

中图法分类号: TP301.6 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2011)01-0118-06

论文索引信息: 梁锡坤. 基于曲线线性组合的3次均匀B样条曲线的拓展[J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(1): 118-123

# 基于曲线线性组合的3次均匀B样条曲线的拓展

梁锡坤

(杭州师范大学国际服务工程学院, 杭州 310012)

**摘要:** 为了丰富和发展B样条曲线理论, 利用曲线线性组合的思想, 将3次均匀B样条曲线进行了拓展, 并讨论了拓展曲线的性质。研究表明, 拓展曲线的基具有较简单的表达式; 拓展曲线包含了原曲线的基本形式, 比原曲线具有更强的描述能力, 且保持曲线次数不变。利用曲线的形状因子可以调整曲线的局部形状; 同时得到了一种闭曲线表示的新途径。

**关键词:** 曲线; 线性组合; B样条; 形状因子; 拓展

## Extension of the cubic uniform B-spline curve based on the linear combination of curves

Liang Xikun

(International Institute of Service Engineering, Hangzhou Normal University, Hangzhou 310012 China)

**Abstract:** In order to develop the theory of B-spline curve, the representation of cubic uniform B-spline curve is extended to a general form based on linear combination of curves. Moreover, some properties of the extended curve are discussed in details. The research shows that the basis of the generalized curve is relative simple, and the extended curve includes the original B-spline curve and shows much better shape-control capability than the original curve. Meanwhile, the extended curve keeps the same degree of original one. It is easy to find that the curve can be reshape by adjusting the shape factor. Also, a new method of the representation of closed curve is given.

**Keywords:** curves; linear combination; B-spline; shape factor; extension

## 0 引言

在CAGD中, 3次均匀B样条曲线被广泛应用, 因为它具有形状简单, 光滑连接和局部性质等优点。但是, 由于曲线由给定的控制多边形唯一确定, 曲线设计调整的灵活性不足。于是人们发展了NURBS方法, 以提高曲线的描述效率, 增强曲线的局部修改和控制曲线形状的能力。但作为有理表达式, NURBS本身具有计算复杂的不足, 同时权因子和参

数化的问题尚未完全解决<sup>[1]</sup>。有鉴于此, 国内外不少学者探索了多种曲线拓展能力的方法, 并提出了一些带形状参数的样条模型<sup>[2-14]</sup>。其中比较典型的有均匀3次Beta样条<sup>[2]</sup>、C-B样条<sup>[3-4]</sup>、带形状参数的均匀B样条<sup>[5]</sup>、带形状参数的双曲多项式均匀B样条<sup>[6]</sup>、带形状参数的三角多项式均匀B样条<sup>[7]</sup>, 有些理论业已在实体造型中取得了一定的应用。这里, 通过曲线线性组合的方法, 设计了一种新型的3次均匀B样条曲线的拓展形式, 由于使用多项式型的基函数, 它的表达式较为简单, 且拓展曲

收稿日期: 2009-06-15; 修回日期: 2009-08-10

第一作者简介: 梁锡坤(1968—), 男, 副教授, 硕士生导师。2003年于合肥工业大学获得计算机应用专业博士学位, 主要研究方向为计算机辅助几何设计、数值逼近、算法设计与分析。E-mail: schenken@163.com。

线和原始曲线次数相同。拓展曲线具有一定的曲线设计和形状控制能力,而且提供了一种闭曲线表示的新方法。

### 1 3 次均匀 B 样条曲线的拓展

设 3 次均匀 B 样条基函数为

$$B_{3,0}(u), B_{3,1}(u), B_{3,2}(u), B_{3,3}(u) \quad u \in [0, 1]$$

控制顶点序列为

$V_{j-m}, \dots, V_{j-1}, V_j, V_{j+1}, V_{j+2}, V_{j+3}, \dots, V_{j+n}; j, m, n \in N$ , 则一段 3 次均匀 B 样条曲线可以表示为

$$P_3(u) = \sum_{i=0}^3 V_{j+i} \cdot B_{3,i}(u)$$

其中

$$B_{3,0}(u) = (1 - u)^3/6$$

$$B_{3,1}(u) = u^3/2 - u^2 + 2/3$$

$$B_{3,2}(u) = -u^3/2 + u^2/2 + u/2 + 1/6$$

$$B_{3,3}(u) = u^3/6$$

定义 若引入记号

$$P_{3,0}(u) = \sum_{i=0}^3 V_{j+i} \cdot B_{3,i}(u)$$

$$\bar{P}_{3,0}(u) = V_{j+1} \cdot B_{3,0}(u) + V_{j+2} \cdot B_{3,1}(u) + V_{j+3} \cdot B_{3,2}(u) + V_j \cdot B_{3,3}(u)$$

