

中图法分类号: TP391.41 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2011)02-0300-05

论文索引信息: 王学梅, 孙即祥. 基于高阶 LLF 和 WENO 算法的透视 SFS [J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(2): 300-304

基于高阶 LLF 和 WENO 算法的透视 SFS

王学梅, 孙即祥

(国防科技大学电子科学与工程学院, 长沙 410073)

摘要: 透视投影下从明暗恢复形状(SFS)问题, 通常通过结合静态 Hamilton-Jacobi(HJ)方程和快速扫描方法来求解。为进一步优化静态 HJ 方程的求解精度, 改善透视 SFS 的恢复结果, 采用了高阶局部 Lax-Friedrichs(LLF)通量分裂格式, 以提高待求量的偏导数的精度; 同时采用了改进的加权本质无振荡(WENO)格式, 使得算法只计算整格点值, 并且利用修正的光滑因子得到比 WENO 更高的精度。对合成图像和实际图像的实验结果表明, 可以有效提高透视投影 SFS 问题的恢复精度。

关键词: 从明暗恢复形状; 静态 HJ 方程; 快速扫描法; 局部 Lax-Friedrichs; 加权本质无振荡

Perspective shape from shading based on high-order LLF and WENO

Wang Xuemei, Sun Jixiang

(College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073 China)

Abstract: Perspective shape from shading can be solved by combining static Hamilton-Jacobi(HJ) equation and fast sweeping method. To optimize the solution of static HJ equation and improve the results of perspective shape from shading, this paper uses high-order local Lax-Friedrichs(LLF) flux splitting scheme to increase the accuracy of partial derivatives. Besides, the paper uses modified weighted essentially non-oscillatory(WENO) scheme, which only uses integer grids and gets higher accuracy than WENO by using amended smoothness estimators. Experiments of synthetic and real images demonstrate that the algorithm can obtain accurate results for perspective SFS.

Keywords: shape from shading; static Hamilton-Jacobi equation; fast sweeping method; local Lax-Friedrichs; weighted essentially non-oscillatory

0 引言

从明暗恢复形状(SFS)是计算机视觉中 3 维形状恢复问题的关键技术之一, 其任务是利用单幅灰度图像中明暗变化来恢复表面 3 维形状(表面各点的相对高度或表面法向量等参数值)。

SFS 由 Horn 首先提出^[1], 文献[2]对正交投影下的 SFS 方法进行了总结和分类。但现实中的图像都是在透视投影下成像的, 因此需要对透视投影下 SFS 进行研究。文献[3]提出 perspective fast marching

method(PFMM)在透视投影下对图像进行 3 维重建, 得到快速有效和稳健的算法, 是一种比较方便实用的重建算法, 但是初始数据对算法的性能影响较大; 文献[4]利用 FMM 和启发式方法研究了透视投影下 SFS 的边界遮挡问题, 但是只是针对视线方向和光线方向重合的情况; 文献[5-8]对透视投影下的 SFS, 利用 Hamilton-Jacobi(简称 HJ)方程的黏性解求得高度, 这是比较经典的方法; 文献[9-10]利用快速扫描法求解静态 HJ 方程, 但是待求量的偏导数只有一阶逼近精度; 文献[11]使用高阶的 WENO 格式来求解静态 HJ 方程用于解决 SFS 问

收稿日期: 2009-07-28; 修回日期: 2009-10-10

第一作者简介: 王学梅(1978—), 女。国防科学技术大学计算机视觉与智能信息处理专业博士研究生, 主要研究方向为图像处理与图像 3 维重建。E-mail: wangxuemei1000@163.com。

