \quad (9)$$

$$f = a_2 \hat{p}^2 + b_2 \hat{q}^2 - 2c\hat{p}\hat{q} - 2d\hat{p} - 2e\hat{q} - f_1 \quad (10)$$

而

$$a_2 = (u - Fp_s)^2 \quad (11)$$

$$b_2 = (v - Fq_s)^2 \quad (12)$$

$$c = I^2 \|\mathbf{L}\|^2 uv - (u - Fp_s)(v - Fq_s) \quad (13)$$

$$d = I^2 \|\mathbf{L}\|^2 u - (u - Fp_s) \quad (14)$$

$$e = I^2 \|\mathbf{L}\|^2 v - (v - Fq_s) \quad (15)$$

$$f_1 = I^2 \|\mathbf{L}\|^2 - 1 \quad (16)$$

然后再将式(7)改写为

$$a_1 (\hat{p}^{(k+1)})^2 + b_1 (\hat{q}^{(k+1)})^2 = f(\hat{p}^{(k)}, \hat{q}^{(k)}) \quad (17)$$

k 为迭代次数。从某种意义上,式(17)是式(3)的推广,称为广义Eikonal方程。利用第 k 次迭代得到的 $\hat{p}^{(k)}$ 和 $\hat{q}^{(k)}$,计算 f ,再利用式(15),使用快速步进法(FMM)得到第 $k+1$ 次迭代的 \bar{z} 。可以看出 a_1, b_1 不依赖于 $\hat{p}^{(k)}$ 和 $\hat{q}^{(k)}$ 的,而 f 依赖于 $\hat{p}^{(k)}$ 和 $\hat{q}^{(k)}$ 。则式(17)的解可由式(4)推广为^[10-11]

式中, $z_1^{(k+1)}, z_2^{(k+1)}$ 是在第 $k+1$ 次迭代中格点 (i, j) 分别在 x 方向和 y 方向的相邻两个格点中高度已经更新且高度较小的点的高度值。

3 透视投影下基于自适应 Eikonal 方程的 SFS

PFMM 存在一个问题:虽然可以保证 $a_1 > 0, b_1 > 0$,但是,由于 $\hat{p}^{(k)}$ 和 $\hat{q}^{(k)}$ 可能存在误差,不能保证由 $\hat{p}^{(k)}$ 和 $\hat{q}^{(k)}$ 得到的 $f \geq 0$ (如果 $f < 0$,则等式不成立,且不能使用 FMM 方法),并且当 $\hat{p}^{(k)}$ 和 $\hat{q}^{(k)}$ 误差较大时候,收敛速度较慢,精度较低。本文在 PFMM 方法基础上,提出了基于自适应 Eikonal 方程的 PFMM,其原理是:根据对初始数据的依赖程度,自适应调整 Eikonal 方程系数,然后利用 PFMM 来解决透视投影下的 SFS 问题。

将式(6)整理为

$$a\hat{p}^2 + b\hat{q}^2 + 2c\hat{p}\hat{q} + 2d\hat{p} + 2e\hat{q} + f_1 = 0 \quad (19)$$

式中,

$$a = I^2 \|L\|^2 (u^2 + F^2) - (u - Fp_s)^2 \quad (20)$$

$$b = I^2 \|L\|^2 (v^2 + F^2) - (v - Fq_s)^2 \quad (21)$$

c, d, e, f_1 如式(12) ~ (15)定义。将式(19)写为如下形式:

$$a_1\hat{p}^2 + b_1\hat{q}^2 = f(\hat{p}, \hat{q}) =$$

$$(a_1 - a)\hat{p}^2 + (b_1 - b)\hat{q}^2 - 2c\hat{p}\hat{q} - 2d\hat{p} - 2e\hat{q} - f_1$$

考虑到迭代,则

$$a_1(\hat{p}^{(k+1)})^2 + b_1(\hat{q}^{(k+1)})^2 = f(\hat{p}^{(k)}, \hat{q}^{(k)}) \quad (22)$$