则有

$$\bar{P}_{3,0}(\lambda, u) = \lambda P_{3,0}(u) + (1 - \lambda)\bar{P}_{3,0}(u) \quad (1)$$

称由式(1)定义的曲线为基于曲线线性组合的 3 次均匀 B 样条曲线的拓展,并称组合系数  $\lambda$  为拓展曲线的形状因子。

很显然,

$$\text{当 } \lambda = 1 \text{ 时, } \bar{P}_{3,0}(\lambda, u) = P_{3,0}(u);$$

$$\text{当 } \lambda = 0 \text{ 时, } \bar{P}_{3,0}(\lambda, u) = \bar{P}_{3,0}(u);$$

而当  $0 < \lambda < 1$  时,曲线  $\bar{P}_{3,0}(\lambda, u)$  是基于原始 3 次均匀 B 样条曲线  $P_{3,0}(u)$  和  $\bar{P}_{3,0}(u)$  与参数  $\lambda$  的值相关的 3 次均匀 B 样条曲线的组合形式。通过调整形状因子  $\lambda$  的值即可改变曲线  $\bar{P}_{3,0}(\lambda, u)$  的形状及位置。

完全类似地,可以定义形如(1)式的另外 3 条拓展的 B 样条曲线如下

$$\bar{P}_{3,1}(\lambda, u) = \lambda P_{3,1}(u) + (1 - \lambda)\bar{P}_{3,1}(u) \quad (2)$$

$$\bar{P}_{3,2}(\lambda, u) = \lambda P_{3,2}(u) + (1 - \lambda)\bar{P}_{3,2}(u) \quad (3)$$

$$\bar{P}_{3,3}(\lambda, u) = \lambda P_{3,3}(u) + (1 - \lambda)\bar{P}_{3,3}(u) \quad (4)$$

式中

$$P_{3,1}(u) = \bar{P}_{3,0}(u) = V_{j+1} \cdot B_{3,0}(u) +$$

$$V_{j+2} \cdot B_{3,1}(u) + V_{j+3} \cdot B_{3,2}(u) + V_j \cdot B_{3,3}(u)$$

$$P_{3,2}(u) = \bar{P}_{3,1}(u) = V_{j+2} \cdot B_{3,0}(u) +$$

$$V_{j+3} \cdot B_{3,1}(u) + V_j \cdot B_{3,2}(u) + V_{j+1} \cdot B_{3,3}(u)$$

$$P_{3,3}(u) = \bar{P}_{3,2}(u) = V_{j+3} \cdot B_{3,0}(u) +$$

$$V_j \cdot B_{3,1}(u) + V_{j+1} \cdot B_{3,2}(u) + V_{j+2} \cdot B_{3,3}(u)$$

$$\bar{P}_{3,3}(u) = P_{3,0}(u) = V_j \cdot B_{3,0}(u) +$$

$$V_{j+1} \cdot B_{3,1}(u) + V_{j+2} \cdot B_{3,2}(u) + V_{j+3} \cdot B_{3,3}(u)$$

