

中图法分类号: TN911.73 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2011)07-1317-09

论文索引信息: 徐梦溪, 徐枫, 黄陈蓉, 李铭. 优化-最小求解的广义总变分图像复原 [J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(7): 1317-1325

优化-最小求解的广义总变分图像复原

徐梦溪¹⁾, 徐枫²⁾, 黄陈蓉¹⁾, 李铭¹⁾

¹⁾(南京工程学院计算机工程学院, 南京 211167) ²⁾(河海大学计算机与信息学院, 南京 210098)

摘要: 在代价函数中嵌入总变分正则项是解决图像复原中不适定问题的一种有效方法。但是,总变分正则化考虑的仅是一阶而不是高阶邻域像素变分关系;另外,总变分的开方形式还给基于总变分代价函数的优化带来了困难。为此,提出一种基于优化-最小算法的广义总变分正则化图像复原新方法,以克服目前存在的问题。该方法保留了总变分正则化方法能够除噪声保边缘的重尾特征,同时借鉴了双边总变分双重加权机制,从而推导出总变分正则项在邻域范围上的推广形式。该方法还针对广义总变分正则项优化过程中存在的求解瓶颈,提出采用优化-最小算法求得上界函数以逐次逼近最优解。实验结果表明,该方法取得了较好的复原效果,使改善信噪比指标达到 2 dB 左右。

关键词: 总变分; 广义总变分; 优化-最小算法; 图像复原; 反问题; 双边滤波

Image restoration using majorization-minimization algorithm based on generalized total variation

Xu Mengxi¹⁾, Xu Feng²⁾, Huang Chenrong¹⁾, Li Ming¹⁾

¹⁾(School of Computer Engineering, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167 China)

²⁾(College of Computer and Information Engineering, Hohai University, Nanjing 210098 China)

Abstract: Total variation (TV) regularization is an effective tool to resolve ill-posed problem in image restoration. But the TV only considers the first order variation with the higher order variations ignored. Furthermore, the form of TV induces a difficulty in optimization. Accordingly, a method of image restoration based on generalized TV (GTV) using MM algorithm is proposed to overcome the problems of TV. The GTV has not only the heavy tail property of TV, but also bilateral weights of bilateral TV (BTW). In fact, it is an extended form of the TV. For the optimization problem of GTV, we adopt the majorization-minimization (MM) algorithm to overcome its difficulty. Experimental results show that the proposed method achieves effective performance with about 2 dB ISNR (improvement of SNR).

Keywords: total variation; generalized TV; majorization-minimization algorithm; image restoration; inverse problem; bilateral filter

0 引言

在遥感、监控、天文和医学成像过程中,由于光学器件和环境扰动等原因,模糊与噪声会广泛地影

响着最终图像的质量。因此,去模糊和去噪是图像复原技术需要解决的主要问题。图像复原的数学本质可以由反问题模型来刻画和说明。反问题求解的最大困难在于大多数反问题都呈现出不适定性,也就是说反问题的算子矩阵即图像的降质矩阵是奇异

收稿日期:2010-07-12;修回日期:2010-12-09

基金项目:国家自然科学基金项目(60872096);江苏省自然科学基金项目(BK2009352);中央高校基本科研业务费专项基金项目(2010B16414)。

第一作者简介:徐梦溪(1983—),女。2007年荷兰 UNESCO-IHE 学院获信息学专业硕士学位,主要研究方向为图像处理与分析。E-mail:mengxi.xu@gmail.com;xufengxz@gmail.com。

或接近奇异的。这就导致了求得的结果对于微小扰动极其敏感,在图像上的具体表现就是即使观测图像含有低强度噪声,也会使复原结果包含大量高强度噪声而难以接受甚至还不如观测图像。为了解决反问题的不稳定性,大量的技术方法应运而生,其中大多数都是基于正则化技术^[1]。这是一种迄今为止相当有效的方法,其基本思想就在于用一种正则项作为原始待估图像的先验知识来约束重构图像的强度分布,尽可能地减少噪声的影响。