式中,

$$f(\hat{p}^{(k)}, \hat{q}^{(k)}) = (a_1 - a)(\hat{p}^{(k)})^2 + (b_1 - b)(\hat{q}^{(k)})^2 -$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{f}{a_1}} + \hat{z}_1 \triangleq g_1(\hat{p}, \hat{q}, a_1(\hat{p}, \hat{q}), b_1(\hat{p}, \hat{q})) \\ \sqrt{\frac{f}{b_1}} + \hat{z}_2 \triangleq g_2(\hat{p}, \hat{q}, a_1(\hat{p}, \hat{q}), b_1(\hat{p}, \hat{q})) \\ \frac{a_1\hat{z}_1 + b_1\hat{z}_2 + \sqrt{(a_1 + b_1)f - a_1b_1(\hat{z}_1 - \hat{z}_2)^2}}{a_1 + b_1} \triangleq g_3(\hat{p}, \hat{q}, a_1(\hat{p}, \hat{q}), b_1(\hat{p}, \hat{q})) \end{cases}$$

可以看出, $g_s (s = 1, 2, 3)$ 是关于 \hat{p}, \hat{q} 的复合函数。

由复合函数求导法则和式(24),得

$$J_s = \left(\frac{\partial g_s}{\partial \hat{p}} + \frac{\partial g_s}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial \hat{p}} + \frac{\partial g_s}{\partial b_1} \frac{\partial b_1}{\partial \hat{p}} \right)^2 + \left(\frac{\partial g_s}{\partial \hat{q}} + \frac{\partial g_s}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial \hat{q}} + \frac{\partial g_s}{\partial b_1} \frac{\partial b_1}{\partial \hat{q}} \right)^2 \quad s = 1, 2, 3 \quad (27)$$

令

$$2c\hat{p}^{(k)}\hat{q}^{(k)} - 2d\hat{p}^{(k)} - 2e\hat{q}^{(k)} - f_1 \quad (23)$$

式(22)的解也是从式(18)求出,只是其中系数 a_1, b_1 和 f 不同。

下面来确定 a_1, b_1 和 f 的值。

1) $\hat{z}^{(k+1)}$ 依赖于 $\hat{p}^{(k)}$ 和 $\hat{q}^{(k)}$ 的公式表征

如果将 a_1, b_1 作为 $\hat{p}^{(k)}$ 和 $\hat{q}^{(k)}$ 的函数,则 f 是 $\hat{p}^{(k)}, \hat{q}^{(k)}, a_1$ 和 b_1 的函数,则 $\hat{z}^{(k+1)}$ 由第 k 次迭代得到的 $\hat{p}^{(k)}$ 和 $\hat{q}^{(k)}$ 决定。当 $\hat{p}^{(k)}$ 和 $\hat{q}^{(k)}$ 偏离 \hat{p} 和 \hat{q} 的真实值较远,如果 $\hat{z}^{(k+1)}$ 对 $\hat{p}^{(k)}$ 和 $\hat{q}^{(k)}$ 的依赖程度越大,收敛速度就越慢,甚至不能收敛到全局最优解。所以要求 $\hat{z}^{(k+1)}$ 依赖 $\hat{p}^{(k)}$ 和 $\hat{q}^{(k)}$ 的程度越小越好。

将 $\hat{z}^{(k+1)}$ 对 $\hat{p}^{(k)}$ 和 $\hat{q}^{(k)}$ 的依赖程度用 $\frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{p}^{(k)}}$,

$\frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{q}^{(k)}}$ 来表征,为书写方便,省略迭代次数,即上标 k

和 $k+1$,将 \hat{z} 对 \hat{p} 和 \hat{q} 的依赖程度尽量降低,即

$$J = \left(\frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{p}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{q}} \right)^2 \rightarrow \min \quad (24)$$

这样也就缓解了 PFMM 方法对初始数据过于依赖的问题。

2) 待求量 a_1, b_1 和 f 与 $\hat{z}^{(k+1)}$ 的关系

现在需要找到满足式(24)的最合适的 a_1 和 b_1 ,同时满足以下约束(即广义 Eikonal 方程对系数的要求):

$$\begin{cases} a_1 > 0 \\ b_1 > 0 \\ f(\hat{p}^{(k)}, \hat{q}^{(k)}) \geq 0 \end{cases} \quad (25)$$

