

中图法分类号: TP391.4 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2010)10-1425-05
索引信息: 程鸿, 章权兵, 韦穗. 基于整体变分的相位恢复[J]. 中国图象图形学报, 2010, 15(10): 1425-1429

基于整体变分的相位恢复

程 鸿, 章权兵, 韦 穗

(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室, 合肥 230039)

摘 要: 相位恢复是指利用直接测量得到的强度分布恢复相位从而重建波函数。为了能够在已知强度信息的情况下最大限度地恢复相位, 结合强度传输方程提出一种基于整体变分的相位恢复算法: 首先在一致性照明的情况下建立相位恢复模型, 然后把相位恢复问题转化为带有整体变分正则化项的图像能量泛函极值问题, 再使用有限差分牛顿法求出相位的最优解。该算法只需要测量临近空间平面上的光波的空间强度即可从强度图像中恢复相位信息, 避免了由于干涉法要求光源的空间和时间连续所造成的分辨率、敏感性等问题。实验表明在恢复相位的同时可以保持良好的边缘。

关键词: 相位恢复; 强度传输方程; 整体变分; 正则化

Phase retrieval based on total variation

CHENG Hong, ZHANG Quanbing, WEI Sui

(Key Laboratory of Intelligent Computing & Signal Processing, Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230039)

Abstract: Phase retrieval refers to the use of direct measurement of intensity distribution to restore the phase and then reconstruct the wave function. A phase retrieval based on total variation with transport-of-intensity equation is presented to obtain phase information as much as possible. First the phase retrieval model is established in the case of uniform illumination, and then the problem is translated into minimum of energy functional with total variation regularization, and the finite difference Newton's law is used to seek an optimal solution. Only the measurements of the spatial intensity of the optical wave in closely spaced planes perpendicular to the direction of propagation are needed and the sensitivity and resolution issues because of the requirements of interferometry techniques put on the spatial and temporal coherence of the optical source are avoided. The experiments show that information in the edge is kept when conducting phase retrieval.

Keywords: phase retrieval; transport-of-intensity equation; total variation; regularization

0 引 言

当一束光波碰到一个物体时, 在不忽略光与物体媒质发生的偏振等作用下, 物体对波的3个特性产生影响。前两个特性是振幅和波长, 即亮度和颜色。最后一个特性是波阵面的相位(曲率), 包含了

物体的深度和形状等信息。在实际中, 目前仅能通过检测器(如 CCD 摄像机、照片胶卷或人的眼睛等)直接测量光波场的振幅平方(强度), 但不能直接测量波场的相位, 为了得到深度信息需要对数据进行复杂的转换和处理。从1977年诺贝尔奖得主 Gabor 提出用干涉法从强度测量中恢复波阵面以来, 相位重构技术受到相当的重视, 并且已经应用在

基金项目: 国家自然科学基金项目(60603083, 60872106)。

收稿日期: 2009-02-26; **改回日期:** 2009-05-18

第一作者简介: 程 鸿(1981—), 女, 安徽大学电路与系统专业博士研究生。主要研究方向为计算视觉、计算信号处理等。

E-mail: chenghong@ahu.edu.cn。

显微、天文等领域中^[1-2]。本文提出一种基于整体变分(TV)的相位恢复算法。该算法只需要测量临近空间平面上光波的空间强度即可有效地从强度图像中恢复出相位信息,并且由于实验采用的是非干涉技术避免了由于干涉法要求光源的空间和时间连续所造成的分辨率、敏感性等问题。

1 强度与相位

当一平面波通过试片后会改变波的前进方向(相位改变),在成像平面上形成强度分布变化,如图 1 所示。在不同成像平面影像强度变化中包含了所改变的波相位信息。强度与相位之间的关系可以用强度传输方程(TIE)描述。

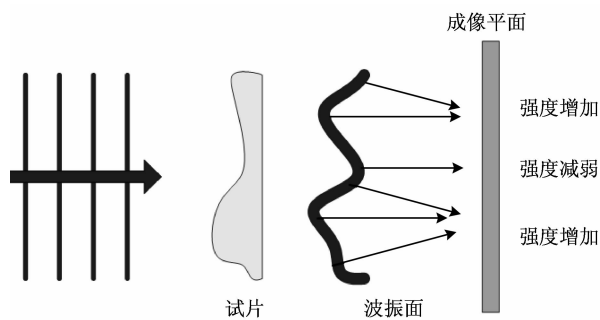


图 1 波传播示意图
Fig. 1 Sketch of wave propagation

假设平面波沿 z 轴方向传播,则 Poynting 矢量和强度、相位之间的关系满足下式

$$\langle S \rangle = \frac{\lambda}{2\pi} I(x, y, z) \nabla \varphi(x, y, z) \quad (1)$$

