

中图法分类号: TP391 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2011)03-0357-07

论文索引信息: 王丽艳, 韦志辉, 罗守华. 总变差正则化断层图像重建的解耦 Bregman 迭代算法 [J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(3): 357-363

# 总变差正则化断层图像重建的解耦 Bregman 迭代算法

王丽艳<sup>1),2)</sup>, 韦志辉<sup>2)</sup>, 罗守华<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>(东南大学数学系, 南京 211189) <sup>2)</sup>(南京理工大学计算机科学与技术系, 南京 210094)

<sup>3)</sup>(东南大学生物医学工程系, 南京 211189)

**摘要:** 在断层重建的很多工程应用中, 由于低剂量以及成像硬件等原因, 经常需要在测量数据不充分的情况下去重建图像。基于图像分段光滑的假设, 提出采用误差的加权范数作为数据保真项, TV (total variation) 作为正则项的断层图像重建模型。该模型求解时, 首先通过引入代理函数将原问题解耦为残差的加权范数最小化和加权范数 TV 去噪这两个子问题; 然后采用了 Chambolle 的对偶空间正交投影法的框架对加权范数 TV 去噪问题进行求解, 避免了由于 TV 项在不可导处所带来的计算不稳定; 最后, 为了提高收敛速度并且避免由正则化参数选取所引起的数值不稳定, 引入 Bregman 方法, 给出该模型的快速迭代算法。在扇形束少角度欠采样的条件下, 对理想情况和高斯噪声情况下进行仿真测试, 并同多种算法进行了比较。实验结果表明, 该算法重建效果好, 收敛速度快。

**关键词:** 断层图像重建; TV 正则化; Bregman 算法; 代理函数法

## An uncouple Bregman iteration for tomography reconstruction using total variation regularization

Wang Liyan<sup>1)</sup>, Wei Zhihui<sup>2)</sup>, Luo Shouhua<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> (Mathematics Department, Southeast University, Nanjing 211189 China)

<sup>2)</sup> (Computer Science Department, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094 China)

<sup>3)</sup> (Biomedical Engineering Department, Southeast University, Nanjing 211189 China)

**Abstract:** Recently, there are many practical applications of tomographic reconstruction that consist of minimizing the sum of a residual energy and image total variation (TV). In this paper, we develop an uncoupled iterative algorithm for solving the recent popular TV-regularized CT optimization problem. Using surrogate function, we split the sum minimization scheme to the minimizing weighted least square function and TV denoising with weighted norm iteratively. In order to find the stable solution of this model, we use Chambolle's scheme to overcome the numerical difficulty due to the non differentiability of the TV norm and use Bregman scheme to accelerate the iteration process. Experimental results show that the proposed approach outperforms some existing TV tomography methods based on the gradient descent algorithms.

**Keywords:** computerized tomography reconstruction; total variation regularization; Bergman method; surrogate functions

## 0 引言

随着核医学发展, 近年来一些非散射光源断层

成像设备得到了广泛应用, 例如 PET (positron emission tomography), SPET (single-photon emission computed tomography), 中低能的 X-ray CT (computerized tomography)。这些设备由于成像硬件, 低剂量以及

收稿日期: 2009-09-27; 修回日期: 2009-12-31

基金项目: 国家自然科学基金项目 (60672074, 10871043); 国家高技术研究发展 (863) 计划项目 (2007AA12Z142); 国家重点基础研究发展 (973) 计划项目 (2006CB601201)。

第一作者简介: 王丽艳 (1978—), 女, 讲师。攻读南京理工大学模式识别与智能系统专业博士研究生, 主要研究方向为医学图像处理, CT 理论和重建算法。E-mail: 101010356@seu.edu.cn。

成像速度的原因,与传统的工业 CT 相比往往噪声大,投影数据不完全。这就使得迭代重建法得到越来越多的关注。与传统的解析重建法(如 FBP 滤波反投影法)相比,迭代法,能够适应不同的几何结构,易于加入先验约束条件和正则化条件的优点,因而对噪声不敏感,缺点是计算量大。随着计算机硬件和加速算法的发展,迭代重建法<sup>[1]</sup>已经开始应用到一些商用的 PET、SPECT 系统之中。

