

中图法分类号: TP391.41 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2010)10-1449-05

索引信息: 孙军,潘振宽,魏伟波,张海涛. 隐式曲面上图像扩散的高阶模型[J]. 中国图象图形学报, 2010, 15(10): 1449-1453

隐式曲面上图像扩散的高阶模型

孙军, 潘振宽, 魏伟波, 张海涛

(青岛大学信息工程学院, 青岛 266071)

摘要: 用零水平集函数表达3维曲面,应用曲面上图像梯度的切投影表达其内蕴梯度,把基于梯度的图像扩散变分模型从平面图像拓展到了隐式曲面上的图像处理。基于内蕴梯度的变分模型对曲面上的图像进行扩散的同时可有效地保持其边缘,但像平面图像扩散的变分模型一样会在本该光滑的区域产生明显的阶梯效应。为消除阶梯效应,引入内蕴散度建立了基于内蕴梯度和内蕴散度的隐式曲面上图像扩散的变分模型,并以TV(total variation)模型、PM(perona-malik)模型为例对所提出的模型的有效性进行了数值验证,实验结果表明该类模型在保持图像边缘的同时可以有效地抑制阶梯效应。

关键词: 变分水平集; 隐式曲面; 图像去噪; 阶梯效应; 内蕴散度

High-order image diffusion model on implicit surfaces

SUN Jun, PAN Zhenkuan, WEI Weibo, ZHANG Haitao

(College of Information Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071)

Abstract: The classic variational image diffusion models for planar image processing are extended to image diffusion on implicit surfaces using intrinsic image gradients defined based on implicit surfaces and expressed by zero level set functions, which can preserve edges effectively during image diffusion. But the models using only intrinsic gradients of image intensity show staircase effects beyond edges. In order to reduce the staircase effects, a general hybrid variational diffusion model is presented including regularizers based on intrinsic gradients and intrinsic divergence. The TV model and PM model are implemented as examples to validate the formulation in reducing staircase effects.

Keywords: variational level set; implicit surface; image denoising; staircase effect; intrinsic divergence

0 引言

图像去噪是图像处理的重要研究内容。基于变分方法的图像扩散技术成为图像噪声去除的主流方法之一^[1-2]。该类方法首先建立由数据项和光滑项构成的能量泛函,然后通过变分得到图像扩散的偏微分方程,求解所得到的偏微分方程可以得到不同程度噪声去除的新图像。Aubert和Vese^[3]提出了一个图像去噪的非线性扩散通用变分模型,其能量

泛函为

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_0 - u)^2 dx dy + \lambda \int_{\Omega} \varphi(|\nabla u|) dx dy \quad (1)$$

式中 u_0 是观测到的含有噪声的图像, u 是要重构的清晰图像。该类模型能有效地扩散光滑的图像区域,并能保持图像的边缘特征。但该类模型对图像扩散后使得光滑的区域出现阶梯效应。改善阶梯效

基金项目: 教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-05-0601)。

收稿日期: 2009-03-20; 改回日期: 2009-07-28

第一作者简介: 孙军(1982—),男,青岛大学计算机应用专业硕士研究生。主要研究方向为基于偏微分方程的图像处理。

E-mail: sunjun.qd@gmail.com。

应的常用方法是在变分模型中使用基于二阶导数的光滑项。文献[4]中引入形式同 TV (total variation)^[1] 项的基于散度的光滑项:

$$E_s(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \varphi(|\Delta \mathbf{u}|) dx dy \quad (2)$$

文献[5]则提出如下基于一阶导数和二阶导数的混合模型:

$$E_s(u) = \int_{\Omega} \left(\alpha |\nabla \mathbf{u}| + \beta \frac{\mathfrak{S}(\mathbf{u})^2}{|\nabla \mathbf{u}|^3} \right) dx dy \quad (3)$$