题,但是在待求量导数等于零的极值点处无法保证最优权重。

在对透视 SFS 建模得到静态 Hamilton-Jacobi 方程的基础上,论文利用流体力学的相关知识,采用改进的加权本质无振荡(WENO)格式和高阶局部 Lax-Friedrichs(LLF)通量分裂格式,对静态 Hamilton-Jacobi 方程的解进行优化,从而得到解决透视投影下 SFS 问题的数值方法。先对透视 SFS 进行建模,附加一定的初始条件,将其转换为求解静态 Hamilton-Jacobi 方程,再使用高阶 LLF 通量分裂格式对静态 HJ 方程进行求解,其中一阶偏导数使用改进的 WENO 格式来近似,从4个方向进行快速扫描,直到达到收敛要求。此方法可以很方便地将待求量的偏导数的精度从 LLF 格式的一阶扩展到高阶,并且只对整格点进行计算,可以得到比 WENO 更高的精度。

1 透视投影下 SFS 及静态 Hamilton-Jacobi 方程

为简化问题,假设光源为无限远处点光源且反射模型为 Lambertian 表面反射模型,成像几何关系不是通常假设的正交投影而是透视投影。

假设以摄像机光心作为原点,建立坐标系 (x, y, z) ,光源方向 $\mathbf{L} = (p_L, q_L, -1)^T$, $I(x, y)$ 是图像亮度, $R(p(x, y), q(x, y))$ 是反射图函数,其中, $p = z_x$, $q = z_y$ 分别表示在 (x, y) 点处,高度为 z 的表面在 x 方向和 y 方向的梯度值,表面法向量表示为 $\mathbf{n} = (p, q, -1)^T$ 。透视投影下的图像照度方程为^[8]

$$I(x, y) = \frac{(x - Fp_L)\hat{p} + (y - Fq_L)\hat{q} + 1}{\|\mathbf{L}\| \sqrt{(x\hat{p} + y\hat{q} + 1)^2 + F^2(\hat{p}^2 + \hat{q}^2)}} \quad (1)$$

式中 F 为摄像机焦距, $\|\mathbf{L}\| = \sqrt{p_L^2 + q_L^2 + 1}$,

$$\hat{z} = \ln z, \hat{p} = \hat{z}_x = \frac{\partial(\ln z)}{\partial x}, \hat{q} = \hat{z}_y = \frac{\partial(\ln z)}{\partial y}。 \quad \text{令}$$

$$H(x, y, \hat{p}, \hat{q}) = I(x, y) \|\mathbf{L}\| \sqrt{(x\hat{p} + y\hat{q} + 1)^2 + F^2(\hat{p}^2 + \hat{q}^2)} - ((x - Fp_L)\hat{p} + (y - Fq_L)\hat{q} + 1) \quad (2)$$

式(1)可以转化为^[3,8]

$$H(x, y, \phi_x, \phi_y) = 0 \quad (3)$$

的形式,其中 $\phi = \hat{z}$, $\phi_x = \partial\phi/\partial x$, $\phi_y = \partial\phi/\partial y$ 。式(3)是一种静态(static) Hamilton-Jacobi 方程^[12], $H(x, y, \phi_x, \phi_y)$ 是相应的 Hamilton 函数。因此,透视投影下

SFS 问题的模型(式(1)),可以通过求解静态 HJ 方程得到 ϕ ,然后通过 $z = e^{\hat{z}} = e^{\phi}$ 得到物体高度 z 。

2 基于改进 WENO 和高阶 LLF 的透视 SFS

具有边值条件的2维静态 HJ 方程可以写为

$$\begin{cases} H(x, y, \phi_x, \phi_y) = r(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ \phi(x, y) = \phi^0(x, y) & (x, y) \in \Gamma \subset \Omega \end{cases}$$

式中 H, r 和 $\phi^0 > 0$ 并且是 Lipschitz 连续的, Γ 是 Ω 的子集。

将定义域划分为等距网格,其 x, y 轴方向的网格间距分别为 $\Delta x, \Delta y$,用 (i, j) ($i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N$) 表示结点, (x_i, y_j) 表示结点 (i, j) 对应点的坐标,定义域函数用 $\phi_{i,j} = \phi(x_i, y_j)$ 表示, $\phi_{x,i,j}$ 和 $\phi_{y,i,j}$ 分别表示在网格结点 (i, j) 处在 x 轴方向和 y 轴方向的 ϕ 的偏导数即 ϕ_x 和 ϕ_y 。