将式(18)表示为

$$\hat{z}_2 - \hat{z}_1 > \sqrt{\frac{f}{a_1}}$$

$$\hat{z}_1 - \hat{z}_2 > \sqrt{\frac{f}{b_1}} \quad (26)$$

其他

$$J = \max(J_1, J_2, J_3) \quad (28)$$

找出使得 J 最小的 a_1, b_1 ,得出相应 \hat{z} 。

3) 将泛函问题转化为带约束的优化问题

可以看出, J 是函数 $a_1(\hat{p}, \hat{q})$ 和 $b_1(\hat{p}, \hat{q})$ 的函数,即为泛函。求 J 的极值问题即为求泛函的极值问题。通常对积分型的最简泛函求极值,可以使用变分法。从式(27)可以看出, J 不是简单的积分型

的泛函,而且没有边界条件,不能利用变分方法中的经典方法——欧拉公式,但是可以通过将这个泛函问题转化为带约束的优化问题来求解。由于 a_1 和 b_1 是 \hat{p} 和 \hat{q} 的函数,则对 a_1 和 b_1 进行关于 \hat{p} 和 \hat{q} 的多项式近似,令

$$a_1 = \sum_{m=0}^{M_{a_1}} \sum_{n=0}^{N_{a_1}} c_{mn}^{(a)} \hat{p}^m \hat{q}^n \quad (29)$$

$$b_1 = \sum_{m=0}^{M_{b_1}} \sum_{n=0}^{N_{b_1}} c_{mn}^{(b)} \hat{p}^m \hat{q}^n \quad (30)$$

式中, M_{a_1}, N_{a_1} 分别为 \hat{p}, \hat{q} 用于表示 a_1 的最高次数, M_{b_1}, N_{b_1} 分别为 \hat{p}, \hat{q} 用于表示 b_1 的最高次数。将 a_1 和 b_1 以及 a_1 和 b_1 分别对 \hat{p} 和 \hat{q} 的偏导数代入以上各式,利用带约束的优化算法(文中使用了带约束粒子群优化算法),得到 $c_{mn}^{(a)} (m=0, 1, \dots, M_{a_1}; n=0, 1, \dots, N_{a_1})$ 和 $c_{mn}^{(b)} (m=0, 1, \dots, M_{b_1}; n=0, 1, \dots, N_{b_1})$ 。

4) 本文算法和 PFMM 的关系

如果令 $c_{mn}^{(a)} (m=0, 1, \dots, M_{a_1}; n=0, 1, \dots, N_{a_1})$, $c_{mn}^{(b)} (m=0, 1, \dots, M_{b_1}; n=0, 1, \dots, N_{b_1})$ 除了 $c_{00}^{(a)} = I^2 \|\mathbf{L}\|^2 (u^2 + F^2)$, $c_{00}^{(b)} = I^2 \|\mathbf{L}\|^2 (v^2 + F^2)$ 之外都为 0,可以得到式(8)和式(9),这就是 PFMM 的情况,得到的解只是满足 $a_1 > 0, b_1 > 0$,没有保证 $f > 0$,且没有达到 J 的最小值。所以 PFMM 方法是本文算法的特例。

可以看出,提出的改进方法是 PFMM 的推广,

扩大了 PFMM 的适用范围,使初始数据对结果的影响尽量减小,提高了算法精度。

4 实验结果及分析

以 4 幅合成图像为例来验证本文算法的有效性。所有图片的大小都是 64×64 pixels, $\mathbf{L} = (0, 0, -1)^T$ 。物体表面如图 1(a) 所示,对应的透视投影下的灰度图像由式(6)生成,如图 1(b) 所示,其中,例 1 和例 2 中,摄像机焦距 $F = 40$,例 3 和例 4 中 $F = 30$ 。在透视投影下,例 1 和例 2 的物体表面的边缘部分在灰度图像内灰度为 0,从其灰度图像不能恢复物体的边缘信息,所以这样的物体表面存在着在透视投影下有效部分的问题。两个例子的有效表面如图 1(c) 所示。把利用正交投影下的 Tsai-Shah 方法得到的高度作为 PFMM 和本文算法的初始高度,如图 1(d) 所示,PFMM 的结果如图 1(e) 所示,本文算法实验结果如图 1(f) 所示。

