

中图法分类号: TP75 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2010)10-1444-05
索引信息: 郭琦. 图像平滑的2维小波插值方法[J]. 中国图象图形学报, 2010, 15(10): 1444-1448

图像平滑的2维小波插值方法

郭琦

(哈尔滨工业大学数学系, 哈尔滨 150001)

摘要: 在应用扩散方程进行图像平滑时, 常规的方法是对扩散方程差分化构造差分方程, 利用初边值条件求解。这种方法误差传播快, 精度不高。因此, 构造了2维小波插值函数, 利用它来求解扩散方程, 并分析得到用小波插值函数求解 Alvarez 模型的方法。由于小波函数具有良好的局部性, 求解扩散方程比用差分方法求解具有精度高, 误差传播速度慢, 对时间步长不敏感等优点。在数值实验中, 给出了本文方法的有效性及其相对于差分方法求解的优点。
关键词: 扩散方程; 图像平滑; 小波插值

An image smoothing method of two-dimensional wavelet interpolation

GUO Qi

(Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

Abstract: In image smoothing with diffusion equation, general methods are to construct difference equation of diffusion, then solve it with initialization and edge condition. These methods have low precision and diffuse error quickly. So a wavelet interpolation method is structured in this paper and is applied to solve the diffusion equation. We get a method to Alvarez model by two-dimensional wavelet interpolation method. Wavelet function possess better partial character, compared with finite difference method, wavelet method has higher precision, slower speed of error diffusion, and not is sensitive to time interval. The experiment shows the advantages of this method compared with difference method.

Keywords: diffusion equation; image smoothing; wavelet interpolation

0 引言

在图像处理领域, 图像平滑是一个重要的部分。由于各方面原因, 实际获得的图像一般都因受到某种干扰而含有噪声。在对图像进行处理分析前我们往往先进行图像平滑, 去除噪声。因此好的图像平滑方法对图像的后续处理, 比如分割、识别、理解带来很多好处。图像平滑有很多方法, 空域方法如平均滤波、中值滤波, 频域方法如小波分析。近年来, 基于偏微分方程的图像处理成为该领域的一个重要

分支^[1-3]。在图像平滑领域, 基于扩散方程的图像平滑以其保边界等优良特性日益成为相关领域研究人员关注的热点^[4]。

最早采用均值滤波, 中值滤波等线性滤波器来进行图像平滑。Koenderink^[5]在1984年发现了图像与高斯滤波器在不同尺度上进行卷积等价于热传导方程的解。

$$u(x, y, t) = u_0(x, y) * G_\sigma(x, y, t)$$

有一个有趣的结论: 线性滤波器经局部化和迭代作用的极限状态是热传导方程初值问题的解。这说明热传导方程可以把所有的线性滤波器归为一

基金项目: 国家高技术研究发展计划(863)项目(2006AA01Z308)。

收稿日期: 2009-01-16; 改回日期: 2009-05-25

第一作者简介: 郭琦(1963—), 女, 哈尔滨工业大学理学院数学系副教授, 硕士生导师, 博士。主要研究方向为小波分析、图像处理、虚拟现实、空间机器人、机器人足球等。E-mail: guoqi@hit.edu.cn。

类。如果把需要去噪的图像看作是热传导方程在零时刻的初始条件,那么对于任意一个 t ,解都是某一个线性滤波图像序列的极限。可以利用热传导方程初值问题的解作为滤波的结果,被滤波图像作为方程在零时刻的初值,称这个滤波器为热传导方程滤波器。因此可以用解热传导方程来进行图像平滑去噪,平滑的结果就是热传导方程在 t 时刻的值, t 作为尺度参数。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \nabla u$$

由于热扩散方程的传导系数为常数,属于各向同性扩散,在去噪的同时也破坏了图像的一些重要信息。Alvarez 等人^[6]提出了对图像进行选择性的平滑的各向异性扩散方程,这种模型保护了图像的细节。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|G_\sigma * \nabla u|) |\nabla u| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$$

式中,参数 $g(\cdot)$ 用来控制扩散速度, $g(|\nabla u|)$ 是用于边缘增强, $\nabla u = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$ 。

可以看出,基于热传导方程进行图像平滑已经发展出了很多模型,这些模型都是在热传导方程的基础上改进的。因此求解热传导方程成为偏微分方程图像平滑的一个关键。

在应用扩散方程进行图像平滑时,常规的方法是对扩散方程差分化构造差分方程,利用初边值条件求解。这种方法误差传播快,精度不高。我们知道,非线性偏微分方程的研究是比较困难的,而多维的更是如此。在非线性偏微分方程求解的数值解领域里,其古典方法有:差分法、有限元、谱方法等。随着小波理论的提出,小波理论已被应用在数值求解偏微分方程中,人们发现小波数值解达到的精度是最理想的^[7-9],并且由于小波函数的局部性,在处理奇异性问题比古典方法要好得多。