需要通过两个步骤对静态 HJ 方程进行求解,一个是选择与函数 H 相容的函数的通量分裂格式,另一个是确定一种离散差分形式对 ϕ_x 和 ϕ_y 进行逼近。

2.1 改进的 WENO

现有文献大多利用一阶前向或者后向差分作为对 ϕ_x 和 ϕ_y 的逼近^[9-10]。为了提高一阶微分的精度, ϕ 的偏导数 ϕ_x 和 ϕ_y 可以使用高精度的 WENO 格式来近似。WENO 方法是基于本质无振荡(ENO)格式的线性凸组合而得^[13],具有高精度、高分辨率的优点,同时在间断附近抑制虚假振荡。将改进的 WENO 格式用于透视 SFS 问题, WENO 的改进体现在:

1) WENO 格式是从流体力学的研究得来,使用了半格点值,为避免使用半格点值,引入了文献[14]提出的基于整格点值的五阶 WENO(简称 WENO5)作为一阶导数 ϕ_x 和 ϕ_y 的近似,即

$$\begin{aligned} \phi_{x,i,j}^{\pm} = & \frac{1}{12} \left(-\frac{\Delta_x^+ \phi_{i-2,j}}{\Delta x} + 7\frac{\Delta_x^+ \phi_{i-1,j}}{\Delta x} + 7\frac{\Delta_x^+ \phi_{i,j}}{\Delta x} - \frac{\Delta_x^+ \phi_{i+1,j}}{\Delta x} \right) \pm \\ & \psi \left(\frac{\Delta_x^- \Delta_x^+ \phi_{i\pm 2,j}}{\Delta x}, \frac{\Delta_x^- \Delta_x^+ \phi_{i\pm 1,j}}{\Delta x}, \frac{\Delta_x^- \Delta_x^+ \phi_{i,j}}{\Delta x}, \frac{\Delta_x^- \Delta_x^+ \phi_{i\mp 1,j}}{\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \phi_{y,i,j}^{\pm} = & \frac{1}{12} \left(-\frac{\Delta_y^+ \phi_{i,j-2}}{\Delta y} + 7\frac{\Delta_y^+ \phi_{i,j-1}}{\Delta y} + 7\frac{\Delta_y^+ \phi_{i,j}}{\Delta y} - \frac{\Delta_y^+ \phi_{i,j+1}}{\Delta y} \right) \pm \\ & \psi \left(\frac{\Delta_y^- \Delta_y^+ \phi_{i,j\pm 2}}{\Delta y}, \frac{\Delta_y^- \Delta_y^+ \phi_{i,j\pm 1}}{\Delta y}, \frac{\Delta_y^- \Delta_y^+ \phi_{i,j}}{\Delta y}, \frac{\Delta_y^- \Delta_y^+ \phi_{i,j\mp 1}}{\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$\Delta_x^+ \phi_{i,j} = \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}, \Delta_x^- \phi_{i,j} = \phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}$$

$$\Delta_y^+ \phi_{i,j} = \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}, \Delta_y^- \phi_{i,j} = \phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}$$

$$\psi(a, b, c, d) = \frac{1}{3} \lambda_1 (a - 2b + c) +$$

$$\frac{1}{6} \left(\lambda_3 - \frac{1}{2} \right) (b - 2c + d)$$

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \lambda_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{(\varepsilon + \omega_1)^2}, \alpha_2 = \frac{6}{(\varepsilon + \omega_2)^2}, \alpha_3 = \frac{3}{(\varepsilon + \omega_3)^2}$$

ε 的引入保证了 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的分母不为零, 一般取 $\varepsilon = 10^{-6}$, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 为光滑因子

$$\omega_1 = 13(a - b)^2 + 3(a - 3b)^2 \quad (6)$$

$$\omega_2 = 13(b - c)^2 + 3(b + c)^2 \quad (7)$$

$$\omega_3 = 13(c - d)^2 + 3(3c - d)^2 \quad (8)$$

2) 式(6)–(8)得到的光滑因子在待求量导数等于零的极值点处无法保证最优权重, 为进一步提高光滑区域的精度, 引入文献[15]提出的修正的光滑因子, 以平衡光滑因子最大值和最小值之间的差异, 使得光滑因子的分布更加均匀, 这样各个模板的权重趋向于最优权重, 可以更大程度地减小数值耗散, 提高精确性。修正后的光滑因子为

$$\omega'_m = A \frac{\min^2(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\max(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \varepsilon'} + \omega_m, m = 1, 2, 3$$