式中, $I(x, y, z)$ 表示强度, $\varphi(x, y, z)$ 表示相位, λ 为波长, $\langle \rangle$ 表示一段时间内的时间平均, $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ 是梯度算子。将相位分解成标量分量 $\varphi_s(x, y, z)$ 和矢量分量 $\varphi_v(x, y, z)$, 则

$$\langle S \rangle = I(x, y, z) [\nabla \varphi_s(x, y, z) + \nabla \times \varphi_v(x, y, z)] \quad (2)$$

在近轴结构中,假设能量在小角度方向沿光轴传播,利用式(1)和式(2)可以得到 TIE^[3]。

$$-\frac{2\pi}{\lambda} \partial_z I = \nabla \cdot (I \nabla \varphi) \quad (3)$$

该方程将光源的强度和相位与以 Fresnel 衍射描述的强度的纵向变化联系在一起。一方面,当光学元件导致相位的变化时,TIE 可以预知光源的强度调制;另一方面,通过测量不同数量的 Fresnel 衍射后的光源的强度,TIE 能够用来进行波振面重构。

目前所存在的求解 TIE 方程的算法各有优缺点。例如文献[4]指出可以通过 2 维傅里叶转换求解相位,如果设 $FT[\varphi(x, y, z)] = \hat{\varphi}(k_x, k_y, z)$, 并由强度为 I_0 的统一平面波进行照明,那么 $\varphi(x, y, z) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{I_0} FT^{-1} \left[\frac{1}{k_x^2 + k_y^2} FT(\partial_z I) \right]$, 其中 FT 表示傅里叶变换。但当 $k_x = k_y = 0$ 时,上式无法提供足够的信息来计算相位。本文提出了一种新的基于整体变分的相位求解方法。该算法只需要测量临近空间平面上的光波的空间强度即可从强度图像中恢复出相位信息,并且在恢复中可保持良好的边缘。

2 基于整体变分的相位恢复算法

2.1 相位恢复模型

对于式(3)中的光强变化 $\partial_z I$, 可以利用两个相近平面(沿着纵向传播轴的位置 $z_0 + dz$ 和 $z_0 - dz$) 上的强度的有限差分近似替代(如图 2 所示),即

$$\partial_z I = \frac{I(x, y, z_0 + dz) - I(x, y, z_0 - dz)}{2dz} \quad (4)$$

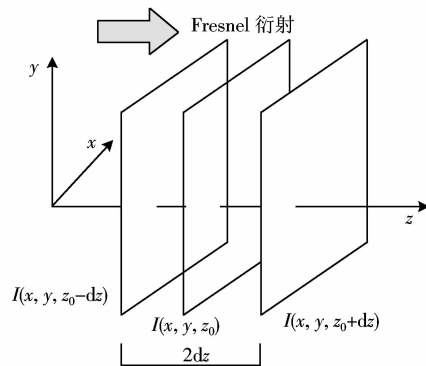


图 2 光强变化测量图
Fig. 2 Measuring map of changes in light intensity

假设在 $z = z_0$ 平面的开区域 Ω 内的强度 $I(x, y, z_0)$ 都是非零的,在 Ω 的边界和外面为零,利用卷积运算将式(3)的右边简化成 $\varphi(x, y, z_0) * h(x, y) + \nabla I(x, y, z_0)$ 的形式,其中 $*$ 表示卷积运算, $h(x, y) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ 是一个 } 3 \times 3 \text{ 的卷积模板。结合式(4)}$$

将 TIE 转化成如下形式

$$-\frac{\pi(I(x, y, z_0 + dz) - I(x, y, z_0 - dz))}{\lambda dz} = \nabla I(x, y, z_0) = \varphi_h \quad (5)$$