实际问题经常会涉及观测数据不完全以及噪声大,另外由于 PET/ SPECT 重建的逆问题本质,需要适当的进行正则化,以保证数值计算的稳定性和抑制噪声。TV (total variation) 正则化首先由 Rudin 等人<sup>[2]</sup>提出,由于对分段光滑的图像具有能够抑制噪声的同时较好的保持图像的边缘的优点,在图像处理中得到了广泛应用。在医学以及工业应用中,一幅断层图像本身可能并不稀疏,但梯度场的系数大都是稀疏的,满足分段光滑的假设。以 X 射线吸收率成像为例,相同的器官内部的吸收率往往都是相近的,只有在不同的器官的边界吸收率才会有较大的变化。Candes 等人<sup>[3]</sup>利用 TV 正则化做了一个效果非常好的实验,在只有 22 个角度的观测数据下能够精确的重构出原始图像。但是实验中假设已知 22 个角度下的傅里叶系数的精确值,这在实际情况中是不可能得到的。首先实际的观测值都是有噪声的,其次观测到的是投影值,只有在平行光源的情况下才能通过切片定理得到傅里叶系数,而由于硬件实现的限制,实际中使用的光源往往是发散型的如扇形和锥形。加上近年来大面积的平板检测器的发展,提供了更有效的利用光源以减低辐射量的硬件基础,这就需要发散型光源的断层图像重构算法进行研究。

现有的研究一般图像恢复问题中的 TV 正则化求解的文献例如 Huang 等人<sup>[4]</sup>以及 Carter 等人<sup>[5]</sup>都是假设图像的退化算子能够写成卷积的形式,从而利用快速傅里叶变换求解。由于断层图像重构中的投影矩阵是和成像的几何结构相关的规模十分巨大的稀疏矩阵,不能用卷积形式表达,因此这类频域算法不能用来求解断层图像重构问题。针对发散型光源的断层图像重构问题, Sidky 等人<sup>[6]</sup>讨论了角度受限以及较少的角度观测情况下,在均方误差作为数据保真项的基础上利用 TV 正则化,得到较好的实验结果; Yu 等人<sup>[7]</sup>证明了在感兴趣区域以外的部分没有梯度阶跃的条件下,分段光滑的图像内部

可唯一确定。但 Sidky 等人<sup>[6]</sup>和 Yu 等人<sup>[7]</sup>中的具体求解过程都是简单的迭代投影法或凸集投影法加上 TV 下降的组合,这样的算法可以看成是 TV 初值预优的迭代投影法或凸集投影法。因此迭代的步长和正则化参数的选取十分重要,否则不一定收敛,或者收敛不到原始模型的解。针对投影矩阵的特点,提出了一种基于 TV 正则化的断层图像重建的解耦 Bregman 迭代算法。首先利用代理函数将图像重构问题解耦成加权均方误差最小化问题和加权范数 TV 去噪问题,然后利用 Bregman 迭代<sup>[8]</sup>加快收敛速度以及解决由于正则化参数选取导致的数值不稳定问题。Sidky 等人<sup>[6]</sup>和 Fessler<sup>[9]</sup>的模型通过选取不同的加权矩阵,可统一归纳到采用加权的均方误差作为数据保真项,TV 范数作为正则项的图像重构模型框架中来。最后对一些仿真与实测图像进行了实验验证,并同迭代投影法中的 SART (simultaneous algebraic reconstruction technique) 算法<sup>[10]</sup>以及 TV 初值预优的凸集投影法<sup>[6]</sup>进行比较。实验结果验证了本文模型与数值算法的有效性。由于采用解耦的 Bregman 迭代算法,大大改善了图像重建结果对正则化参数的依赖。

## 1 TV 正则化的 CT 图像重建模型

针对离散的数字图像,考虑如下的成像方程:  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{g}$ , 其中,  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^{N^2}$  为未知的理想图像,  $\mathbf{g} \in \mathbf{R}^M$  为理想的投影数据矩阵,  $\mathbf{A}: \mathbf{R}^{N^2} \rightarrow \mathbf{R}^M$  为投影算子的离散形式,  $A_{i,j}$  表示第  $i$  根光线对  $j$  个像素的贡献。

最小均方误差估计问题表示为

$\arg\min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{g}\|^2$ 。最小均方误差解满足正规

方程:  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}^T\mathbf{g}$ 。当测量数据不足,那么  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  可能奇异。从统计特性上,最小均方误差估计是当观测噪声服从独立同分布的 Gaussian 分布下的最佳估计,而对大多数光学成像以及正电子成像,观测数据的噪声服从 Poisson 分布,只有当观测的信噪比较高时,泊松分布趋近于高斯分布。为了更好地利用数据的实际统计特性, Fessler<sup>[9]</sup>提出加权的最小均方误差 (WLS) 估计来近似。它通过最小化一个“W-范数”来得到:  $\arg\min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{g}\|_{\mathbf{W}}^2$ ,  $\mathbf{W}$  为噪声协方差矩阵。另一方面,对于大规模线性方程问题,往往只能采用迭代算法来求解,为了起到加速收敛的作用,提出了很多预优 (preconditional) 的方法, Jiang 等