正则项的选择至今仍是一个开放问题。由于自然图像边缘和纹理特征的存在,其强度分布并不是全局平滑而是分片平滑的。性能卓越的正则项应当是在有效抑制噪声的同时能够识别并保护边缘或非连续点,从而避免它们被过度平滑。许多文献都提出了有效的正则项形式,例如:基于马尔可夫随机场(MRF)正则项刻画了图像随机场的局部 Markov 性^[2-3];基于小波的正则先验,按照贝叶斯方式在小波域对图像复原进行了刻画^[4-5];Tikhonov 正则项等价于标准 Laplace 热传导方程解,能够实现图像各向同性平滑^[6-7];总变分(TV)正则项定义了一种细节保存的图像先验^[8-11];双边总变分(BTV)正则项扩展了 TV 所影响的邻域^[6,12],以及随图像结构改变的核回归自适应正则项^[13]。

在众多已报道的正则化方法中,TV 正则项以其合适的重尾特性,能够较好地解决非连续点的过度平滑。不仅如此,基于 TV 的方法在图像处理中的修补、非盲解卷积、盲解卷积,以及多光谱处理等方面都表现出了良好的性能。然而,由于 TV 正则的开方形式使得微分很难进行,造成了最终优化求解的困难。另外,TV 正则仅对相邻像素建立变分关系,对于更大的邻域没有给出有效变分形式。目前,大量研究和文献都在试图解决优化和扩展邻域问题。其中,Farsi 等人^[6]提出的 BTV 方法通过绝对值近似解决了优化问题,同时吸收了双边滤波的思想^[12]将 TV 变分关系扩展为非一阶形式。Tian 等人^[14]提出一种随机方法来达到优化的目的,用 MCMC(Markov chain Monte Carlo)随机生成一系列可靠的像素样本,而后取其均值得到较为稳定而准确的结果。Oliveira 等人^[15]提出的优化-最小(MM)算法,吸收了期望-最大化(EM)算法思想^[16],利用一系列较简单的优化来代替 TV 中难以解决的优化问题,使得精确求解 TV 变得可行。

借鉴 BTV 正则化中的距离和灰度双重加权机

制,提出一种基于广义总变分(GTV)正则化的图像复原方法。GTV 不像 BTV,不是对 TV 方法的近似推广而是一种准确推广,这样提高了邻域像素相关性的准确度。对于 GTV 面临的类似 TV 优化求解的困难,这里采用 MM 算法加以解决,从而保证了结果的准确性和有效性。实验结果表明,提出的方法具有较好的抑制噪声和保持边缘的能力,其改善信噪比(ISNR)的指标优于基于 TV 正则化和 BTV 正则化图像复原的结果指标。

1 问题描述

1.1 图像复原的求解框架

图像复原的目的是从观测到的已知降质(模糊、噪声)图像 \mathbf{y} 重构估计出未知原始(清晰无噪)图像 \mathbf{x} ,图像的降质过程表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1)$$

式中, \mathbf{x} 表示待重构原始图像, \mathbf{H} 表示线性算子, \mathbf{n} 表示均值为 0,方差为 σ^2 的独立同分布高斯白噪声。

直观上,可依照最小二乘法求解 \mathbf{x} ,这样可使整体误差达到最小。但是,通常 \mathbf{H} 为奇异或不可逆矩阵,求解问题就变成了不适定或病态的反问题。这时即使 \mathbf{n} 是微小的扰动,也会使估计出的 \mathbf{x} 分布大量高强度的噪声。为了得到一幅视觉上可接受的结果,需要增加正则项,求解公式为

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{ \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda P(\mathbf{x}) \} \quad (2)$$

式中: $\|\mathbf{z}\|_2^2$ 是指欧氏范数,前面一项称为保真项; $P(\mathbf{x})$ 代表惩罚函数,也就是上面所说的正则项或正则化函数,通常 $P(\mathbf{x})$ 表现为一种高通滤波形式; λ 表示正则参数,它的作用是平衡正则项和保真项,如果 λ 变大,重建图像趋于光滑,反之,数据拟合误差变小。

1.2 正则化函数的选取原则

一般情况下,图像不可能全局平滑而是总会包含边缘和纹理等非连续点,这是一幅图像的重要特征所在,因此可以将一般图像看做是分片光滑的。选取正则化函数的原则就是能在平滑噪声的同时保持非连续点的特性。统计分析结果表明,高通滤波后的图像中非连续点的值较大,而平滑处即使含有噪声其值也小于非连续点值。因此,对于高频分量值较大的区域要降低它的相对惩罚强度以保护非连续点。