因此,本文构造了 2 维小波插值函数,利用它来求解扩散方程,并分析得到用小波插值函数求解 Alvarez 模型的方法。在数值实验中,验证了本文提出的小波方法较差分方法具有精度高,误差传播速度慢,对时间步长不敏感等优点。

1 2 维小波插值公式构造

小波采样定理:假设 $\{V_j; j \in \mathbf{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的正交

多尺度分析,尺度函数 $\phi(t)$ 满足:

$$\phi(t) = O(|t|^{-1-\varepsilon}), |t| \rightarrow +\infty, \varepsilon > 0 \quad (1)$$

$$\tilde{\phi}(\omega) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \phi(n) \exp(-in\omega) \neq 0, \omega \in \mathbf{R} \quad (2)$$

那么对任何 $f \in V_j$ (j 为某整数),则 $f(x)$ 的采样间隔 $d = 2^{-j}$ 的采样 $\{f(n2^{-j}); n \in \mathbf{Z}\}$ 没有信息损失,且小波插值公式为

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(2^{-j}n) S(2^j t - n)$$

式中 $S(t)$ 是由 $\phi(t)$ 构造出来的重构函数。

设 $\phi(t)$ 的整数平移族 $\{\phi(t-n); n \in \mathbf{Z}\}$ 构成闭子空间 V_0 的标准正交基, $\phi(t)$ 满足式(1)(2) 选取 $S(t)$ 形式为 $S(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n \phi(t-n)$,要求 $S(t)$ 具有离散正交性,从而

$$\tilde{S}(\omega) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} S(n) \exp(-in\omega) \equiv 1, \omega \in \mathbf{R}, \text{得}$$

$$\tilde{a}(\omega) = \frac{1}{\tilde{\phi}(\omega)} \quad (3)$$

在正交多尺度分析中,构造样条函数为尺度函数 $\phi(t)$,且尺度函数必须满足条件

$$\sum_n \phi(n) = 1, n \in \mathbf{Z} \quad (4)$$

如构造出的样条函数分别为二次样条、三次样条:

$$\phi(t) = \begin{cases} t^2 & 0 \leq t < 1 \\ -2t^2 + 6t - 3 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

$$\phi(t) = \alpha^{-1} \times \begin{cases} M_0 \frac{(1-t)^3}{6} + M_1 \frac{t^3}{6} - \\ M_0 \frac{(1-t)}{6} + \left(1 - \frac{M_1}{6}\right)t & 0 \leq t < 1 \\ M_1 \frac{(2-t)^3}{6} + M_2 \frac{(t-1)^3}{6} + \\ \left(1 - \frac{M_1}{6}\right)(2-t) - M_2 \frac{(t-1)}{6} & 1 \leq t < 2 \\ M_2 \frac{(3-t)^3}{6} + M_3 \frac{(t-2)^3}{6} - \\ M_2 \frac{(3-t)}{6} - M_3 \frac{(t-2)}{6} & 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\alpha = -2.1179, M_0 = -59/65, M_1 = -218/65, M_2 = 151/65, M_3 = 4/65$, 在式(5)(6)中,当 $n = 1$

时, $\phi(1) = 1$, 当 $n \neq 1$ 时, $\phi(n) = 0$, 因此式(5)(6)中的尺度函数都满足式(4)条件。则

$$\tilde{\phi}(\omega) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \phi(n) \exp(-in\omega) = \exp(-i\omega) \neq 0, \omega \in \mathbf{R}$$

由式(3)得: $\tilde{a}(\omega) = [\tilde{\phi}(\omega)]^{-1} = \exp(i\omega)$ 所以, $S(t)$ 的构造系数

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

于是 $S(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n \phi(t-n) = \phi(t+1)$, 因此, 构造的 1 维小波插值公式为

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{n}{2^j}\right) \phi(2^j t - n + 1) \quad (7)$$