式中, ε' 的引入保证了光滑因子的分母不为零, 这里取 $\varepsilon' = 10^{-10}$ 。A 为常数, 当 $A \rightarrow 0$ 或者 $\min(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow 0$ 时, ω'_m 即为原来的光滑因子(式(6)–(8)); 当 $A \rightarrow \infty$ 并且 $\min(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \neq 0$ 时, 则 WENO 具有最优权重系数, 达到最小数值耗散。此处取 $A = 10$ 。

2.2 高阶 LLF 通量分裂格式

文献[12]将 LLF 格式用于透视投影下建立的 HJ 方程, 可以适用于非凸 Hamilton 函数, 而且比 LF 格式更能提高局部的分析能力, 通过求解下式得到 $\phi_{i,j}$

$$r = H\left(\frac{\phi_{x,i,j}^+ + \phi_{x,i,j}^-, \phi_{y,i,j}^+ + \phi_{y,i,j}^-}{2}\right) - \sigma_1 \frac{\phi_{x,i,j}^+ - \phi_{x,i,j}^-}{2} - \sigma_2 \frac{\phi_{y,i,j}^+ - \phi_{y,i,j}^-}{2} \quad (9)$$

为进一步提高细节的恢复精度而对 ϕ_x 和 ϕ_y 进行高阶逼近, 此时 $\phi_{x,i,j}^+, \phi_{x,i,j}^-, \phi_{y,i,j}^+, \phi_{y,i,j}^-$ 一般是关于 $\phi_{i,j}$ 的较复杂形式, 从式(9)不易求出 $\phi_{i,j}$, 因此引入

文献[16]的高阶 LLF 格式, 即基于 Gauss-Seidel 迭代的通用的显式的更新格式

$$\phi_{i,j}^{\text{new}} = \left(\frac{1}{\frac{\sigma_1}{\Delta x} + \frac{\sigma_2}{\Delta y}} \right) \left(r - H\left(\frac{\phi_{x,i,j}^+ + \phi_{x,i,j}^-, \phi_{y,i,j}^+ + \phi_{y,i,j}^-}{2}\right) + \sigma_{1,i,j} \frac{\phi_{x,i,j}^+ - \phi_{x,i,j}^-}{2} + \sigma_{2,i,j} \frac{\phi_{y,i,j}^+ - \phi_{y,i,j}^-}{2} \right) + \phi_{i,j}^{\text{old}} \quad (10)$$

式中 $\sigma_{1,i,j} \geq \max_{x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]} \left| \frac{\partial H}{\partial \phi_x} \right|$, $\sigma_{2,i,j} \geq \max_{y \in [y_{i-1}, y_{i+1}]} \left| \frac{\partial H}{\partial \phi_y} \right|$

这种通用格式可以适用于复杂的高阶导数形式, 并且 ϕ 的更新以显式方式(式(10))表达, 这样 $\phi_{x,i,j}^+, \phi_{x,i,j}^-, \phi_{y,i,j}^+, \phi_{y,i,j}^-$ 总是利用 Gauss-Seidel 迭代, 使用最新的 ϕ 值来计算。 $\phi_{x,i,j}^+, \phi_{x,i,j}^-, \phi_{y,i,j}^+, \phi_{y,i,j}^-$ 可以取不同形式的近似形式, 比如一阶前向后向差分、WENO3、WENO5、改进的 WENO5 等。如果使用 WENO5 来近似, 则根据式(4)(5)利用最新的 ϕ 值来计算。