常用的 Tikhonov 正则化函数对非连续点处的高频分量惩罚非常严重,其表达式为

$$P(\mathbf{x}) = \|\Gamma\mathbf{x}\|_2^2 = |(\Gamma\mathbf{x})_{(1)}|^2 + |(\Gamma\mathbf{x})_{(2)}|^2 + \dots \quad (3)$$

通常, Γ 是对图像的高通滤波算子, $\Gamma\mathbf{x}$ 可看做是相应的高频分量图像, 式(3)的本质是取高频分量的二次方和。由于非连续点处的高频分量数值较大, 平方处理后数值会更大, 如图 1 中实线所示, 在优化求最小值时惩罚非常严重, 使得复原图像的非连续点过于平滑。因此, Tikhonov 正则化函数并不是理想的正则项。需要改进的是降低正则化函数曲线在高频分量较大值处的斜率, 反映在图上就是使曲线尾部尽可能压低, 呈现所谓重尾特征。

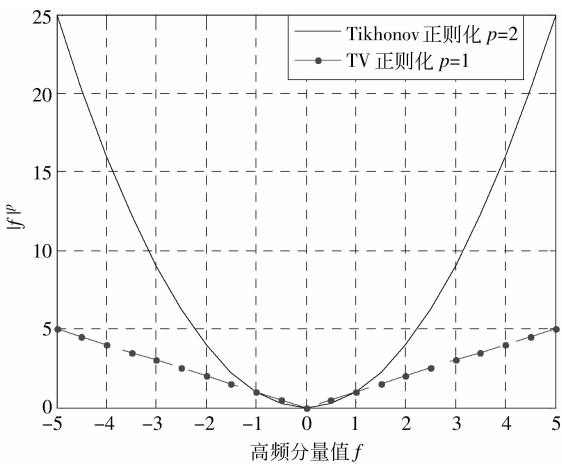


图 1 两种正则化函数曲线比较

Fig. 1 Comparison between two regularization functions' curve

针对 Tikhonov 正则项的不足 Rudin 等人提出一种总变分正则项, 表达式为^[8-10]

$$P(\mathbf{x}) = \text{TV}(\mathbf{x}) = \|\nabla\mathbf{x}\|_1 = |(\nabla\mathbf{x})_{(1)}| + |(\nabla\mathbf{x})_{(2)}| + \dots = \sum_i |(\nabla\mathbf{x})_{(i)}| = \sum_i \sqrt{(\Delta_i^h\mathbf{x})^2 + (\Delta_i^v\mathbf{x})^2} \quad (4)$$

式中, $\Delta_i^h\mathbf{x}$ 和 $\Delta_i^v\mathbf{x}$ 分别表示在 i 像素处水平和垂直方向上的一阶差分, 因此, $\nabla\mathbf{x}$ 就是 \mathbf{x} 的梯度, 也可看做是高频分量图像。

TV 正则化函数以梯度模相加形式存在, 因此, 惩罚函数本质是线性的, 如图 1 带点线所示, 相比 Tikhonov 正则项, 其函数曲线上升较慢, 满足重尾要求。这一性质使得 TV 在消除噪声的同时能够保持非连续点的非连续性, 因此, 更适用于分片光滑的自然真实图像。

2 广义总变分正则项

如前所述, 总变分 (TV) 正则项在去噪同时较好

地保持了边缘锐度, 是一种比较理想的正则化方法。为了使 TV 正则化具有更广的适用性, 很多学者提出了推广方案, 例如, Rodriguez 等人在正则化范数方面进行了推广, 提出一种范数意义上的广义 TV 正则化^[17]; Kumar 等人提出 TSV (total subset variation) 的概念, 试图从子集合的角度来推广 TV^[18]。事实上, TV 正则项在应用过程中也表现出了某些不足: 1) 仅表征了像素的一阶差分, 也即只对相邻像素建立联系, 对于更大范围的邻域像素关系并未涉及; 2) 由式(4)看出在优化求解过程中, TV 正则项很难对 \mathbf{x} 进行求导, 这给数值优化计算带来了不便。针对上述问题, 双边总变分 (BTV) 对 TV 正则项进行了改进。在借鉴 BTV 思想的基础上提出一种邻域扩展的广义总变分正则项。下面首先简要介绍 BTV 的思想, 而后给出本文所提出的广义 TV 正则项。