记 $\varphi_h = \varphi(x, y, z_0) * h(x, y)$ 。由此,建立了一致光照情况下的相位恢复模型。在相差一个任意常数的情况下,由式(5)所求解的相位是唯一的。本文所求解的开区域 Ω 设为矩形区域,其长和宽分别用 l, h 表示,即 $\Omega_{lh} = (0, l) \times (0, h)$ 。

2.2 整体变分正则化

对于建立的相位恢复模型可以直接利用反卷积的方法解得相位值,但是在很多情况下反卷积问题本身就是病态的。正则化是求解病态问题的一种有效方法,其基本思想是利用物理问题的先验知识增加约束,使问题的解能连续依赖于观测数据并且在物理上是有意义的。目前常用的正则化技术主要包括 Tikhonov 正则化^[5],整体变分正则化,各种迭代等方法。其中整体变分正则化模型最早由 Rudin, Osher 和 Fatemi^[6]提出,其采用各向异性扩散方式,最大的特点是在处理的同时能较好地保留边缘信息,在图像复原、图像修复等场合有着很好的应用效果^[7-8]。引入整体变分正则化的方法,把相位恢复问题转化为带有整体变分正则化项的图像能量泛函极值问题,并使用最优化理论中的有限差分牛顿法求出相位的最优解。

基于整体变分的相位恢复即最小化如下形式的能量泛函(已利用 Lagrange 乘子转为无约束形式):

$$\min_{\Omega_{lh}} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega_{lh}} |h * \varphi - \varphi_h|^2 dx dy + \beta \int_{\Omega_{lh}} |\nabla \varphi| dx dy \right) \quad (6)$$

式中, $\int_{\Omega_{lh}} |\nabla \varphi| dx dy$ 是正则化项, β 是正则化参数。最小化式(6)对应的 Euler-Lagrange 方程为

$$0 = h * (h * \varphi - \varphi_h) - \beta \nabla \left(\frac{\nabla \varphi}{\sqrt{|\nabla \varphi|^2 + \rho}} \right) \quad (7)$$

式中, ρ 为很小的常量,其作用是为了避免 $|\nabla \varphi| = 0$ 。式(7)所对应的离散形式如下所示:

$$0 = (\varphi * h - \varphi_h) * h(-x, -y) + \beta \left((d^x)^T \phi(x) + (d^y)^T \phi(y) \right) \quad (8)$$

式中, d^x 和 d^y 分别表示对应于水平和垂直方向的一阶线性微分算子,并记

$$\begin{cases} \phi_n(x) = \frac{(d^x \cdot \varphi)_n}{\sqrt{(d^x \cdot \varphi)_n^2 + (d^y \cdot \varphi)_n^2 + \rho^2}} \\ \phi_n(y) = \frac{(d^y \cdot \varphi)_n}{\sqrt{(d^x \cdot \varphi)_n^2 + (d^y \cdot \varphi)_n^2 + \rho^2}} \end{cases} \quad (9)$$

最后利用有限差分牛顿法寻找相位的最优解,基本思想是利用目标函数的二次 Taylor 展开并将其极小

化,在 Jacobi 矩阵 $J(\varphi)$ 不可利用时用有限差分近似代替,迭代公式为

$$\begin{cases} J(\varphi^{(n)})D = -\nabla f(\varphi^{(n)}) & \text{得 } D^{(n)} \\ \varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n)} + \alpha_n D^{(n)} \end{cases} \quad (10)$$

式中, $D^{(n)}$ 是下降方向, α_n 是步长因子,可以通过沿牛顿方向 1 维搜索寻优得到。迭代终止条件如下式所示:

$$\|J(\varphi^{(n)})D + \nabla f(\varphi^{(n)})\| < p_n \quad (11)$$

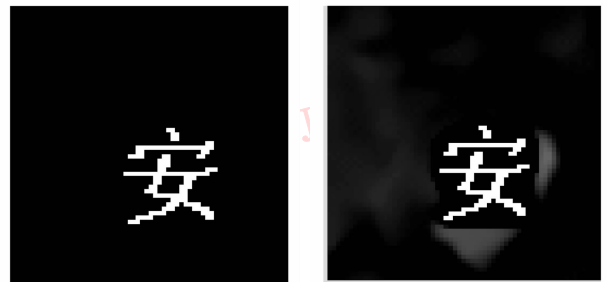
式中, $p_n = 10^{-2n-m+1}$ 是第 n 轮迭代所对应的停止阈值, m 是迭代的轮数,当迭代进行到最后一轮即 $n = m$ 时, $p_n = 0.01$,多数文献中通常选取这个值作为迭代停止阈值。