2.3 算法流程

1) 初始化: 即对透视 SFS 问题附加初始条件。根据边界条件 $\phi(x, y) = \phi^0(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma$, 在距离 Γ 小于或者等于 $(n - 1) \max(\Delta x, \Delta y)$ (n 为 WENO 格式里面 ENO 的模板在其中一个方向用到的格点数目, 对 WENO5, $n = 4$) 的网格点, 赋予精确值或者外推值, 这些值在后续的处理中不变化; 其他点赋予一个足够大的正值, 这个正值比物体最高点的高度还要大, 这些值在后续的处理中将会改变。

2) 快速扫描: 在第 $k + 1$ 步迭代中, 根据式(7)计算 $\phi_{i,j}^{\text{new}}$, 利用文献[9]提出的快速扫描算法对定义域进行 4 个方向的扫描: $i = 2:M - 1, j = 2:N - 1$; $i = M - 1:2, j = 2:N - 1$; $i = 2:M - 1, j = 2:N - 1$; $i = 2:M - 1, j = 2:N - 1$ 。而 $\phi_{x,i,j}^+, \phi_{x,i,j}^-, \phi_{y,i,j}^+, \phi_{y,i,j}^-$ 总是利用最新的 ϕ 值, 使用 WENO5 来计算, 对计算边界上的点, 虚拟点的值由线性外推法得到。

3) 停止条件: 当满足 $\|\phi^{k+1} - \phi^k\|_{L_1} \leq \xi$ 时终止迭代, $\xi > 0$ 为给定的足够小的值。

3 实验结果及分析

以 4 幅合成图像和 1 幅实际图像为例来验证本文算法的有效性。选取的所有图片的大小都是 64×64 像素。

对合成图像, 物体的真实表面如图 1(a) 列所

示,对应的透视投影下的灰度图像由式(1)生成;
(b)对应于光线方向 $L=(0.2,0.3,-1)^T$ 的透视灰度图像;(c)–(e)对应于高阶 LLF 通量分裂格式中,偏导数分别为一阶前向后向差分、WENO5 和改进的 WENO5 近似格式的重建结果。其中,例 1—例 3 中摄像机焦距 $F=100$,例 4 中 $F=50$ 。