人<sup>[10]</sup>证明这种方法往往收敛到加权最小均方误差最小模解。因此采用加权的最均方误差作为保真项。考虑到对分段光滑的图像,TV 具有能够抑制噪声的同时较好的保持图像的边缘的优点,提出 TV 正则化的 CT 图像重建模型。

TV 正则化的 CT 图像重建模型

$$\operatorname{argmin}_u J_{TV}(\mathbf{u}) \quad \text{使得 } \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (1)$$

式中  $J_{TV}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|, \nabla \mathbf{u} \in L^1(\Omega; \mathbf{R}^2)$  为  $\mathbf{u}$  的总变差,离散格式可写为

$$J_{TV}(\mathbf{u}) = \sum_{1 \leq i,j \leq N} |(\nabla \mathbf{u})_{i,j}|$$

式中  $|(\nabla \mathbf{u})_{i,j}| = \sqrt{[(\nabla \mathbf{u})_{i,j}^x]^2 + [(\nabla \mathbf{u})_{i,j}^y]^2}$

$$(\nabla \mathbf{u})_{i,j}^x = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & i < N \\ 0 & i = N \end{cases}, (\nabla \mathbf{u})_{i,j}^y = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & j < N \\ 0 & j = N \end{cases}$$

模型(1)为没有噪声情况下的理想模型。考虑到在实际的观测中不可避免存在噪声,模型(1)进一步改写为

$$\operatorname{argmin}_u J_{TV}(\mathbf{u}) \quad \text{使得 } \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{g}\|_w \leq \delta^2 \quad (2)$$

其中  $\delta$  为数据不一致性参数,用来刻画观测中的噪声水平。

## 2 模型的求解方法

利用拉格朗日乘子法可以将模型(2)转换为

$$\operatorname{argmin}_x \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{g}\|_w^2 + \lambda J_{TV}(\mathbf{u}) \quad (3)$$

其中  $\lambda$  为大于零的正则化参数,在正则项与保真项之间相互权衡。文献[3]给出了如何选取  $\lambda$  使得模型(2)和模型(3)具有相同的解。利用变分原理,我们可以得到模型(3)的 Euler-Lagrange 方程

$$-\lambda \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} \right) - \mathbf{A}^T \mathbf{W}(\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{u}) = 0 \quad (4)$$

### 2.1 最速下降法的缺点

根据最速下降法的思想,选择梯度的负方向为迭代的方向。上述方程的求解可转化为求解非线性微分方程

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \lambda \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} \right) + \mathbf{A}^T \mathbf{W}(\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{u}) \quad (5)$$

为避免  $|\nabla \mathbf{u}| = 0$  引起奇异,引入参数  $\varepsilon > 0$ ,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \lambda \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \mathbf{u}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + \varepsilon^2}} \right) + \mathbf{A}^T \mathbf{W}(\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{u}) \quad (6)$$

我们可以利用差分法对(6)进行离散,得到离散迭代格式。Huang 等人<sup>[4]</sup>给出了显式格式迭代,Wang

等人<sup>[11]</sup>给出了半隐式格式迭代算法。Huang 等人<sup>[4]</sup>分析了由于  $\varepsilon$  很小时,方程的奇异性较强,导致格式的收敛速度很慢,而另一方面参数  $\varepsilon$  选取的越小,越有利于保持重建图像的边缘。

## 2.2 解耦的 Bregman 迭代算法

### 2.2.1 代理函数法解耦求解

为了避免 TV 求导的数值计算的困难,Carter 等人<sup>[5]</sup>和 Chambolle 等人<sup>[12]</sup>提出将式(5)转化为求解其对偶问题来避免 TV 项在不可导处所带来的计算不稳定。但这种方法只能解决去噪问题,也就是只能处理  $\mathbf{A}$  为单位矩阵的情况。受 Daubechies 等人<sup>[13]</sup>和 Elad 等人<sup>[14]</sup>的启发,我们希望从模型(3)中消掉  $\mathbf{A}$ ,解耦成两个简单的子问题去求解。首先考虑我们原始的目标函数

$$\tilde{f}(\mathbf{u}; \mathbf{g}, \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{u}\|_w^2 + \lambda J_{TV}(\mathbf{u}) \quad (7)$$