2.1 双边总变分的思想

近年来, 由 Farsiu^[6] 提出的 BTV 正则项受到国内外学者的关注。BTV 吸收了 Tomasi 的双边滤波器思想^[12], 考虑到中心像素与临近像素的距离和灰度关系。这样扩展了正则项的影响邻域, 也即将中心像素与更多的邻域像素建立了联系, 提高估计的准确性。当然, 随着距离的增大, 中心像素与临近像素关系的权重将会逐步减小。正是这种双重正则机制, 保证了正则项去噪保边缘的能力。BTV 的表达式如下:

$$\text{BTV}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \alpha^{|l|+|m|} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_x^l \mathbf{s}_y^m \mathbf{x}\|_1 \quad (5)$$

\mathbf{s}_x^l 和 \mathbf{s}_y^m 分别表示向 x 方向移动 l 个像素和向 y 方向移动 m 个像素, $0 < \alpha < 1$ 是距离度量参数。Farsiu 指出 TV 可以近似为 BTV 的一个特例, 即当 $l=1$, $m=0$ 和 $l=0, m=1$ 且 $\alpha=1$ 时,

$$\text{BTV}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_x^1 \mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_y^1 \mathbf{x}\|_1 \approx \text{TV}(\mathbf{x}) \quad (6)$$

这样使得正则项的求导变得可行, 但它是以近似方式解决了数值计算中的优化瓶颈。也可以说, BTV 是 TV 的一种近似推广。

2.2 改进的 BTV——广义 TV 正则项

BTV 中对 TV 的近似是为了解决优化求解的瓶颈。然而, 如果有一种优化算法能够解决 TV 寻优求解的困境 (下节将给出这种优化算法), 那么准确的 TV 推广将变得可行。

另外, 图像中像素间的相关性在某种程度上取决于它们的几何距离, 距离越大相互影响越小, 反之影响越大。注意到, 在 BTV 中 α 的指数是 1-范数形

式并不能严格度量像素间的距离,使得几何距离不同的像素有可能对中心像素产生相同的影响,这不严格符合随机场的马尔可夫性质。如图 2 所示,设像素 A 与像素 B 之间的距离为 d_1 ,像素 A 与像素 C 之间的距离为 d_2 ,那么 $d_1 > d_2$ 。这里距离度量采用的是更准确的欧氏范数 $\sqrt{l^2 + m^2}$ 形式。从此意义上来说,C 对 A 应当比 B 对 A 产生更大的影响。但是,按照 BTV 中的距离计算标准 $|l| + |m|$,有 $d_1 = d_2$ 的结果,这样 C 和 B 对 A 具有同样的相关度,显然不准确。

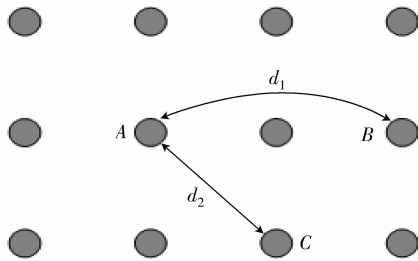


图 2 像素之间距离表示示意图

Fig. 2 Schematic representation illustrating the distance between different pixels

为了验证两种范数对复原结果的不同影响,分别以欧氏范数与 1-范数为 α 的指数做 BTV 正则化复原实验。实验对 Lena 图像采用核函数 $h = [1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1]^T [1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1] / 256$ 进行模糊后,分别加入标准差为 12、15 和 18 的 3 种高斯白噪声,产生 3 幅降质图像。对 3 幅图像采用不同范数的 BTV 进行复原。采用改善信噪比 $ISNR = 10 \lg(\|y - x\|_2^2 / \|\hat{x} - x\|_2^2)$ 对图像复原结果进行评价。评价指标结果如表 1 所示。

表 1 不同范数 BTV 复原的 ISNR 比较

Tab. 1 Comparison of ISNR between different norm BTV

	/dB		
	噪声标准差		
	12	15	18
1-范数 BTV	2.674 06	2.639 17	2.390 65
欧氏范数 BTV	3.021 1	3.723 24	4.230 3