### 2 拓展曲线的基表示

根据式(1)

$$\begin{aligned} \bar{P}_{3,0}(\lambda, u) &= \lambda P_{3,0}(u) + (1 - \lambda)\bar{P}_{3,0}(u) = \\ &= \lambda B_{3,0}(u)V_j + \lambda B_{3,1}(u)V_{j+1} + \\ &= \lambda B_{3,2}(u)V_{j+2} + \lambda B_{3,3}(u)V_{j+3} + \\ &= (1 - \lambda)B_{3,3}(u)V_j + (1 - \lambda)B_{3,0}(u)V_{j+1} + \\ &= (1 - \lambda)B_{3,1}(u)V_{j+2} + (1 - \lambda)B_{3,2}(u)V_{j+3} = \\ &= (\lambda B_{3,0}(u) + (1 - \lambda)B_{3,3}(u))V_j + \\ &= (\lambda B_{3,1}(u) + (1 - \lambda)B_{3,0}(u))V_{j+1} + \\ &= (\lambda B_{3,2}(u) + (1 - \lambda)B_{3,1}(u))V_{j+2} + \\ &= (\lambda B_{3,3}(u) + (1 - \lambda)B_{3,2}(u))V_{j+3} \end{aligned}$$

若记

$$\begin{cases} D_{3,0}(\lambda, u) = \lambda B_{3,0}(u) + (1 - \lambda)B_{3,3}(u) \\ D_{3,1}(\lambda, u) = \lambda B_{3,1}(u) + (1 - \lambda)B_{3,0}(u) \\ D_{3,2}(\lambda, u) = \lambda B_{3,2}(u) + (1 - \lambda)B_{3,1}(u) \\ D_{3,3}(\lambda, u) = \lambda B_{3,3}(u) + (1 - \lambda)B_{3,2}(u) \end{cases} \quad (5)$$

易证明,  $D_{3,i}(\lambda, u), i=0, 1, 2, 3$  线性无关, 而且有

$$\sum_{i=0}^3 D_{3,i}(\lambda, u) = 1 \quad (6)$$

称由式(5)(6)定义  $D_{3,i}(\lambda, u), i=0, 1, 2, 3$  为拓展的 3 次 B 样条曲线的基函数。当  $0 \leq \lambda \leq 1$  时, 有  $0 \leq D_{3,i}(\lambda, u) \leq 1$ , 因此拓展曲线的基函数具有正性和权性。

此时,拓展的 3 次 B 样条曲线可以用基函数表示为如下形式

$$\bar{P}_{3,0}(\lambda, u) = \sum_{i=0}^3 D_{3,i}(\lambda, u)V_{j+i} \quad (7)$$

式中  $D_{3,i}(\lambda, u)$  的展开式为

$$\begin{aligned} D_{3,0}(\lambda, u) &= (1/6 - \lambda/3)u^3 + \\ &= \lambda u^2/2 - \lambda u/2 + \lambda/6 \end{aligned}$$

$$D_{3,1}(\lambda, u) = (-1/6 + 2\lambda/3)u^3 + (1/2 - 3\lambda/2)u^2 + (-1/2 + \lambda/2)u + (1/6 + \lambda/2)$$

$$D_{3,2}(\lambda, u) = (1/2 - \lambda)u^3 + (-1 + 3\lambda/2)u^2 + \lambda u/2 + (2/3 - \lambda/2)$$

$$D_{3,3}(\lambda, u) = (-1/2 + 2\lambda/3)u^3 + (1/2 - \lambda/2)u^2 + (1/2 - \lambda/2)u + (1/6 - \lambda/6)$$

同理,另外 3 条拓展的 B 样条曲线可以用基函数表示为

$$\tilde{P}_{3,1}(\lambda, u) = \sum_{i=0}^3 R_{3,i}(\lambda, u) V_{j+i} \quad (8)$$

$$\tilde{P}_{3,2}(\lambda, u) = \sum_{i=0}^3 M_{3,i}(\lambda, u) V_{j+i} \quad (9)$$

$$\tilde{P}_{3,3}(\lambda, u) = \sum_{i=0}^3 N_{3,i}(\lambda, u) V_{j+i} \quad (10)$$

其中

$$\begin{cases} R_{3,0}(\lambda, u) = D_{3,3}(\lambda, u) \\ R_{3,1}(\lambda, u) = D_{3,0}(\lambda, u) \\ R_{3,2}(\lambda, u) = D_{3,1}(\lambda, u) \\ R_{3,3}(\lambda, u) = D_{3,2}(\lambda, u) \\ M_{3,0}(\lambda, u) = D_{3,2}(\lambda, u) \\ M_{3,1}(\lambda, u) = D_{3,3}(\lambda, u) \\ M_{3,2}(\lambda, u) = D_{3,0}(\lambda, u) \\ M_{3,3}(\lambda, u) = D_{3,1}(\lambda, u) \\ N_{3,0}(\lambda, u) = D_{3,1}(\lambda, u) \\ N_{3,1}(\lambda, u) = D_{3,2}(\lambda, u) \\ N_{3,2}(\lambda, u) = D_{3,3}(\lambda, u) \\ N_{3,3}(\lambda, u) = D_{3,0}(\lambda, u) \end{cases} \quad (11)$$