在例 1 中,由于物体表面类型比较简单,初始数据、PFMM 和本文算法得到的结果都比较理想;在例 2 中,由于初始高度是使用正交投影下的 Tsai-Shah 方法得到的,在瓶口和瓶身处都有较大的失真,PFMM 由于对初始数据依赖性较大,虽然在瓶身处恢复的结果较好,但是在瓶口处将失真进一步扩大,而本文

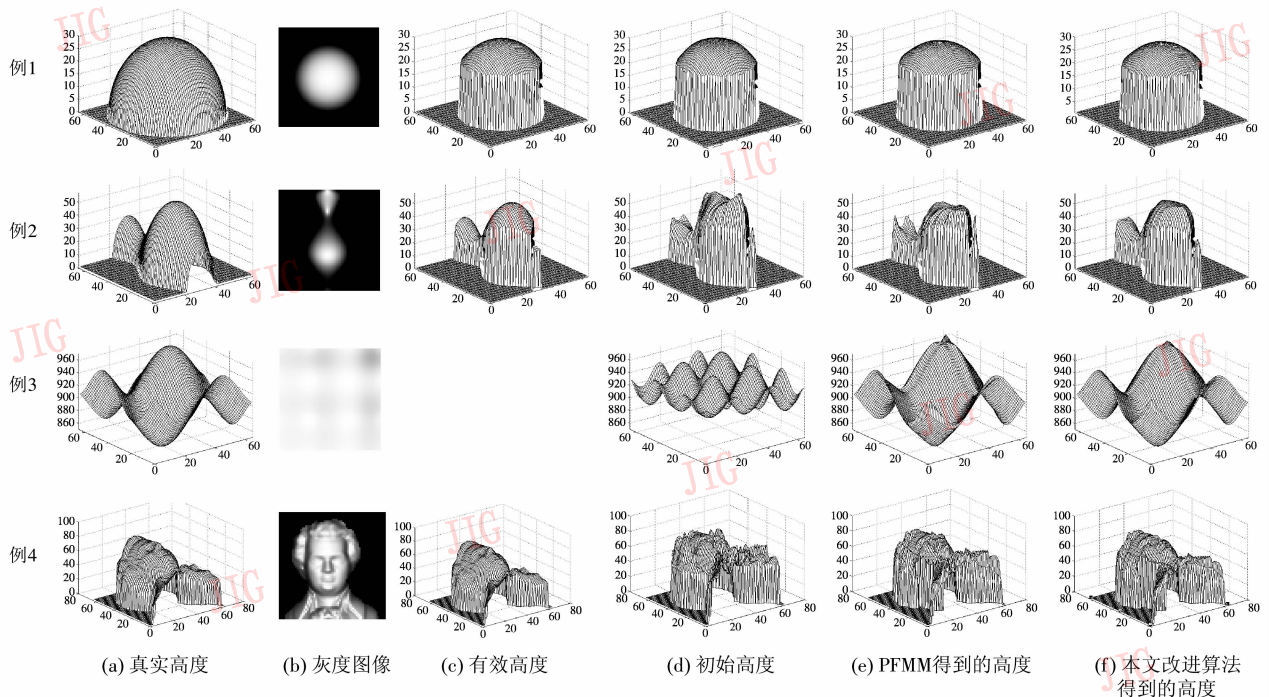


图 1 PFMM 和本文算法结果对比图

Fig. 1 Results contrast of PFMM and the proposed method

算法由于减小了对初始数据的依赖程度,在瓶口处和初始高度比较,失真更小,瓶身处得到的结果也比 PFMM 更为精确;在例 3 中,初始数据得到的结果与真实高度差别较大,虽然 PFMM 和本文算法都能从中得到较好的结果,但是本文算法得到的结果更接近真实高度;在例 4 中,从头像的鼻子眼睛等细节也看出本文算法的结果比 PFMM 更精确。

表 1 和表 2 对两个例子的最大误差和平均误差进行了比较,其中误差公式为

$$e_1 = \max_{i,j} |z(i,j) - z_a(i,j)|$$

$$e_2 = \frac{1}{K_x \cdot K_y} \sum_{i=1}^{K_x} \sum_{j=1}^{K_y} |z(i,j) - z_a(i,j)|^2$$