式中, $\phi(t)$ 满足式(4)条件, 且可以取式(5)(6)中的任一个, 采样间隔 $d = 2^{-j}$ 。

同理, 取 2 维尺度函数

$$\phi(x, y) = \phi^1(x) \cdot \phi^2(y)$$

式中 $\phi^1(x), \phi^2(y)$ 分别是 1 维尺度函数, 由 $\hat{\phi}(\omega_1, \omega_2) = \exp(-i\omega_1) \exp(-i\omega_2)$, 及 $\hat{a}(\omega_1, \omega_2) = \exp(i\omega_1) \exp(i\omega_2)$ 得 $S(x, y)$ 的构造系数为

$$a_{mn} = \begin{cases} 1 & m, n = -1 \\ 0 & m, n \neq -1 \end{cases}$$

于是

$$S(x, y) = \sum_{m, n \in \mathbf{Z}} a_{m, n} \phi(x-m, y-n) = \phi^1(x+1) \cdot \phi^2(y+1)$$

因此构造出 2 维小波插值公式

$$f(x, y) = \sum_{m, n \in \mathbf{Z}} \left(f\left(\frac{m}{2^j}, \frac{n}{2^j}\right) \phi^1(2^j x - m + 1) \phi^2(2^j y - n + 1) \right) \quad (8)$$

2 基于 2 维小波插值的图像平滑算法

2.1 热传导方程

考虑 2 维热传导方程的初值问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

式中 a 是传导系数且为正常数, $0 < t < T, T$ 为终点时刻。初值 $u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$ 。解式(9), 有几种经典的差分格式^[10]: 向前差分格式、向后差分格式、六点对称格式、Richardson 格式。利用向前差分格式解热传导方程虽然计算简单, 但对网格比(时间步长/空间步长)限制大。向后差分格式和六点对

称格式计算复杂, Richardson 格式绝对不稳定。下面引进 2 维小波方法数值求解热传导方程。

2.2 热传导方程的小波求解

考虑式(9)的传导系数 $a = 1$ 的热传导方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 \leq x, y \leq 1 \quad (10)$$

原始图像 $U(x, y)$ 作为上述方程的初值 u_0 , 设图像大小为 $N \times N$, 初值 $u_0(x_i, y_j) = U(i, j), 1 \leq i, j \leq N, 0 \leq x_i, y_j \leq 1$ 。把上述方程在 t 时刻的解 $u(x, y, t)$ 作为平滑后的图像。

对时间进行差分, 得

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

设 $\Omega = (0, l] \times (0, h]$, 则空间步长 $\Delta x = l2^{-N}, \Delta y = h2^{-N}, N \in \mathbf{Z}$, 用小波插值式(8), 于是有

$$u^n = \sum_{J, J_1=1}^{2^N} u(J\Delta x, J_1\Delta y) \phi^1\left(\frac{x}{\Delta x} - J + 1\right) \phi^2\left(\frac{y}{\Delta y} - J_1 + 1\right)$$

$$u^n_{xx} = \sum_{J, J_1=1}^{2^N} u(J\Delta x, J_1\Delta y) \phi^1_{xx}\left(\frac{x}{\Delta x} - J + 1\right) \phi^2\left(\frac{y}{\Delta y} - J_1 + 1\right)$$

$$u^n_{yy} = \sum_{J, J_1=1}^{2^N} u(J\Delta x, J_1\Delta y) \phi^1\left(\frac{x}{\Delta x} - J + 1\right) \phi^2_{yy}\left(\frac{y}{\Delta y} - J_1 + 1\right)$$

ϕ^1, ϕ^2 是 1 维尺度函数, 进一步得

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t (u^n_{xx} + u^n_{yy}) \quad (11)$$

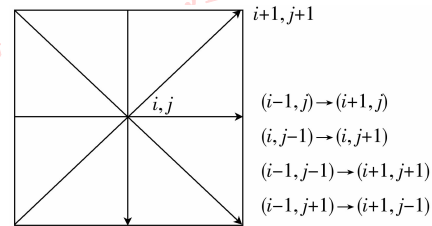
u^0 由初始条件求出。解式(11)可求出指定时刻热传导方程 u 的解, 并把 $U^i(i, k) = u_j(x_i, y_k)$ 作为图像平滑后的结果。

2.3 Alvarez 模型的小波求解

考虑简化的 Alvarez 模型:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla u|) |\nabla u| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \quad (12)$$

为了计算扩散算子 $|\nabla u| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$, 在网格上进行逼近, 设当前网格节点 (i, j) , 定义网格的 4 个方向如下:



$$\text{用 } \sum_{n=0}^3 f(\theta_n) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) \text{ 来近似 } |\nabla u| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|},$$

θ_n 为上述 4 个方向与 ∇u 方向的夹角, f 定义为

$$f(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta < c \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$