### 3 拓展曲线的性质

1) 端点性质(以拓展曲线式(7)为例)

$$\tilde{P}_{3,0}(\lambda, 0) = \lambda(V_j + 3V_{j+1} - 3V_{j+2} - V_{j+3})/6 + (V_{j+1} + 4V_{j+2} + V_{j+3})/6$$

$$\tilde{P}_{3,0}(\lambda, 1) = \lambda(-V_j + V_{j+1} + 3V_{j+2} - 3V_{j+3})/6 + (V_j + V_{j+2} + 4V_{j+3})/6$$

$$\tilde{P}'_{3,0}(\lambda, 0) = \lambda(-V_j - V_{j+1} + V_{j+2} + V_{j+3})/2 + (V_j - V_{j+2})/2$$

$$\tilde{P}'_{3,0}(\lambda, 1) = \lambda(-V_j + V_{j+1} + V_{j+2} - V_{j+3})/2 + (-V_{j+1} + V_{j+3})/2$$

$$\tilde{P}''_{3,0}(\lambda, 0) = \lambda(V_j - 3V_{j+1} + 3V_{j+2} - V_{j+3}) + (V_{j+1} - 2V_{j+2} + V_{j+3})$$

$$\tilde{P}''_{3,0}(\lambda, 1) = \lambda(-V_j + V_{j+1} - 3V_{j+2} + 3V_{j+3}) + (V_j + V_{j+2} - 2V_{j+3})$$

2) 对于同一控制多边形,同一参数  $\lambda$  的值,  $\tilde{P}_{3,0}(\lambda, u), \tilde{P}_{3,1}(\lambda, u), \tilde{P}_{3,2}(\lambda, u), \tilde{P}_{3,3}(\lambda, u)$  构成任意阶光滑的封闭曲线。

证明: 据式(7)一(11)可得:

$$\tilde{P}_{3,0}(\lambda, 1) = \tilde{P}_{3,1}(\lambda, 0), \tilde{P}_{3,1}(\lambda, 1) = \tilde{P}_{3,2}(\lambda, 0)$$

$$\tilde{P}_{3,2}(\lambda, 1) = \tilde{P}_{3,3}(\lambda, 0), \tilde{P}_{3,3}(\lambda, 1) = \tilde{P}_{3,0}(\lambda, 0)$$

$$\tilde{P}'_{3,0}(\lambda, 1) = \tilde{P}'_{3,1}(\lambda, 0), \tilde{P}'_{3,1}(\lambda, 1) = \tilde{P}'_{3,2}(\lambda, 0)$$

$$\tilde{P}'_{3,2}(\lambda, 1) = \tilde{P}'_{3,3}(\lambda, 0), \tilde{P}'_{3,3}(\lambda, 1) = \tilde{P}'_{3,0}(\lambda, 0)$$

$$\tilde{P}''_{3,0}(\lambda, 1) = \tilde{P}''_{3,1}(\lambda, 0), \tilde{P}''_{3,1}(\lambda, 1) = \tilde{P}''_{3,2}(\lambda, 0)$$

$$\tilde{P}''_{3,2}(\lambda, 1) = \tilde{P}''_{3,3}(\lambda, 0), \tilde{P}''_{3,3}(\lambda, 1) = \tilde{P}''_{3,0}(\lambda, 0)$$

...

$$\tilde{P}_{3,0}^{(n)}(\lambda, 1) = \tilde{P}_{3,1}^{(n)}(\lambda, 0), \tilde{P}_{3,1}^{(n)}(\lambda, 1) = \tilde{P}_{3,2}^{(n)}(\lambda, 0)$$

$$\tilde{P}_{3,2}^{(n)}(\lambda, 1) = \tilde{P}_{3,3}^{(n)}(\lambda, 0), \tilde{P}_{3,3}^{(n)}(\lambda, 1) = \tilde{P}_{3,0}^{(n)}(\lambda, 0)$$