式中, $\mathfrak{S}(u)$ 为椭圆算子, 文献[5]选 $\mathfrak{S}(\mathbf{u}) = |\Delta \mathbf{u}|$ 。对相同的问题, 文献[6]提出了基于梯度和二阶导数的混合模型:

$$E_s(u) = \int_{\Omega} ((1-g)|\nabla \mathbf{u}| + g|\nabla^2 \mathbf{u}|) dx dy \quad (4)$$

式中, $g = \frac{1}{1 + \gamma |\nabla \mathbf{G}_\sigma * \mathbf{u}_0|}$ 为边缘检测函数。

文献[7]给出了包含图像强度的一阶和二阶导数的通用能量泛函:

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)^2 dx dy + \int_{\Omega} [\lambda_1 (1 - \beta) \varphi_1(|\nabla \mathbf{u}|) + \lambda_2 \beta \varphi_2(|\Delta \mathbf{u}|)] dx dy \quad (5)$$

该类模型可以很好的解决单纯基于一阶导数的变分扩散模型在平面图像去噪中产生阶梯效应的问题。

为了将平面图像的扩散模型推广到隐式曲面上图像扩散, Cheng^[8] 引入了曲面上内蕴梯度算子 ∇_s 的概念, 并成为后续研究隐式曲面上图像处理的基础^[9]。文献[8]把平面图像处理模型中的梯度算子 ∇ 用曲面上内蕴梯度算子 ∇_s 替换, 便得到曲面上图像扩散的变分模型

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)^2 dS + \lambda \int_S \varphi(|\nabla_s \mathbf{u}|) dS \quad (6)$$

文献[10]中采用变分方法推导出隐式曲面上图像扩散方程的通用表达形式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{|\nabla \psi|} \nabla \cdot \left(\frac{\varphi' P_{\nabla \psi} \nabla \mathbf{u} |\nabla \psi|}{|P_{\nabla \psi} \nabla \mathbf{u}|} \right) \quad (7)$$

该模型能够在曲面图像扩散的同时有效地保持其边缘, 但是同平面去噪的一阶模型一样, 该模型去噪后在梯度光滑变化的区域会产生明显的阶梯效应。本文拟参考平面图像去噪中利用散度光滑项可以抑制阶梯效应的特性, 研究隐式曲面上的基于内蕴散度的扩散形式, 以解决曲面去噪过程中产生的阶梯效应。

1 隐式曲面上的图像扩散

1.1 基于内蕴梯度的隐式曲面图像扩散

首先定义投影算子: 假设 \mathbf{v} 是一个 3 维空间中的矢量, 定义算子 $P_{\mathbf{v}} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}$, 其实际产生的效果是将被作用的矢量投影到一个垂直于矢量 \mathbf{v} 的平面上。用零水平集函数 ψ 表示 3 维空间中的曲面 S , 若 $\mathbf{v} = \nabla \psi$, 则在 x 处, $P_{\nabla \psi}$ 可以将 3 维欧氏空间中的向量投影到隐式曲面上该点处的切平面上。因此, $\nabla_s \mathbf{u} = P_{\nabla \psi} \nabla \mathbf{u}$ 为曲面 S 上函数 u 的内蕴梯度。

基于内蕴梯度的隐式曲面上图像扩散能量泛函可定义为

$$E(u) = E_1(u) + \lambda E_2(u) \quad (8)$$

式中 $E_1(u)$ 表示数据项, $E_2(u)$ 表示光滑项, 分别为

$$E_1(u) = \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)^2 dS = \frac{1}{2} \int_{\Omega \in \mathbb{R}^3} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)^2 \delta(\psi) |\nabla \psi| dx dy dz \quad (9)$$

$$E_2(u) = \int_S \varphi(|\nabla_s \mathbf{u}|) dS = \int_{\Omega \in \mathbb{R}^3} \varphi(|\nabla_s \mathbf{u}|) \delta(\psi) |\nabla \psi| dx dy dz \quad (10)$$