从表中结果可以看出,BTV 的指数采用欧氏范数形式比 1-范数形式具有更好的复原效果。

基于上述理论和实验分析,在借鉴 BTV 双重正则机制的基础上,给出 GTV 正则项的表达式如下

$$GTV(x) = \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha^{\sqrt{l^2+m^2}} TV_{lm}(x) = \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha^{\sqrt{l^2+m^2}} \|\nabla_{lm}x\|_1 \quad (7)$$

$$TV_{lm}(x) = \|\nabla_{lm}x\|_1 = \sum_i \sqrt{(\Delta_i^l x)^2 + (\Delta_i^m x)^2} \quad (8)$$

式中, $\Delta_i^l x$ 和 $\Delta_i^m x$ 分别表示在 i 像素处水平和垂直方向上的 l 阶和 m 阶差分。

从式(7)可以看出,GTV 正则项至少有以下优点:

1) 类似于 BTV 正则项,不仅考虑了灰度相关性而且还考虑了距离相关性,使得基于 GTV 正则化求解要优于基于 TV 正则化求解。

2) 当 $l=1, m=1$ 且 $\alpha=1$ 时,

$$GTV(x) = TV_{11}(x) = \|\nabla_{11}x\|_1 = TV(x) \quad (9)$$

与式(6)相比 TV 可以用 GTV 的一个特例准确表示,不再需要近似。因此,从这个角度来看,GTV 比 BTV 更准确地推广了 TV。

3) 距离度量参数 α 的指数采用欧氏范数 $\sqrt{l^2 + m^2}$ 而不是像 BTV 采用 1-范数 $|l| + |m|$,这样就更为准确地刻画了像素之间的距离。

至此,在代价函数中加入 GTV 正则项,可以得到总的求解 x 的代价函数为

$$L(x) = \|y - Hx\|_2^2 + \lambda GTV(x) \quad (10)$$

3 基于优化-最小算法的 GTV 图像复原方法

如式(9)所示,由于广义总变分(GTV)正则项是 TV 正则项的准确推广,因此 GTV 正则项也是以平方根形式存在,要对其求导非常困难,从而使共轭梯度寻优算法无法采纳。另外,式(10)不是严格凸的,求解会产生不唯一的结果。近年来,在解决这一类优化难题方面出现了大量的研究和成果。而优化-最小(MM)算法运用类似 EM 的迭代思想^[15-16],化难为易,逐步逼近最优解,取得了较好的效果。下面先简要介绍一下 MM 算法的核心思想,然后基于 MM 算法对 GTV 正则化图像复原的求解方法进行推导并给出算法步骤。

3.1 MM 算法

假设需要优化最小的代价函数 $L(x)$,并且 $L(x)$ 难以用通常的共轭梯度算法进行寻优。此时可以用一个易于采用共轭梯度寻优且与 $L(x)$ 相关的函数 $Q(x; x')$ 来求解,形式如下^[15]:

$$\hat{x}^{(i+1)} = \arg \min_x Q(x; \hat{x}^{(i)}) \quad (11)$$

式中, $Q(x; x') \geq L(x)$,当 $x = x'$ 时,等号成立。可

以将 $Q(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$ 称为 $L(\mathbf{x})$ 的上界或优化函数,利用它使 $L(\mathbf{x})$ 按下式逐步减小,最终达到全局最小值。

$$L(\hat{\mathbf{x}}^{(t+1)}) \leq Q(\hat{\mathbf{x}}^{(t+1)}; \hat{\mathbf{x}}^{(t)}) \leq Q(\hat{\mathbf{x}}^{(t)}; \hat{\mathbf{x}}^{(t)}) = L(\hat{\mathbf{x}}^{(t)}) \quad (12)$$

可以看出,用 MM 算法求最小值的关键是找到一个合适的 $Q(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$,使 $Q(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$ 与 $L(\mathbf{x})$ 相比能够容易地寻优,即形式上是严格凸的。图 3 给出了 $Q(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$ 与 $L(\mathbf{x})$ 关系的直观表示。