证毕

3) 拓展的 B 样条曲线具有在仿射变换下的几何不变性。

该性质由拓展的 B 样条曲线可以表示为规范基得到,同时它在参数仿射变换下也是不变的。

4) 拓展的 B 样条曲线具有凸包性。

由式(6)可知,当  $0 \leq \lambda \leq 1$  时,拓展的 B 样条基具有权性,这样曲线具有凸包性。即第  $j$  段拓展的 B 样条曲线位于  $V_j, V_{j+1}, V_{j+2}, V_{j+3}$  形成的凸包中,而整条拓展曲线则在由全体控制顶点形成的凸包中。

5) 若记由

$\tilde{P}_{3,0}(0, u), \tilde{P}_{3,1}(0, u), \tilde{P}_{3,2}(0, u), \tilde{P}_{3,3}(0, u)$  形成的闭曲线为  $P(0, u)$ , 而以  $P(1, u)$  表示由  $\tilde{P}_{3,0}(1, u), \tilde{P}_{3,1}(1, u), \tilde{P}_{3,2}(1, u), \tilde{P}_{3,3}(1, u)$  形成的闭曲线,则  $P(0, u) = P(1, u)$ , 这一点可以从式(1)一(4)得到证明。

6) 拓展的 B 样条曲线具有局部性。如果改变一个控制顶点  $V_j$  的值,则只影响它附近的 4 条曲线段的形状,而改变形状因子  $\lambda$  的值,只影响一段曲线的形状。

### 4 拓展曲线举例

给定控制顶点  $V_j = (1, 1), V_{j+1} = (2, 3), V_{j+2} =$

(3,3),  $V_{j+3} = (4,1)$ , 以下讨论形状因子  $\lambda$  在各种取值的情形下所表示的曲线。

4.1 开曲线的情形

- 1)  $\lambda = 0, 0.2, 0.5, 1$  时, 开曲线段  $\bar{P}_{3,0}(0, u)$ ,  $\bar{P}_{3,0}(0.2, u)$ ,  $\bar{P}_{3,0}(0.5, u)$ ,  $\bar{P}_{3,0}(1, u)$ , 如图 1;
- 2)  $\lambda = 0, 0.2, 0.5, 1$  时, 开曲线段  $\bar{P}_{3,1}(0, u)$ ,  $\bar{P}_{3,1}(0.2, u)$ ,  $\bar{P}_{3,1}(0.5, u)$ ,  $\bar{P}_{3,1}(1, u)$ , 如图 2;
- 3)  $\lambda = 0, 0.2, 0.5, 1$  时, 开曲线段  $\bar{P}_{3,2}(0, u)$ ,  $\bar{P}_{3,2}(0.2, u)$ ,  $\bar{P}_{3,2}(0.5, u)$ ,  $\bar{P}_{3,2}(1, u)$ , 如图 3;
- 4)  $\lambda = 0, 0.2, 0.5, 1$  时, 开曲线段  $\bar{P}_{3,3}(0, u)$ ,  $\bar{P}_{3,3}(0.2, u)$ ,  $\bar{P}_{3,3}(0.5, u)$ ,  $\bar{P}_{3,3}(1, u)$ , 如图 4。

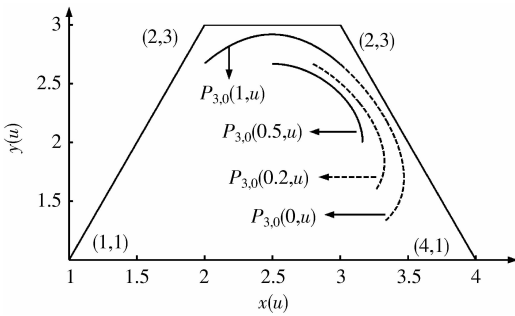


图 1 曲线段  $\bar{P}_{3,0}(\lambda, u)$   
Fig. 1 Curve segments  $\bar{P}_{3,0}(\lambda, u)$