对式(8)进行变分, 其中

$$\frac{\partial E_1(\mathbf{u} + \varepsilon \eta)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) |\nabla \psi| \delta(\psi) \eta d\mathbf{X} = \int_{S=|\psi=0} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \eta dS \quad (11)$$

$$\frac{\partial E_2(\mathbf{u} + \varepsilon \eta)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = - \int_{S=|\psi=0} \frac{1}{|\nabla \psi|} \times \nabla \cdot \left(\frac{\varphi' P_{\nabla \psi} \nabla \mathbf{u}}{|P_{\nabla \psi} \nabla \mathbf{u}|} |\nabla \psi| \right) \eta dS + \int_{\partial \Omega} \frac{\varphi' |\nabla \psi| \delta(\psi)}{|P_{\nabla \psi} \nabla \mathbf{u}|} P_{\nabla \psi} \nabla \mathbf{u} \eta dS \quad (12)$$

可得

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{u}} = \int_S \left((\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) - \frac{\lambda}{|\nabla \psi|} \nabla \cdot \left(\frac{\varphi' P_{\nabla \psi} \nabla \mathbf{u} |\nabla \psi|}{|P_{\nabla \psi} \nabla \mathbf{u}|} \right) \right) \eta dS \quad (13)$$

求其极值可以得到隐式曲面上图像扩散模型对应扩散方程的通用表达形式为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{|\nabla \psi|} \nabla \cdot \left(\frac{\varphi' P_{\nabla \psi} \nabla \mathbf{u} |\nabla \psi|}{|P_{\nabla \psi} \nabla \mathbf{u}|} \right) \quad (14)$$

1.2 基于内蕴散度的隐式曲面上图像扩散

以曲面上的内蕴梯度为基础可定义该曲面上的

内蕴散度为

$$\Delta_S u = \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |)}{| \nabla\psi |} \quad (15)$$

则基于内蕴散度的隐式曲面上图像扩散的能量泛函可定义为

$$E(u) = E_1(u) + \lambda E_3(u) \quad (16)$$

式中

$$E_3(u) = \int_S \varphi_2(|\Delta_S u|) dS = \int_{\Omega} \varphi_2 \left(\left| \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |)}{| \nabla\psi |} \right| \right) | \nabla\psi | \delta(\psi) dX \quad (17)$$

对式(16)变分得

$$\frac{\partial E(u + \varepsilon\eta)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial E_1(u + \varepsilon\eta)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \lambda \frac{\partial E_3(u + \varepsilon\eta)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_3(u + \varepsilon\eta)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{\Omega} \varphi_2' \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left| \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |)}{| \nabla\psi |} \right| + \\ &\varepsilon \nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla \eta | \nabla\psi |) \Big|_{\varepsilon=0} \delta(\psi) dX = \\ &\int_{\Omega} \varphi_2' \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) \nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla \eta | \nabla\psi |)}{| \nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) |} \cdot \\ &\delta(\psi) dX = - \int_{\Omega} \nabla \left(\varphi_2' \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |)}{| \nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) |} \delta(\psi) \right) \cdot \\ &(P_{\nabla\psi} \nabla \eta | \nabla\psi |) dX + \int_{\partial\Omega} \varphi_2' | \nabla\psi | \delta(\psi) \cdot \\ &\frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) \cdot n}{| \nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) |} P_{\nabla\psi} \nabla \eta dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \\ &\left(P_{\nabla\psi} \left(| \nabla\psi | \nabla \left(\varphi_2' \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |)}{| \nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) |} \delta(\psi) \right) \right) \right) \eta dX - \\ &\int_{\partial\Omega} P_{\nabla\psi} \left(| \nabla\psi | \nabla \left(\varphi_2' \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |)}{| \nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) |} \delta(\psi) \right) \right) \cdot \\ &n \eta dS + \int_{\partial\Omega} \varphi_2' | \nabla\psi | \delta(\psi) \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) \cdot n}{| \nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) |} \cdot \\ &P_{\nabla\psi} \nabla \eta dS \end{aligned} \quad (19)$$