3 实验结果

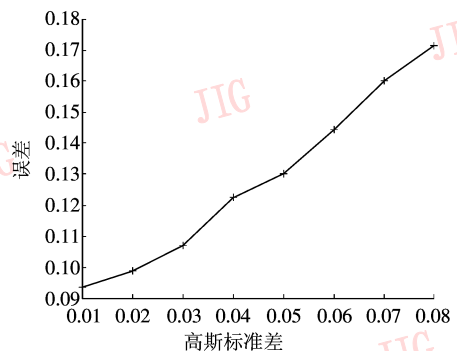
具体的算法步骤总结如下:

- 1) 获取两幅强度图像,根据式(4)计算 $\partial_z I$;
- 2) 由式(5)计算 φ_h ;
- 3) 构建相位的迭代方程寻找相位的最优解,初始值 $\varphi^{(0)} = I(x, y, z_0)$;
- 4) 判断迭代终止条件式(11)是否满足,满足 $\varphi^{(n)}$ 为最终解,不满足 $n = n + 1$ 并跳到 3)。

按照上述算法步骤做了 3 组实验:第 1 组实验结果如图 3 所示。其中图 3(a)为原始相位图像,



(a) 原始相位图 (b) 恢复相位图



(c) 误差曲线

图 3 第 1 组实验结果

Fig. 3 The first group results

图 3(b)是在原图像上叠加随机产生的标准差为 $\sigma = 0.001$ 的高斯噪声后恢复的相位结果。采用原始相位 s 和恢复相位 $srecon$ 之间的 RMS (root mean square) 误差来量化恢复精度^[9],如式(12)所示。

$$\varepsilon_{\text{RMS}} = \frac{\sqrt{\int_{x_1}^{x_2} (srecon(x) - s(x))^2 dx}}{2 \int_{x_1}^{x_2} s(x)^2 dx} \quad (12)$$

图 3(c)是在原始相位上叠加随机产生的标准差为 $\sigma = 0.001 \sim 0.008$ 的高斯噪声后的相对误差曲线图,每组数据计算 100 次取均值。

第 2 组实验与上面所提到的文献[4]的算法做个简单的对比。其中图 4(a)是模拟在平面 $z = z_0$ 上的强度图像, 128×128 像素,矩形 Ω_h 的 $l = h = 1.28$ cm, 波长 $\lambda = 500$ nm, $dz = 0.1$ cm。利用 Fresnel-Kirchhoff 积分公式分别计算 $z = z_0 + dz$ 和 $z = z_0 - dz$ 平面上的强度图像,根据式(4)模拟产生的强度纵向变化 $\partial_z I$

如图 4(b)所示,图 4(c)和图 4(d)分别是根据文献[4]和本文算法恢复的相位。从实验结果可以看出本文算法能够较好地保持边缘信息。

第 3 组实验测试算法恢复更复杂相位图像的能力。图 5(a)是聚焦图像,同样为 128×128 像素;图 5(b)是过焦图像,在实验中作为 $I(x, y, z_0 + dz)$;图 5(c)是欠焦图像,在实验中作为 $I(x, y, z_0 - dz)$ 。矩形 Ω_h 的 $l = h = 1.28$ cm, 波长 $\lambda = 500$ nm, $dz = 60$ nm, 正则化参数 $\rho = 5 \times 10^{-3}$ 以及 $\beta = 10^{-2}$;图 5(d)是根据本文算法恢复的相位结果。实验表明本文算法只需测量聚焦平面(即平面 $z = z_0$)上光波的空间强度和相邻对称散焦平面(即平面 $z = z_0 + dz$ 和 $z = z_0 - dz$)上的空间强度即可恢复出相位信息,避免了由于干涉法要求光源的空间和时间连续所造成的分辨率、敏感性等问题,并且在恢复中可保持图像良好的边缘信息。