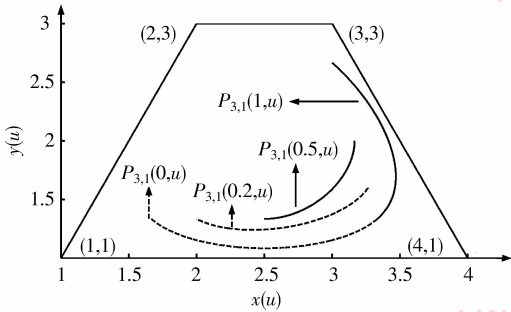


图 2 曲线段  $\bar{P}_{3,1}(\lambda, u)$   
Fig. 2 Curve segments  $\bar{P}_{3,1}(\lambda, u)$

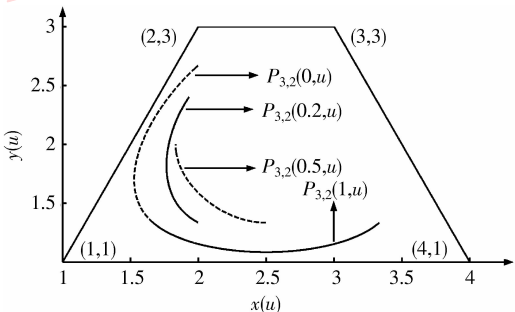


图 3 曲线段  $\bar{P}_{3,2}(\lambda, u)$   
Fig. 3 Curve segments  $\bar{P}_{3,2}(\lambda, u)$

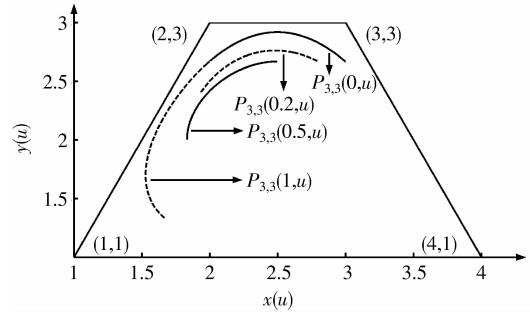


图 4 曲线段  $\bar{P}_{3,3}(\lambda, u)$   
Fig. 4 Curve segments  $\bar{P}_{3,3}(\lambda, u)$

由此可见,通过调整形状因子  $\lambda$  的值,拓展曲线可以表示控制多边形内的不同位置,不同形状的开曲线段。

4.2 闭曲线的情形

- 1)  $\lambda = 0$  时,  $\bar{P}_{3,i}(0, u)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  构成闭曲线  $P(0, u)$ , 如图 5;
- 2)  $\lambda = 0.2$  时,  $\bar{P}_{3,i}(0.2, u)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  构成闭曲线  $P(0.2, u)$ , 如图 6;
- 3)  $\lambda = 0.5$  时,  $\bar{P}_{3,i}(0.5, u)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  构成闭曲线  $P(0.5, u)$ , 如图 7;
- 4)  $\lambda = 1$  时,  $\bar{P}_{3,i}(1, u)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  构成闭曲线  $P(1, u)$ , 如图 5。