式中,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(P_{\nabla\psi} \left(| \nabla\psi | \nabla \left(\varphi_2' \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |)}{| \nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) |} \delta(\psi) \right) \right) \right) &= \\ \frac{1}{| \nabla\psi |} \nabla \cdot \left(| \nabla\psi | P_{\nabla\psi} \left(\nabla \left(\varphi_2' \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |)}{| \nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) |} \right) \right) \right) &= \\ | \nabla\psi | \delta(\psi) \end{aligned} \quad (20)$$

从而,式(19)可表示为

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_3(u + \varepsilon\eta)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{\Omega} \frac{1}{| \nabla\psi |} \nabla \cdot \\ &\left(| \nabla\psi | P_{\nabla\psi} \left(\nabla \left(\varphi_2' \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |)}{| \nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) |} \right) \right) \right) \cdot \\ &| \nabla\psi | \delta(\psi) \eta dX - \int_{\partial\Omega} P_{\nabla\psi} \cdot \\ &\left(| \nabla\psi | \nabla \left(\varphi_2' \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |)}{| \nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) |} \delta(\psi) \right) \right) \cdot \\ &\eta dS + \int_{\partial\Omega} \varphi_2' | \nabla\psi | \delta(\psi) \cdot \\ &\frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) \cdot n}{| \nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) |} P_{\nabla\psi} \nabla \eta dS \end{aligned} \quad (21)$$

结合式(11)(21)可得如下扩散方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= - \frac{1}{| \nabla\psi |} \nabla \cdot \\ &\left(| \nabla\psi | P_{\nabla\psi} \left(\nabla \left(\varphi_2' \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |)}{| \nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) |} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

对应平面图像处理中的 TV 模型中的光滑项 $\varphi_1(|\Delta u|) = |\Delta u|$ 有

$$\varphi_2 \left(\left| \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |)}{| \nabla\psi |} \right| \right) = \left| \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |)}{| \nabla\psi |} \right| \quad (23)$$

对应平面图像处理中的 PM (Perona-Malik) 模型^[2]

中的光滑项 $\varphi(|\Delta u|) = \mu^2 \ln \left(1 + \frac{|\Delta u|^2}{\mu^2} \right)$ 有

$$\begin{aligned} \varphi_2 \left(\left| \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |)}{| \nabla\psi |} \right| \right) &= \\ \mu^2 \ln \left(1 + \frac{\left| \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |)}{| \nabla\psi |} \right|^2}{\mu^2} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

1.3 基于混合模型的曲面图像扩散

基于内蕴梯度和内蕴散度的混合扩散模型的能量泛函如下:

$$E(u) = \alpha_1 E_1(u) + \alpha_2 E_2(u) + \lambda E_3(u) \quad (25)$$

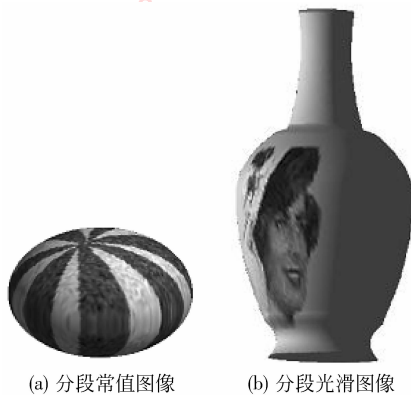
综上可得如下图像扩散方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\alpha_1}{| \nabla\psi |} \nabla \cdot \left(\frac{\varphi_1' P_{\nabla\psi} \nabla u}{| P_{\nabla\psi} \nabla u |} | \nabla\psi | \right) - \frac{\alpha_2}{| \nabla\psi |} \nabla \cdot \\ &\left(| \nabla\psi | P_{\nabla\psi} \left(\nabla \left(\varphi_2' \frac{\nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |)}{| \nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla u | \nabla\psi |) |} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (26)$$