为了消掉  $\|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_w^2$  项,我们引入代理函数

$$\varphi(\mathbf{u}; \mathbf{f}, \mathbf{A}) = C \|\mathbf{u} - \mathbf{f}\|_v^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{f}\|_w^2, \quad (8)$$

$$C > \|\mathbf{A}\|_{w,v}^2$$

参数  $C$  的选取要求能够保证函数  $\varphi(\mathbf{u}; \mathbf{f}, \mathbf{A})$  是严格凸的,即要求它的 Hessian 矩阵是正定的。将式(8)加到式(7),我们可以得到新的目标函数

$$\tilde{f}(\mathbf{u}; \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{u}\|_w^2 + \frac{C}{2} \|\mathbf{f} - \mathbf{u}\|_v^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{f}\|_w^2 + \lambda J_{TV}(\mathbf{u}) \quad (9)$$

按照未知变量  $\mathbf{u}$  的顺序,将式(9)改写成

$$\tilde{f}(\mathbf{u}; \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{A}) = \frac{C}{2} \|\mathbf{u}\|_v^2 - \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{W}(\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{f}) - \mathbf{C}\mathbf{u}^T \mathbf{V}\mathbf{f} + \lambda J_{TV}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{g}\|_w^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{f}\|_w^2 + \frac{C}{2} \|\mathbf{f}\|_v^2 = \frac{C}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{V}\mathbf{u} - \mathbf{u}^T [\mathbf{A}^T \mathbf{W}(\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{f}) + \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{f}] + \lambda J_{TV}(\mathbf{u}) + const = \frac{C}{2} \|\mathbf{u} - [\mathbf{f} + \frac{1}{C} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}(\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{f})]\|_v^2 + \lambda J_{TV}(\mathbf{u}) + const \quad (10)$$

式中  $const$  代表所有与变量  $\mathbf{u}$  无关的量。可以看到在新的目标函数中  $\|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_w^2$  项已经被消掉了。为了求解式(9)的极小化问题,我们可以交替求解  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{f}$ 。首先从一个初始的  $\mathbf{f}^0$  出发  $\mathbf{u}^1, \mathbf{f}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{f}^2, \dots, \mathbf{u}^k, \mathbf{f}^k, \dots$ ,交替迭代求解。其中

$$\mathbf{u}^{k+1} = \arg \min_u \frac{C}{2} \|\mathbf{u} - [\mathbf{f}^k + \frac{1}{C} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}(\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{f}^k)]\|_v^2 + \lambda J_{TV}(\mathbf{u}) \quad (11)$$

$$f^{k+1} = \arg \min_f \frac{C}{2} \|f - u^{k+1}\|_V^2 - \frac{1}{2} \|Au^{k+1} - Af\|_W^2 \quad (12)$$

式(11)为加权范数的 TV 去噪问题。通过一定的推导我们可以采用 Chambolle 等人<sup>[12]</sup>的对偶空间正交投影法的框架去求解。具体的过程如下

$$\begin{aligned} \text{设 } y^k &= f^k + \frac{1}{C} V^{-1} A^T W (g^k - Af^k), \text{ 则} \\ \arg \min_x \frac{C}{2} \|u - y^k\|_V^2 + \lambda J_{TV}(u) &\Rightarrow \\ 0 \in \partial J_{TV}(u) + \frac{C}{\lambda} V(u - y^k) &\Rightarrow \\ u \in \partial J_{TV}^* \left( \frac{C}{\lambda} V(y^k - u) \right) &\Rightarrow \\ 0 \in \partial J_{TV}^* \left( \frac{C}{\lambda} V(y^k - u) \right) + (y^k - u) - y^k & \end{aligned}$$

其中  $J_{TV}^*$  为  $J_{TV}$  的凸共轭。

$$\text{设 } w = \frac{C}{\lambda} V(y^k - u), \text{ 则}$$

$$0 \in \partial J^*(w) + \left( \frac{\lambda}{C} V^{-1} w - y^k \right) \text{ 为下述问题式 (13)}$$

的 Euler-Lagrange 方程

$$\min_w J^*(w) + \frac{\lambda}{2C} \left\| V^{-\frac{1}{2}} w - \frac{C}{\lambda} V^{\frac{1}{2}} y^k \right\|_2^2 \quad (13)$$

因此只要解

$$\begin{aligned} \min \{ \|V^{-\frac{1}{2}} \text{div}(p) - \frac{C}{\lambda} V^{\frac{1}{2}} y^k\|_2^2 : p \in Y, \\ |p_{i,j}|^2 \leq 1, i, j = 1, 2, \dots, N \} \end{aligned} \quad (14)$$