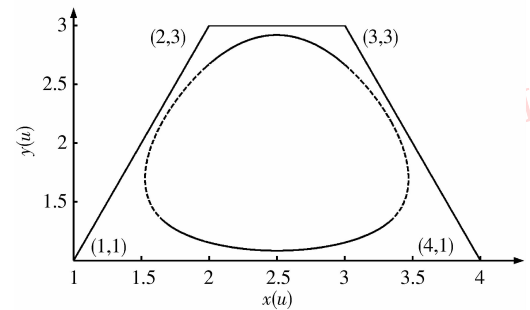


图 5 闭曲线  $P(0, u)$ ,  $P(1, u)$   
Fig. 5 Closed curve  $P(0, u)$ ,  $P(1, u)$

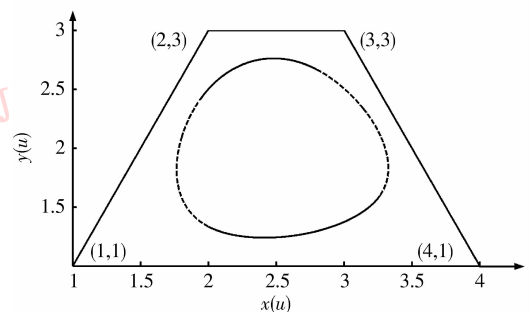


图 6 闭曲线  $P(0.2, u)$   
Fig. 6 Closed curve  $P(0.2, u)$

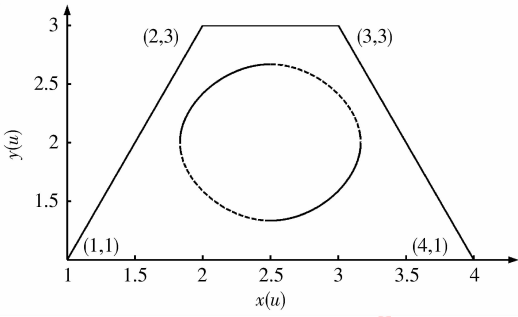


图 7 闭曲线  $P(0.5, u)$   
Fig. 7 Closed curve  $P(0.5, u)$

图 8 为不同参数值的闭曲线组合图形,由此可见,通过调整形状因子  $\lambda$  的值,拓展曲线可以表示控制多边形内的不同位置,不同形状的封闭曲线。

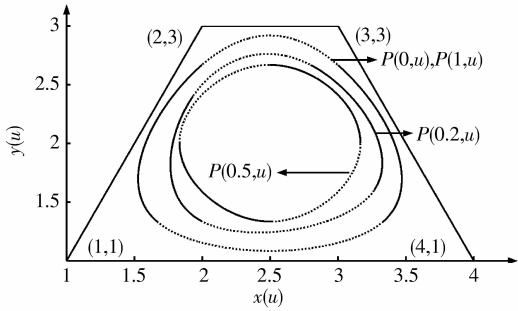


图 8 闭曲线组合图  
Fig. 8 Composed figure of closed curves

4.3 闭曲线的特例(圆和椭圆的近似表示)

尚无理论上的依据表明拓展的 3 次均匀 B 样条曲线可以精确表示 2 次曲线,这里仅给出圆和椭圆的近似表示示例。

给定控制顶点  $V_j = (1, 1), V_{j+1} = (1, 3), V_{j+2} = (3, 3), V_{j+3} = (3, 1)$ , 用上述闭曲线的表示方法容易得到近似圆周曲线,如图 9。

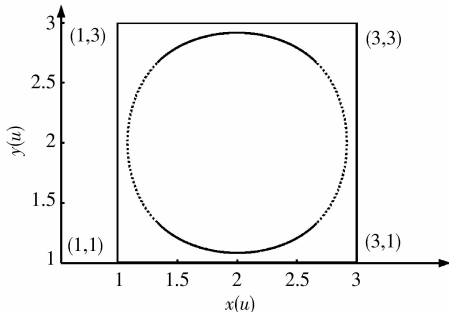


图 9 圆  $P(0, u), P(1, u)$   
Fig. 9 Circle  $P(0, u), P(1, u)$

类似地,给定控制顶点  $V_j = (1, 1), V_{j+1} = (1, 2), V_{j+2} = (3, 2), V_{j+3} = (3, 1)$ , 可得近似椭圆曲线,如图 10。

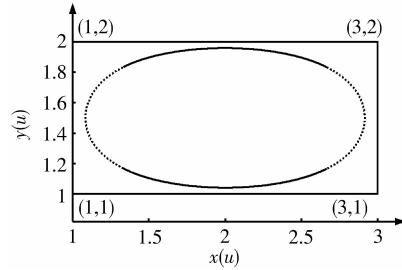


图 10 椭圆  $P(0, u), P(1, u)$   
Fig. 10 Ellipse  $P(0, u), P(1, u)$

5 结 论

基于曲线线性组合的 3 次均匀 B 样条曲线的拓展,包含原有 3 次均匀 B 样条曲线的基本形式,保留了原曲线的大部分性质,同时具有自身的一些特点:其基表达式较为简单,曲线次数保持不变,可以通过调整形状因子的值来改变曲线的局部形状,既能表示开曲线,又能表示闭曲线。总体来看,拓展曲线比原曲线具有更强的曲线设计和形状控制能力。关于形状因子对曲线影响的规律,形状因子的几何解释,拓展曲线在实体造型中的应用等问题,篇幅所限,另文讨论。