2 数值验证及分析

实验均在 PC 机 (Intel(R), CPU 2.33GHz, 内存 2.00GB) Matlab7.0 环境下完成。为验证本文模型

对隐式曲面上图像的去噪效果,对图 1 所示两幅由水平集函数所表达的球面上含噪声图像进行实验。



(a) 分段常值图像 (b) 分段光滑图像

图 1 含噪声图像

Fig. 1 Image with noise

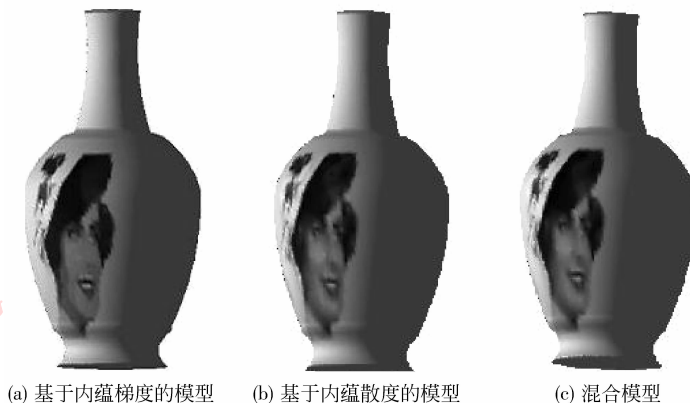
图 2 是采用 TV 模型对图 1(a) 进行处理的结果,参数 $\Delta t = 0.15$,其中(a)为采用基于内蕴梯度的 TV 模型处理结果,迭代次数为 70 次,所用 CPU 时间为 497.67 s;(b)为采用基于内蕴散度的 TV 模型处理结果,迭代次数为 50 次,所用 CPU 时间为 425.21 s;(c)为采用基于内蕴梯度和内蕴散度的混合模型,迭代次数为 70 次, $\alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.2$,所用 CPU 时间为 714.27 s。



(a) 基于内蕴梯度的模型 (b) 基于内蕴散度的模型 (c) 混合模型

图 2 分段常值图像的 TV 模型扩散效果

Fig. 2 Piecewise constant image diffusion using TV model



(a) 基于内蕴梯度的模型 (b) 基于内蕴散度的模型 (c) 混合模型

图 3 分段光滑图像的 TV 模型扩散效果

Fig. 3 Piecewise smooth image diffusion using TV model

图 3 是采用 TV 模型对图 1(b) 进行处理的结果,参数均为 $\Delta t = 0.15$,迭代次数为 80 次,其中(a)为采用基于内蕴梯度的 TV 模型处理结果,所用 CPU 时间为 568.45 s;(b)为采用基于内蕴散度的 TV 模型处理结果,所用 CPU 时间为 680.40 s;(c)为采用基于内蕴梯度和内蕴散度的混合模型, $\alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.2$,所用 CPU 时间为 816.33 s。

图 4 是采用 PM 模型对图 1(b) 进行处理的结果,参数均为 $\Delta t = 0.15, \mu = 5$,迭代次数为 80 次,其中(a)为采用基于内蕴梯度的 PM 模型处理结果,所用 CPU 时间为 503.18 s;(b)为采用基于内蕴散度的 PM 模型处理结果,所用 CPU 时间为 610.39 s;(c)为采用基于内蕴梯度和内蕴散度的混合模型, $\alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.2$,所用 CPU 时间为 736.78 s。

由以上实验结果可以看出:基于内蕴梯度的扩散模型,对于分段常值区域有较好的去噪效果,但是在图像光滑变化区域产生明显阶梯效应;基于内蕴散度的扩散方法可以有效消除阶梯效应,但在某些边缘及脚点处出现亮点,这是由于基于内蕴散度的模型不仅对图像进行二阶向前、向后扩散,亦进行一阶向前和向后扩散;通过将内蕴梯度和内蕴散度模型按不同权重相加而产生的混合模型可以很好的消除亮点。