根据 Chambolle 的对偶空间正交投影法<sup>[12]</sup>原理, 最小化问题式(14) 求解如下

$$\min \{ \|V^{-\frac{1}{2}} \text{div}(p) - \frac{C}{\lambda} V^{\frac{1}{2}} y^k\|_2^2 : p \in Y, |p_{i,j}|^2 \leq 1,$$

$$\begin{cases} i, j = 1, 2, \dots, N \\ p^{(0)} = 0 \\ p_{i,j}^{(n+1)} = \frac{p_{i,j}^{(n)} + \tau \left( \nabla \left( V^{-\frac{1}{2}} \text{div} p^{(n)} - \frac{C}{\lambda} V^{\frac{1}{2}} y^k \right) \right)_{i,j}}{1 + \tau \left| \left( \nabla \left( V^{-\frac{1}{2}} \text{div} p^{(n)} - \frac{C}{\lambda} V^{\frac{1}{2}} y^k \right) \right)_{i,j} \right|} \\ i, j = 1, 2, \dots, N \\ \tau < \frac{1}{8}, y^k - \frac{V^{-1} \text{div}(p^{(n)})}{C} \rightarrow u \quad (n \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (15)$$

由于  $C$  的选取使得  $\varphi(u; f, A)$  是严格凸的, 二次凸泛函有唯一的解, 可知式(12)的解为

$$f^{k+1} = u^{k+1} \quad (16)$$

根据式(14)–(16)的推导, 我们的算法可以概括为加权均方误差  $\frac{1}{2} \|Au - g\|_W^2$  最小化和加权范数 TV 去噪两个子问题交替求解。进一步将文献[12]的 TV 去噪算子记为  $S_T$ , 其中  $S_T(Y) = \arg \min_X \frac{1}{2} \|Y - X\|_2^2 + T \|X\|_{TV}$ , 特殊的取  $V$  为单位阵, 则解耦 TV 图像重建算法可写成如下的迭代格式

$$\begin{cases} y^k = u^k + \frac{1}{C} V^{-1} A^T W (g - Au^k) \\ u^{k+1} = S_{\lambda/C}(y^k) \end{cases} \quad (17)$$

### 2.2.2 Bregman 迭代

为了加速模型式(3)的迭代求解速度, 以及避免在迭代过程中不断减小正则化参数  $\lambda$  的取值所引起的数值不稳定性, 我们进一步采用 Bregman 迭代方法。

凸泛函  $J$  在点  $v$  处和  $u$  间的 Bregman 距离<sup>[15]</sup> 定义为

$$D_J^p(u, v) = J(u) - J(v) - \langle p, u - v \rangle \quad (18)$$

其中  $p \in \partial J(v)$  为  $J$  在点  $v$  处的次梯度。

用 TV 函数的 Bregman 距离替代原问题式(4) 中的正则化项, 我们可以到 Bregman 迭代

$$\begin{cases} u^{k+1} = \arg \min_u \frac{1}{2} \|g - Au\|_W^2 + \lambda D_{J_{TV}}^p(u, u^k) \\ p^{k+1} = p^k - \partial \left( \frac{1}{2} \|g - Au^{k+1}\|_W^2 \right) \end{cases} \quad (19)$$

根据 Bregman 方法原理<sup>[16]</sup>, 最终迭代公式如下

$$\begin{cases} u^{k+1} = \arg \min_u \frac{1}{2} \|g^k - Au\|_W^2 + \lambda J_{TV}(u) \\ g^{k+1} = g^k + g - Au^k \end{cases} \quad (20)$$

与传统的求解约束优化问题的序贯策略 (continuation method) 相比, Bregman 迭代主要有两个优点<sup>[16]</sup>: 1) Bregman 迭代收敛速度快, 特别是当目标泛函中包含  $l_1$  正则化项时, 只需少许几次迭代求解无约束问题即可获得很好的结果; 2) 序贯策略需要在迭代过程中不断减小正则化参数  $\lambda$  的取值, 而  $\lambda$  值在 Bregman 迭代过程中可保持不变, 因此可以选择一个合适的  $\lambda$  值最小化子问题的条件数, 从而可提高数值算法如牛顿迭代、Gauss-Seidel 迭代的收敛速度, 同时可避免  $\lambda \rightarrow 0$  过程中序贯策略的数值不稳定性。

### 2.2.3 解耦 Bregman 迭代算法流程

综上所述,解耦 Bregman 迭代算法描述如下:

算法名称:TV 正则化 CT 图像重建的解耦 Bregman 迭代算法

算法任务:TV 正则化下 CT 图像重建

输入参数:观测到的投影图像  $\mathbf{g}$ , 离散投影矩阵算子  $\mathbf{A}$ , 权重矩阵  $\mathbf{W}, \mathbf{V}$ , 正则化参数  $\lambda$ , 最大迭代次数  $N_{SB}$ , 最大内迭代次数  $N_{LB}$ , 松弛参数  $C$ , 噪声水平参数  $\delta$