其中, $z_a(i,j)$, $z(i,j)$ 分别为物体真实高度和算法恢复的高度, K_x , K_y 分别为 x 轴和 y 轴的离散点的个数。

表 1 PFMM 和本文算法最大误差 (e_1) 比较

Tab.1 Maximum error (e_1) of PFMM and the proposed method

| | 例 1 | 例 2 | 例 3 | 例 4 |
|------|---------|---------|----------|----------|
| PFMM | 0.512 4 | 7.256 8 | 62.358 4 | 22.231 4 |
| 本文算法 | 0.323 5 | 4.958 9 | 49.365 8 | 19.357 1 |

表 2 PFMM 和本文算法平均误差 (e_2) 比较

Tab.2 Mean error (e_2) of PFMM and the proposed method

| | 例 1 | 例 2 | 例 3 | 例 4 |
|------|---------|---------|----------|----------|
| PFMM | 0.177 7 | 4.411 1 | 25.657 3 | 17.258 7 |
| 本文算法 | 0.126 8 | 3.167 6 | 13.377 5 | 14.546 2 |

通过对 4 幅合成图像的实验结果比较可以看出,本文方法得出的结果比 PFMM 误差更小,精度更高,更接近真实的物体表面,可以有效解决透视投影下的 SFS 问题。但是本文算法虽然提高了精度,但是比较复杂,即以算法复杂度换取精度。以后的工作将考虑如何进一步降低算法复杂度。

5 结 论

提出了基于自适应 Eikonal 方程的 PFMM 算法来解决透视投影下的从明暗恢复形状问题。通过分析 Eikonal 方程系数的特点,自适应调整系数,使其对初始数据的依赖性达到最小。实验结果证明,本文算法得到的结果比 PFMM 更精确,恢复高度已经比较接近真实的表面高度,可以有效解决透视投影下的 SFS 问题。

参考文献 (References)

- [1] Brooks M J, Horn B K P. Shape and source from shading[C]//Proceedings of International Joint Conference on Artificial Intelligence. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1985: 932-936.
- [2] Zhang R, Tsai P S, Cryer J E, et al. Shape from shading: A survey[J]. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1999, 21(8): 690-705.
- [3] Yamany S M, Farag A A, Rickard E, et al. A robust 3D reconstruction system for human jaw modeling[C]//Proceedings of International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention. Bellingham, WA, USA: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 1999: 778-787.
- [4] Lee K M, Kuo C-C J. Shape from shading with a generalized reflectance map model [J]. Computer Vision and Image Understanding, 1997, 67(2): 143-160.
- [5] Prados E, Faugeras O. A generic and provably convergent shape-from-shading method for orthographic and pinhole cameras[J]. International Journal of Computer Vision, 2005, 65(1-2): 97-125.
- [6] Prados E, Camilli F, Faugeras O. A unifying and rigorous shape from shading method adapted to realistic data and applications[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2006, 25(3): 307-328.
- [7] Cristiani E, Falcone M, Seghini A. Some remarks on perspective shape-from-shading models [C]//Sgallari F, Murli A, Paragios N, eds. Scale Space and Variational Methods in Computer Vision, Lecture Notes in Computer Science, Berlin, Germany: Springer, 2007, 4485: 276-287.
- [8] Prados E, Faugeras O. Perspective shape from shading and viscosity solutions[C]//Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Computer Vision. Washington DC, USA: IEEE Computer Society, 2003, 2: 826-831.
- [9] Tankus A, Sochen N, Yeshurun Y. A new perspective [on] shape-from-shading [C]//Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Computer Vision. Washington DC, USA: IEEE Computer Society, 2003, 2: 862-869.
- [10] Tankus A, Sochen N, Yeshurun Y. Shape-from-shading under perspective projection [J]. International Journal of Computer Vision, 2005, 5(6): 21-43.
- [11] Tankus A, Sochen N, Yeshurun Y. Perspective shape-from-shading by fast marching [C]//Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Los Alamitos, CA, USA: IEEE Computer Society, 2004, 1: 43-49.
- [12] Sethian J A. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1996, 93(4): 1591-1595.
- [13] Tsitsiklis J N. Efficient algorithm for globally optimal trajectories[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, 40(9): 1528-1538.