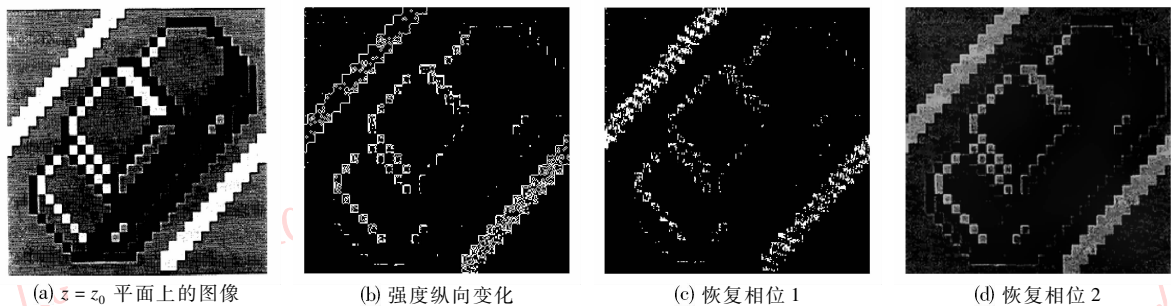


图 4 第 2 组实验结果

Fig. 4 The second group results

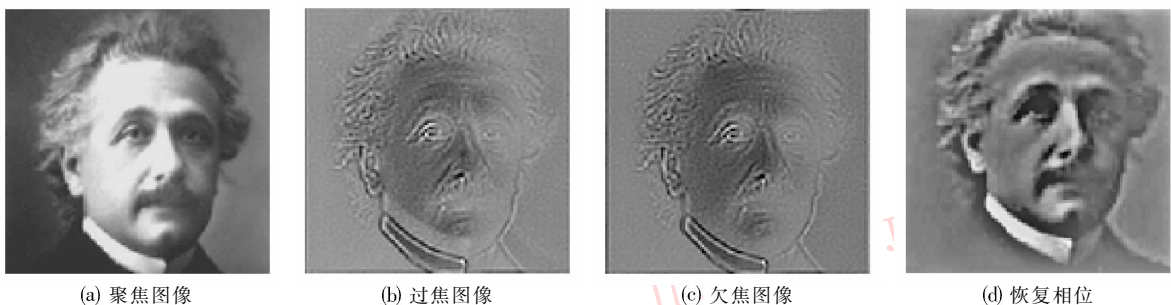


图 5 第 3 组实验结果

Fig. 5 The third group results

4 结 论

TIE 将光源的强度和相位与强度的纵向变化联系在一起,通过求解 TIE 恢复相位信息是一类重要

的相位恢复方法。本文在 TIE 的基础上提出了一种新的基于整体变分的相位恢复算法,并给出了详细的推导过程和算法步骤,3 组实验结果验证了算法的正确性和有效性。

参考文献 (References)

- [1] Petersen T C, Keast V J, Paganin D M. Quantitative TEM-based phase retrieval of MgO nano-cubes using the transport of intensity equation[J]. Ultramicroscopy, 2008, 108(9): 805-815.
- [2] McVitie S, Ngo D T. Quantitative measurements of phase using the transport of intensity equation[J]. Journal of Physics, 2008, 126(1): 1742-1746.
- [3] Nugent K A, Gureyev T E, Cookson D F, et al. Quantitative phase imaging using hard X rays[J]. Physical Review Letters, 1996, 77(14): 2961-2964.
- [4] Nugent K A. X-ray image reconstruction using the transport of intensity equation [C]//Proceedings of the 8th International Conference on X-ray Microscopy. Tokyo, Japan: Institute of Pure and Applied Physics, 2006, 7: 399-402.
- [5] Tikhonov A N, Arsenin V Y. Solutions of Ill-posed problems [J]. SIAM Review, 1979, 21(2): 266-267.
- [6] Rudin L, Osher S J, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 60(1-4): 259-268.
- [7] Chan T F, Hong S J. Mathematical models for local non-texture inpaintings[J]. Siam Journal on Applied Mathematics, 2001, 62(3): 1019-1043.
- [8] Zhang Hang, Luo Dayong. Status and development of study on blind image restoration algorithm [J]. Journal of Image and Graphics, 2004, 10(9): 1145-1152. [张航, 罗大庸. 图像盲复原算法研究现状及其展望[J]. 中国图象图形学报, 2004, 10(9): 1145-1152.]
- [9] Dorrer C, Zuegel J D. Optical testing using the transport-of-intensity equation [J]. Optics Express, 2007, 15(12): 7165-7175.