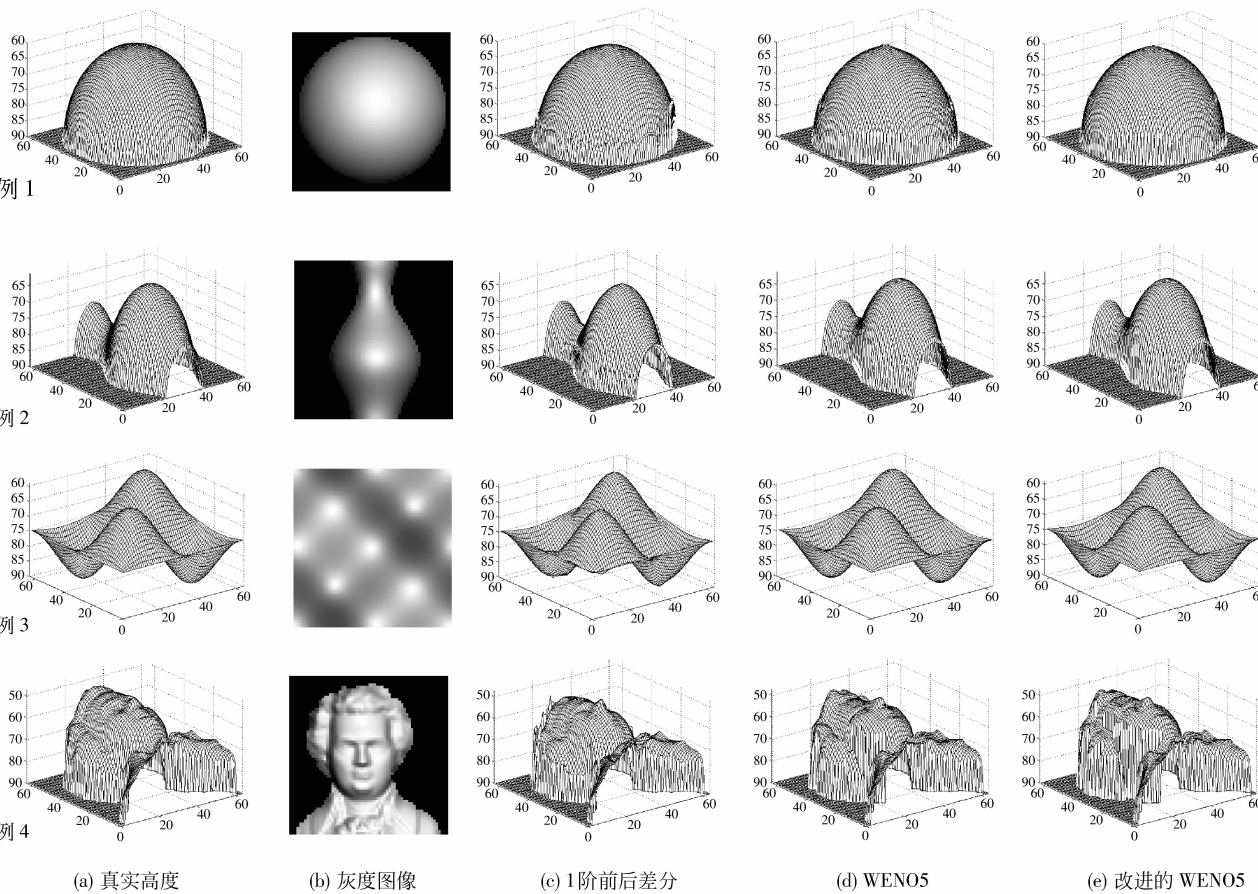


图 1 合成图像实验结果

Fig. 1 Results of synthetic images

表 1 和表 2 对两个例子的最大误差和平均误差进行了比较,其中误差为

$$e_1 = \max_{i,j} |z(i,j) - z_a(i,j)|$$
$$e_2 = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |z(i,j) - z_a(i,j)|$$

式中, $z_a(i,j)$ 、 $z(i,j)$ 分别为物体真实高度和算法恢复的高度, M 、 N 分别为 x 轴和 y 轴的离散点个数。

表 1 3 种方法最大误差(e_1)比较

Tab.1 Comparison of maximum error(e_1) of three methods

例子	方法		
	一阶前后差分	WENO5	改进的 WENO5
1	4.930 1	2.270 7	1.977 7
2	2.886 7	0.782 2	0.627 5
3	2.728 1	0.857 2	0.703 7
4	8.918 9	6.890 5	5.761 4

表 2 3 种方法平均误差(e_2)比较

Tab.2 Comparison of mean error(e_2) of three methods

例子	方法		
	一阶前后差分	WENO5	改进的 WENO5
1	2.439 7	1.259 8	1.098 0
2	1.345 6	0.331 5	0.269 9
3	1.817 7	0.319 7	0.280 3
4	5.166 3	1.643 4	1.447 6

对实际图像,选取的图像为图 2(a)所示,文献[2]给出例 5 的光线方向为 $L=(-0.939,1.867,-1)^T$ 。(b)–(d)对应于高阶 LLF 通量分裂格式中,偏导数分别为一阶前向后向差分、WENO5 和改进的 WENO5 近似格式的重建结果。