主迭代:  $\mathbf{g}^0 = 0$

For  $n = 0$  to  $n = N_{SB} - 1$

$\mathbf{u}^0 = 0, \mathbf{p}^0 = 0$

For  $k = 0$  to  $k = N_{LB} - 1$

$$\mathbf{y}^k = \mathbf{u}^k + \frac{1}{C} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} (\mathbf{g}^n - \mathbf{A} \mathbf{u}^k)$$

执行迭代式(18)得到  $\mathbf{u}^{k+1}$

End

If  $\|\mathbf{g} - \mathbf{A} \mathbf{u}^k\|_{\mathbf{W}}^2 < \delta^2$  break;

$\mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{g}^n + \mathbf{g} - \mathbf{A} \mathbf{u}^k$

End

输出: 重建图像  $\mathbf{u}^*$ , 迭代次数  $n$ , 加权均方误差  $\|\mathbf{g} - \mathbf{A} \mathbf{u}^*\|_{\mathbf{W}}^2, J_{TV}(\mathbf{u}^*)$ , 总变差  $J_{TV}(\mathbf{u}^*)$

Goldstein 等人<sup>[16]</sup>指出迭代次数  $N_{LB}$ 并不需要取很大的值,直观上,即使该子问题获得较为准确的解,但随后仍需对 Bregman 参数进行更新,这样的准确度也将被“浪费”。众多实际应用中发现迭代次数  $N_{LB}$ 取值非常小即可取得非常好的结果,事实上,Setzer<sup>[17]</sup>运用 Douglas-Rachford 极大单调算子分裂与对偶理论证明了  $N_{LB} = 1$  时算法是收敛的,内部仅迭代一次的。

## 3 实验结果与分析

对多幅测试图像进行仿真实验,检验本文模型与数值算法的有效性,并同多种现有算法进行比较,包括解析的 FBP 算法,代数 SART 算法,TV 正则化最速下降法算法。我们采用经典的 Shepp-Logan 模型进行仿真实验,图像大小为  $256 \times 256$  个像素。模拟扇形束成像,假设图像中心与旋转中心重合,光源到旋转中心的距离以及旋转中心到投影屏的距离都为 30 cm,图像尺寸为  $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ ,投影屏的大小为 30 cm 共 256 个检测单元。实验中  $0^\circ \sim 360^\circ$  均匀的采集 45 个角度的投影图像。我们可以计算最多

的测量个数为  $256 \times 45$ ,但实际中没有通过图像的光线是不能参与计算的,因此  $M < 256 \times 45$ 。图 1 中给出了实验所采用的测试原图以及仿真得到如上文所述的几何模型下扇形束投影正弦图。

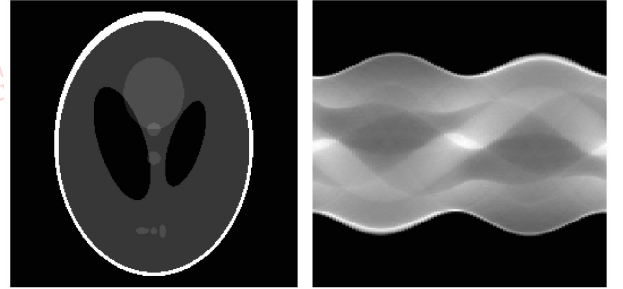


图 1 原图和模拟得到的扇形束下投影正弦图

Fig. 1 Original image and fan-beam sinogram of original image

采用与 SART 算法中相同的  $\mathbf{V}$  和  $\mathbf{W}$ ,即  $\mathbf{V}$  取单位矩阵,  $\mathbf{W}^{-1} = \text{diag}(\sum_{j=1}^{N^2} \mathbf{A}_{1,j}, \sum_{j=1}^{N^2} \mathbf{A}_{2,j}, \dots, \sum_{j=1}^{N^2} \mathbf{A}_{M,j})$ ,要保证式(12)为凸泛函,只需  $C > 1$  即可,这里选取  $C = 2$ ;投影矩阵具体离散化  $\mathbf{A}_{i,j}$  表示第  $i$  根光线穿过第  $j$  个像素的长度。依据上节的 TV 正则化 CT 图像重建的解耦 Bregman 快速算法,实验中,内部迭代次数  $N_{LB} = 4$ ,主迭代次数  $N_{SB} = 50$ ,正则化参数  $\lambda = 0.01$ 。对于 FBP 算法采用 Hamming 窗的 Ram-Lak 滤波器,代数 SART 算法参见文献[10],TV 正则化最速下降算法对式(8)离散化采用显式迭代格式,并假设原始图像的灰度范围已知,TV 迭代后每一步都进行凸集投影运算,取步长  $t = 1$ ,正则化参数  $\lambda$  的选取采用文献[6]中的方法。SART 算法和 TV 正则化最速下降算法也均迭代 200 次。