把模型式(12)按时间离散化,得到

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \left(g \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right) (f(\theta_0) \frac{\partial u}{\partial x_0} + f(\theta_1) \frac{\partial u}{\partial x_1} + f(\theta_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + f(\theta_3) \frac{\partial u}{\partial x_3}) \right)$$

(13)

令

$$u^n = \sum_{J, J_1=1}^{2^N} u(J\Delta x, J_1\Delta y) \phi^1 \left(\frac{x}{\Delta x} - J + 1 \right) \phi^2 \left(\frac{y}{\Delta y} - J_1 + 1 \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{J, J_1=1}^{2^N} u(J\Delta x, J_1\Delta y) \phi^1 \left(\frac{x}{\Delta x} - J + 1 \right) \phi^2 \left(\frac{y}{\Delta y} - J_1 + 1 \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{J, J_1=1}^{2^N} u(J\Delta x, J_1\Delta y) \phi^1 \left(\frac{x}{\Delta x} - J + 1 \right) \phi_y^2 \left(\frac{y}{\Delta y} - J_1 + 1 \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \sum_{J, J_1=1}^{2^N} u(J\Delta x, J_1\Delta y) \phi^1 \left(\frac{x}{\Delta x} - J + 1 \right) \phi^2 \left(\frac{y}{\Delta y} - J_1 + 1 \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \sum_{J, J_1=1}^{2^N} u(J\Delta x, J_1\Delta y) \phi^1 \left(\frac{x}{\Delta x} - J + 1 \right) \phi_y^2 \left(\frac{y}{\Delta y} - J_1 + 1 \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)$$

将上述公式代入式(13),由原始图像 u_0 ,便可得到指定时刻 u 的解。

与解 Alvarez 模型的方法类似,可以解出其他基于热传导方程图像平滑的模型。

3 数值实验

3.1 用小波方法和差分方法求解热传导方程

分别用小波方法和差分方法解方程(14),可对其作精度对比。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u(x, y, t) = 10 \cos(\pi x) \cos(\pi y) \end{cases} \quad (14)$$

方程的真解是 $u = 10e^{-2\pi^2 t} \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ 。

取 $\Delta t = 5 \times 10^{-6}, N = 5, \Delta x = 2^{-N}, \Delta y = 2^{-N}$,采用式(11)进行基于小波方法的求解。由图 1 可以看出小波方法求解结果误差更小,稳定性更强。

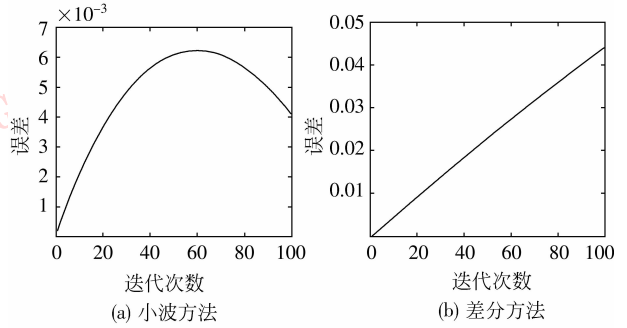


图 1 小波方法和差分方法解热传导方程的误差
Fig. 1 Wavelet error and finite difference error for solving heat conduction equation

3.2 用小波方法和差分方法求解 Alvarez 模型

实验中,取参数 $c = \frac{\pi}{4}$,函数 $g(x) = \frac{1}{\log(x+1)}, N = 5$,空间步长 $\Delta x = 2^{-N}, \Delta y = 2^{-N}$,图像大小 90×90 ,采用式(13)进行基于小波方法的求解。由图 2 可以看出用小波方法求解平滑效果好,而且对时间步长不敏感。

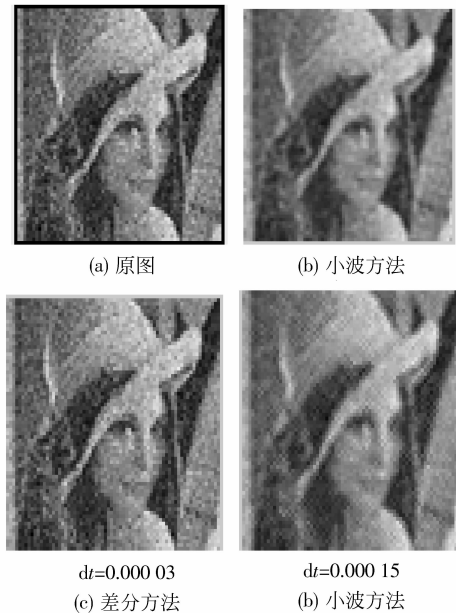


图 2 小波方法和差分方法求解 Alvarez 模型的平滑效果比较
Fig. 2 The comparison of smoothing effect for wavelet method and finite difference method to solve Alvarez model