通过对合成图像和实际图像的实验结果比较可以看出,基于高阶 LLF 格式的 3 种偏导数近似格式

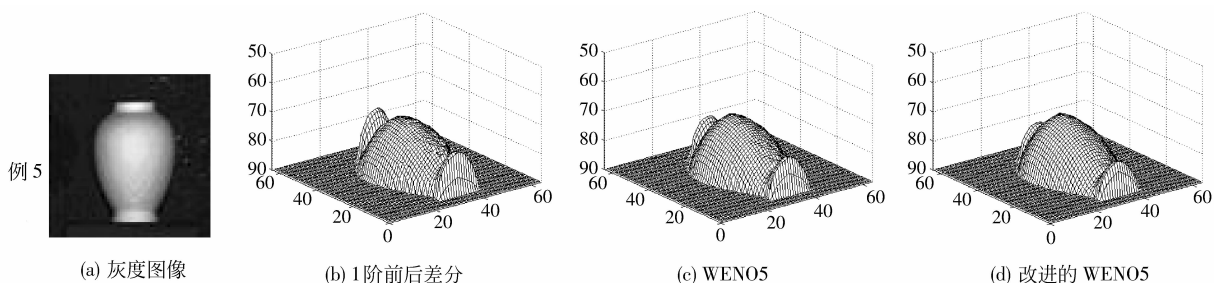


图 2 实际图像实验结果

Fig. 2 Results of real image

中, WENO5 比一阶前向后向差分格式的精度提高了很多, 而改进的 WENO5 比 WENO5 的精度也有所提高, 误差更小, 得出的结果最接近真实的物体表面。因此, 本文方法可以有效解决透视投影下的 SFS 问题。

4 结 论

对透视投影下 SFS 进行建模, 可以得到静态 HJ 方程。引入高阶 LLF 通量分裂格式和改进的 WENO 格式来求解静态 HJ 方程, 得到解决透视投影下 SFS 问题的数值方法。在采用高阶 LLF 的时候, 将改进的 WENO5 与一阶前向后向差分格式和 WENO5 做了比较。实验结果表明, 给出的方法适用范围更广, 恢复的物体高度精度更高。提出的方法也可以推广到对可以建模成静态 HJ 方程的其他问题进行优化。

参考文献 (References)

- [1] Brooks M J, Horn B K P. Shape and source from shading [C]// Proceedings of the 9th International Joint Conference on Artificial Intelligence. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1985: 932-936.
- [2] Zhang R, Tsai P S, Cryer J E, et al. Shape from shading: A survey [J]. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1999, 21(8): 690-705.
- [3] Tankus A, Sochen N, Yeshurun Y. Shape-from-shading under perspective projection [J]. International Journal of Computer Vision, 2005, 5(6): 21-43.
- [4] Yuen S Y, Tsui Y Y, Chow C K. A fast marching formulation of perspective shape from shading under frontal illumination [J]. Pattern Recognition Letters, 2007, 28(7): 806-824.
- [5] Prados E, Faugeras O. A generic and provably convergent shape-from-shading method for orthographic and pinhole cameras [J]. International Journal of Computer Vision, 2005, 65(1-2): 97-125.
- [6] Prados E, Camilli F, Faugeras O. A unifying and rigorous shape from shading method adapted to realistic data and applications [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2006, 25(3): 307-328.
- [7] Cristiani E, Falcone M, Seghini A. Some remarks on perspective shape-from-shading models [R]. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- [8] Prados E, Faugeras O. Perspective shape from shading and viscosity solutions [C]// Proceedings of the 9th International Conference on Computer Vision. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2003, 2: 826-831.
- [9] Kao C Y, Osher S, Tsai Y H. Fast sweeping methods for static Hamilton-Jacobi equations [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2005, 42(6): 2612-2632.
- [10] Zhao H K. A fast sweeping method for Eikonal equations [J]. Mathematic Computation, 2005, 74: 603-627.
- [11] Zhang Y T, Zhao H K, Chen S Q. Fixed-point iterative sweeping methods for static Hamilton-Jacobi equations [J]. Methods and Applications of Analysis, 2006, 13(3): 299-319.
- [12] Kao C Y, Osher S, Qian J. Lax-Friedrichs sweeping scheme for static Hamilton-Jacobi equations [J]. Journal of Computational Physics, 2004, 196(1): 367-391.
- [13] Jiang G S, Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1996, 126: 202 - 228.
- [14] Jiang G S, Peng D P. Weighted ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2000, 21(6): 2126-2143.
- [15] Shen Y Q, Zha G C. Improvement of the WENO scheme smoothness estimator [C]// 38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit. Reston, VA, USA: AIAA, 2008: 1-20.
- [16] Zhang Y T, Zhao H, Qian J. High order fast sweeping methods for static Hamilton-Jacobi equations [J]. Journal of Scientific Computing, 2006, 29(1): 25-56.