图 2、3 分别对理想的情况下和有噪声的情况下对多种算法的重建结果进行了比较。实验中(图 3),我们在观测图像中加入 5% 的高斯随机噪声:  $\mathbf{g}^{\text{noisy}}(t) = \mathbf{g}(t) + \boldsymbol{\eta}_t$ ,其中,  $\boldsymbol{\eta}_t \sim \sigma_t \text{Normal}(0, 1)$ ,  $\sigma_t = \varepsilon \mathbf{g}(t)$ ,  $\varepsilon = 0.05$ 。

图 4 中,我们还给出了总的目标函数的能量随着迭代的次数而衰减的曲线图,可以看出 SART 算法由于收敛到最小模解,所以迭代到一定次数图像的总变差不减反增,也就是说随着迭代次数的增加,虽然误差变小但是图像的边缘变的模糊;我们的算法相比 TV 正则化最速下降法算法衰减得更快。

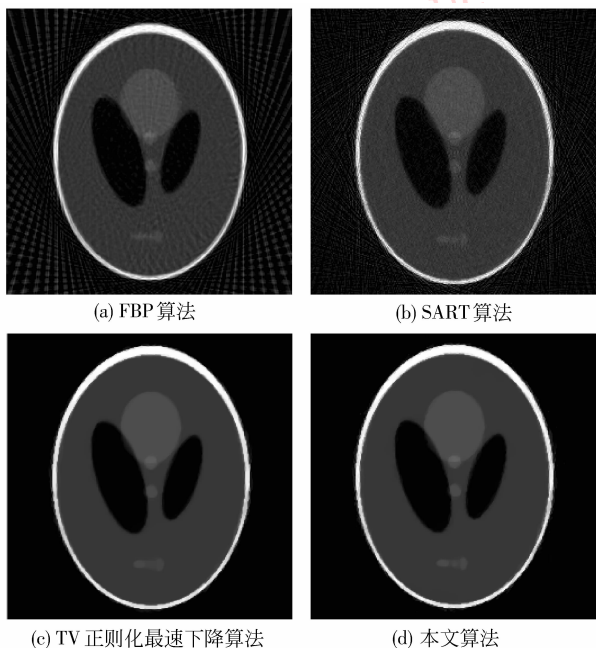


图 2 无噪声的情况下重建算法的结果比较  
 Fig. 2 Images reconstructed by use of different algorithms under ideal condition

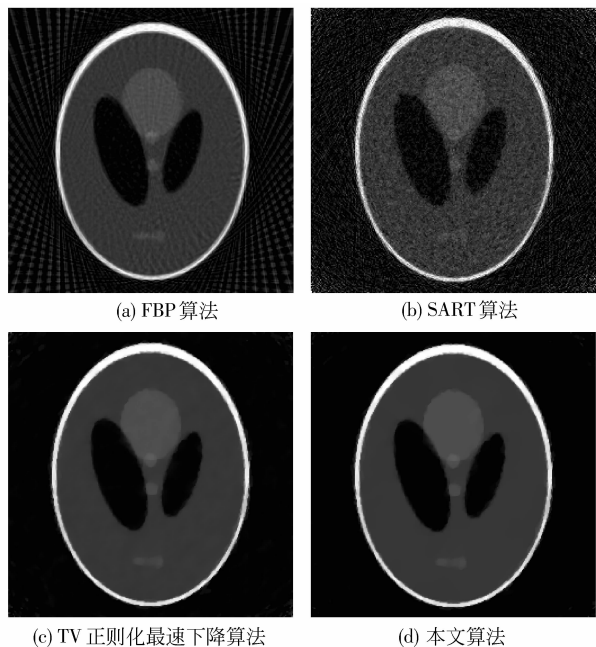


图 3 正弦图加入 5% 的高斯随机噪声情况下重建算法的结果比较  
 Fig. 3 Images reconstructed by use of different algorithms adding a zero mean white Gaussian noise with the variance  $\sigma = 5\%$  to the project data