3.3 取不同时间步长进行图像平滑

对上节实验,取不同时间步长进行小波方法的图像平滑,以验证其效果。由图 3 可以看出本文方法对时间步长不敏感,而且平滑效果好。因此在用本文方法进行图像平滑时,可使用大步长,少次迭代。

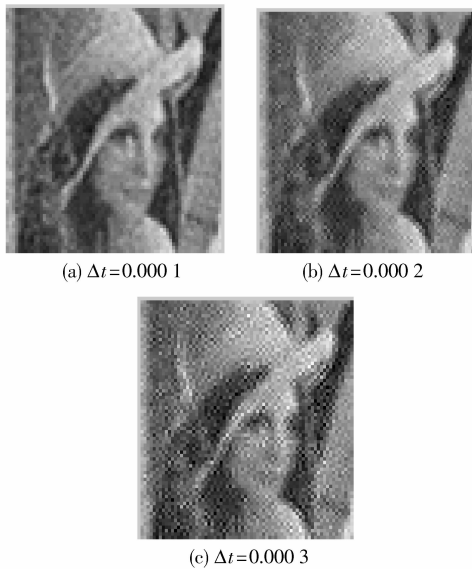


图 3 不同时间步长的小波方法平滑比较

Fig. 3 The comparison of smoothing effect with different time step by use of wavelet method

4 结 论

本文研究了基于偏微分方程的图像处理。在应用扩散方程进行图像平滑时,常规的方法是对扩散方程差分化构造差分方程,利用初边值条件求解。这种方法误差传播快,精度不高。因此本文构造了 2 维小波插值函数,利用它来求解扩散方程,并分析得到用小波插值函数求解 Alvarez 模型的方法。它较常用的差分方法具有精度高,误差传播速度慢,对时间步长不敏感等优点。数值实验结果,验证了该方法的有效性及其较差分方法求解精度高的优点。

参考文献 (References)

- [1] Wang Jichao. A noise removal model combining TV and a fourth-order PDE filter [J]. Journal of Image and Graphics, 2008, 13(8):1443-1446. [王际朝. 一种组合总变差和 4 阶偏微分方程的图像去噪模型 [J]. 中国图象图形学报, 2008, 13(8): 1443-1446.]
- [2] Yin Haili, Zhang Lijie, Wang Jianbo. Numerical method for image smoothing based on PDEs [J]. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(23):212-213. [尹海丽, 张立杰, 王建波. 基于 PDEs 的图像平滑数值方法 [J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(23):212-213.]
- [3] LI Xin, Sun Maoheng. The improving strategy on robust smoothing algorithm [J]. Journal of Image and Graphics, 2008, 13(8):624-628. [李欣, 孙懋珩. 稳健平滑算法的改进策略 [J]. 中国图象图形学报, 2008, 13(8):624-628.]
- [4] Chen Li, Li Jiansheng. Fast anisotropic inverse diffusion based on adaptive statistic filtering [J]. Journal of Shantou University (Natural Science Edition), 2008, 23(1):30-35. [陈力, 黎健生. 用于图像平滑去噪的快速各向异性反扩散 [J]. 汕头大学学报(自然科学版), 2008, 23(1):30-35.]
- [5] Koenderink J J. The structure of image [J]. Biological Cybernetics, 1984, 50(4):363-370.
- [6] Alvarez L L, Ions P L, Morel J M. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II [J]. SIAM J Num Anal, 1992, 29(3): 845 - 866.
- [7] Shi Zhi, Deng Liyuan. Haar wavelet method for solving the convection-diffusion equation [J]. Mathematica Applicata, 2008, 21(1):98-104.
- [8] Ulo L. Numerical solution of evolution equations by the haar wavelet method [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 185(1):695-704.
- [9] Wang Guinan, Ji Yubo. Removing speckles of SAR image based on partial differential equation and wavelet decomposition [J]. Journal of Liaoning University of Petroleum & Chemical Technology, 2009, 29(1): 65-68. [王桂楠, 纪玉波. 基于 PDE 和小波分解的 SAR 图像去噪研究 [J]. 辽宁石油化工大学学报, 2009, 29(1): 65-68.]
- [10] Lu Jinfu, Guan Zhi. Numerical Solution of Partial Differential Equations [M]. Beijing: Qinghua University Press, 1987:145-194. [陆金甫, 关治. 偏微分方程数值解法 [M]. 北京:清华大学出版社, 1987 年:145-194.]