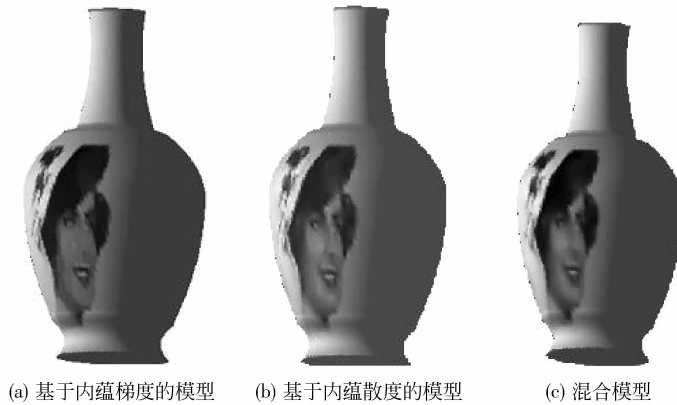


图 4 分段光滑图像的 PM 模型扩散效果

Fig. 4 Piecewise smooth image diffusion using PM model

3 结 论

研究了现有的基于内蕴梯度的隐式曲面上图像去噪的变分水平集方法,并通过实验观测到该类模型所表现出的阶梯效应。参照基于二阶导数的平面图像变分扩散模型,提出了基于内蕴散度光滑项的隐式曲面上图像扩散的变分模型以及基于内蕴梯度光滑项和内蕴散度光滑项的混合扩散模型,并通过多个数值实验验证了该类模型能够在去噪的同时有效地保持图像的边缘特征,并且能较好地消除阶梯效应。但该类模型同传统平面图像扩散的高阶模型一样存在细节纹理丢失的问题。该类问题可采用基于非局部扩散的方法进行改进,其效果有待进一步验证。

由于基于内蕴散度模型中高阶导数的出现,其数值离散差分的复杂度远高于基于内蕴梯度的模型,故基于内蕴散度的扩散模型运算所需时间要长于基于内蕴梯度的扩散模型,而混合模型要实现上述两类模型的相关运算,故其算法的复杂度最高,运算时间最长。如何通过算子分裂等方法对模型化简并提高运算速度也是一个需要进一步研究的问题。

参考文献 (References)

[1] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physical D, 1992, 60:259-268.

[2] Perona P, Malik J. Scale-Space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7):629-639.

[3] Aubert G, Vese L. A variational method in image recovery[J]. SIAM Journal of Numerical Analysis, 1997, 34(5):1948-1979.

[4] Chan T F, Esedoglu S, Park F. Image Decomposition Combining Staircase Reduction and Texture Extraction [R]. Report 05-18. Los Angeles: UCLA, 2005.

[5] Chan T F, Marquina A, Mulet P. High-order total variation-based image restoration [J]. SIAM J. Sci. Comput, 2000, 22(2): 503-516.

[6] Li F, Shen C, Fang J, et al. Image restoration combining a total variational filter and a fourth-order filter [J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2007,18: 322-330.

[7] Pan Zhenkuan, Wei Weibo. Variational models for image diffusion based on gradient and laplacian [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2008,43(11):11-16,21. [潘振宽,魏伟波. 基于梯度和拉普拉斯算子的图像扩散变分模型[J]. 山东大学学报理学版,2008,43(11):11-16,21.]

[8] Cheng Litien. The Level Set Method Applied to Geometrically Based Motion, Materials Science, and Image Processing[D]. Los Angeles:UCLA, 2000.

[9] Wu Chunlin. Image Processing on Implicit Surfaces Based on PDE Method [D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2006. [吴春林,基于 PDE 的隐式曲面上的图像处理[D]. 合肥:中国科学技术大学,2006.]

[10] Zhang Haitao, Pan Zhenkuan. Image diffusion on implicit surfaces based on variational level set method[J]. Journal of Computer Applications,2008,28(supp.):158-160. [张海涛,潘振宽. 隐式曲面上图像扩散的变分水平集方法[J]. 计算机应用,2008,28(增刊):158-160.]