参考文献 (References)

[ 1 ] Liu Yonggang, Wang Guozhao, Yang Xunnian. Uniform trigonometric polynomial B-spline curves [J]. Science in China (Series F), 2002, 45 (5) : 335-343.  
 [ 2 ] Brian A Barsky, John C Beatty. Local control of bias and tension in Beta-splines [J]. Computer Graphics, 1983, 17 (3) : 193-218.  
 [ 3 ] Zhang Jiwen. C-curves : An extension of cubic curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1996, 13 (3) : 199-217.  
 [ 4 ] Zhang Jiwen. Two different forms of C-B-splines [J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14 (1) : 31-41.  
 [ 5 ] Wang Wentao, Wang Guozhao. Uniform B-spline with shape parameter [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2004, 16 (6) : 783-788. [王文涛, 汪国昭. 带形状参数的均匀 B 样条[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16 (6) : 783-788.]

- [ 6 ] Wang Wentao, Wang Guozhao. Hyperbolic polynomial uniform B-spline with shape parameter [ J ]. Journal of Software, 2005, 16 ( 4 ) : 625-633. [ 王文涛, 汪国昭. 带形状参数的双曲多项式均匀 B 样条 [ J ]. 软件学报, 2005, 16 ( 4 ) : 625-633. ]
- [ 7 ] Wang Wentao, Wang Guozhao. Trigonometric polynomial uniform B-spline with shape parameter [ J ]. Chinese Journal of Computers, 2005, 28 ( 7 ) : 1192-1198. [ 王文涛, 汪国昭. 带形状参数的三角多项式均匀 B 样条 [ J ]. 计算机学报, 2005, 28 ( 7 ) : 1192-1198. ]
- [ 8 ] Han Xuli, Liu Shengjun. An extension of the cubic uniform B-spline curve [ J ]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2003, 15 ( 5 ) : 576-578. [ 韩旭里, 刘圣军. 三次均匀 B 样条曲线的扩展 [ J ]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15 ( 5 ) : 576-578. ]
- [ 9 ] Han Xuli. Quadratic trigonometric polynomial curves with a shape parameter [ J ]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19 ( 7 ) : 503-512.
- [ 10 ] Chen Jun, Wang Guojin. Constructing convexity-preserving interpolation curves of hyperbolic polynomial B-splines using a shape parameter [ J ]. Journal of Computer Research and Development, 2006, 43 ( 7 ) : 1216-1224. [ 陈军, 王国瑾. 利用形状参数构造保凸插值的双曲多项式 B 样条曲线 [ J ]. 计算机研究与发展, 2006, 43 ( 7 ) : 1216-1224. ]
- [ 11 ] Xu Gang, Wang Guozhao. Extended cubic uniform B-spline and  $\alpha$ -B-spline [ J ]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34 ( 8 ) : 980-983.
- [ 12 ] Hu Gang, Liu Zhe, Qin Xinqiang, et al. New extension of uniform cubic B-Spline curve with multiple local shape parameter [ J ]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2008, 42 ( 10 ) : 1245-1249. [ 胡刚, 刘哲, 秦新强, 等. 带多局部形状参数的三次扩展均匀 B 样条曲线 [ J ], 西安交通大学学报, 2008, 42 ( 10 ) : 1245-1249. ]
- [ 13 ] Liu Xumin, Huang houkuan, Wang Liuqiang, et al. Study of spline-curves with shape parameters [ J ]. Journal of Computer Research and Development, 2007, 44 ( 3 ) : 487-496. [ 刘旭敏, 黄厚宽, 王刘强, 等. 带形状参数样条曲线的研究 [ J ]. 计算机研究与发展, 2007, 44 ( 3 ) : 487-496. ]
- [ 14 ] Zhang Guicang, Geng Zixing.  $\alpha$ -extension of the cubic uniform B-spline curve [ J ]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2007, 19 ( 7 ) : 884-887. [ 张贵仓, 耿紫星. 三次均匀 B 样条曲线的  $\alpha$ -扩展 [ J ]. 2007, 19 ( 7 ) : 884-887. ]