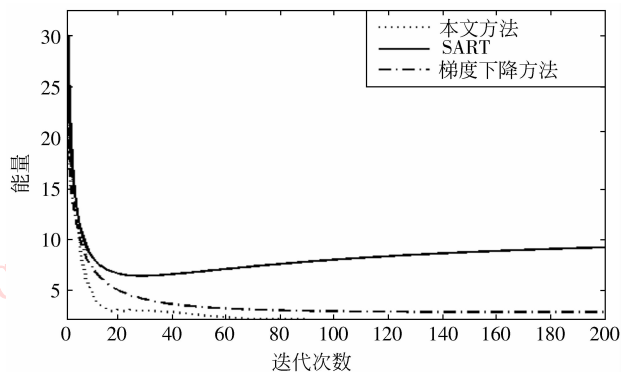


图 4 3 种不同方法的衰减图  
 Fig. 4 The convergence of three different methods

### 4 结 论

研究了采用误差的加权范数作为数据保真项, TV 作为正则项的断层图像重建模型, 提出一种解耦的 Bregman 迭代算法。在扇形束少角度欠采样的条件下, 对理想情况和高斯噪声情况下进行了仿真测试, 并同多种算法进行了比较, 实验结果表明, 由于采用 TV 正则项, 与传统的 FBP 解析算法和 SART 代数重建算法相比, 改善了重建图像的质量; 由于采用了 Chambolle 的对偶空间正交投影法的框架去求解加权 TV 去噪子问题, 以及解耦 Bregman 方法, 我们的算法与 TV 最速下降法相比, 收敛速度快, 正则化参数的选取简单。

从目前的研究现状和发展趋势来看, 传统的解析 CT 重建方法已经不能满足工程实际的全部需要, 尤其是对数据不足的 CT 检测要求, 使得探索研究快速的稳定的迭代算法势在必行。本文的策略与算法也可应用于局部重建和 3 维锥形束模型的求解, 相关的内容将在后续论文中继续讨论。

### 参考文献 (References)

[ 1 ] Feng B, Fessler J A, Pretorius P H. Evaluation of the ordered-subset transmission (OSTR) algorithm for transmission imaging on SPRCT systems using axially overlapping cone-beams [J]. IEEE Transactions on Nuclear Science, 2006, 53: 7227-7229.  
 [ 2 ] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. Phys. D, 1992, 60 : 259-268.  
 [ 3 ] Candes E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Trans. Inf. Theory, 2006, 52: 489-509.

- [ 4 ] Huang Yumei, Michael K N, Wen Youwei. A fast total variation minimization method for image restoration [J]. Multiscale Modeling and Simulation, 2008, 7 (2): 774-795.
- [ 5 ] Carter J. Dual Methods for Total Variation-Based Image Restoration[D]. UCLA, 2002.
- [ 6 ] Sidky E Y, Kao C M, Pan Xiaochan. Accurate image reconstruction from few-views and limited-angle data in divergent-beam CT[J]. J. X-ray Sci. Tech., 2006, 14: 119-139.
- [ 7 ] Yu Hengyong, Wang Ge. Compressed sensing based interior tomography [J]. Physics in Medicine and Biology, 2009, 54: 2791-2805.
- [ 8 ] Setzer S. Split Bregman algorithm, Douglas-Rachford splitting and frame shrinkage [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2009, 5567: 464-476.
- [ 9 ] Fessler J A. Penalized weighted least-squares image reconstruction for positron emission tomography[J]. IEEE Trans. Med. Imaging, 1994, 13: 290-299.
- [ 10 ] Jiang Ming, Wang Ge. Convergence studies on iterative algorithms for image reconstruction [J]. IEEE Trans. on Medical Imaging, 2003, 22(5): 569-579.
- [ 11 ] Wang Yilun, Yin Wotao, Zhang Yin. A Fast Algorithm for Image Deblurring with Total Variation Regularization [R]. Los Angeles, CA, UCLA, 2007.
- [ 12 ] Chambolle A. An algorithm for total variation minimization and applications [J]. J. Math. Imaging Vision, 2004, 20: 89-97.
- [ 13 ] Daubechies I, Defrise M, De Mol C. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2004, 57(11): 1413-1457.
- [ 14 ] Elad M, Matalon B, Shtok J, et al. A wide-angle view at iterated shrinkage algorithms [C]//Proc. SPIE Wavelets XII. Bellingham, WA; SPIE, 2007, 6701: 67010201-67010219.
- [ 15 ] Osher S, Burger M, Goldfarb D, et al. An iterative regularization method for total variation based image restoration [J]. MMS. 2005, 4:460-489.
- [ 16 ] Goldstein T, Osher S. The Split Bregman Algorithm for L1 Regularized Problems[R]. Los Angeles, CA, UCLA, 2008.
- [ 17 ] Setzer S. Split bregman algorithm, Douglas-Rachford splitting and frame shrinkage [J]. Lecture Notes in Computer Science. 2009, 5567: 464-476.