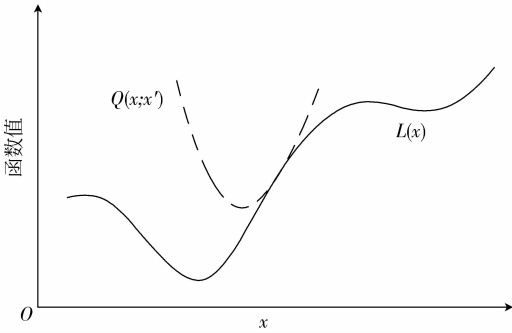


图 3 $Q(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$ 与 $L(\mathbf{x})$ 关系示意图

Fig.3 The relation between $Q(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$ and $L(\mathbf{x})$

3.2 基于优化-最小算法的 GTV 图像复原方法推导与求解步骤

GTV 正则化复原的求解困境在于正则项的开方形式,如果找到一个 GTV 正则项的严格凸的上界函数,那么问题就可由 MM 算法解决。

经过分析,可以得出开方表达式有如下特点

$$\sqrt{s} \leq \sqrt{s'} + \frac{s - s'}{2\sqrt{s'}} \quad (13)$$

当 $s = s'$ 时,等式成立,右端是左端的上界函数。利用这个不等式,式(8)可写为

$$\begin{aligned} TV_{lm}(\mathbf{x}) &\leq \sum_i \left(\sqrt{(\Delta_i^{lh} \mathbf{x}^{(t)})^2 + (\Delta_i^{mv} \mathbf{x}^{(t)})^2} + \frac{[(\Delta_i^{lh} \mathbf{x})^2 + (\Delta_i^{mv} \mathbf{x})^2] - [(\Delta_i^{lh} \mathbf{x}^{(t)})^2 + (\Delta_i^{mv} \mathbf{x}^{(t)})^2]}{2\sqrt{(\Delta_i^{lh} \mathbf{x}^{(t)})^2 + (\Delta_i^{mv} \mathbf{x}^{(t)})^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \frac{(\Delta_i^{lh} \mathbf{x})^2 + (\Delta_i^{mv} \mathbf{x})^2}{\sqrt{(\Delta_i^{lh} \mathbf{x}^{(t)})^2 + (\Delta_i^{mv} \mathbf{x}^{(t)})^2}} + K = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i ((D^{lh} \mathbf{x})_i^2 + (D^{mv} \mathbf{x})_i^2) w_{lmi}^{(t)} + K \quad (14) \end{aligned}$$

式中, K 为与 \mathbf{x} 不相关的常数, $D^{lh} \mathbf{x}$ 和 $D^{mv} \mathbf{x}$ 分别表示水平和垂直方向上的 l 阶和 m 阶差分,

$$w_{lmi}^{(t)} = \frac{1}{\sqrt{(\Delta_i^{lh} \mathbf{x}^{(t)})^2 + (\Delta_i^{mv} \mathbf{x}^{(t)})^2}} \quad (15)$$

由此可以得到式(10)的上界函数,写成

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}; \mathbf{x}^{(t)}) &= \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \\ &= \frac{1}{2} \lambda \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \alpha^{\sqrt{l^2+m^2}} \sum_i ((D^{lh} \mathbf{x})_i^2 + \\ &= (D^{mv} \mathbf{x})_i^2) w_{lmi}^{(t)} + \lambda K \quad (16) \end{aligned}$$

式中, $Q(\mathbf{x}; \mathbf{x}^{(t)})$ 是关于 \mathbf{x} 二次函数,显然是严格凸的,因此,比较容易全局优化最小。用式(11)不断交叉迭代,就可以得到噪声抑制性能良好且保持非连续点的原始估计图像 \mathbf{x} 。

下面给出利用 MM 算法对基于 GTV 正则化图像复原优化求解的具体步骤:

- 1) 设定 MM 算法迭代收敛准则、共轭梯度算法迭代收敛准则,以及正则化参数 λ ;
- 2) 采用维纳滤波器对降质图像进行解卷积作为图像的初始估计 $\mathbf{x}^{(0)}, t=0$;
- 3) 由 $\mathbf{x}^{(t)}$ 按式(15)计算 $w_{lmi}^{(t)}$;
- 4) 根据式(16)计算出代价函数的上界函数 $Q(\mathbf{x}; \mathbf{x}^{(t)})$;
- 5) 用共轭梯度算法对 $Q(\mathbf{x}; \mathbf{x}^{(t)})$ 迭代寻优,得到原始图像的估计 $\mathbf{x}^{(t+1)}$;
- 6) 如果满足 MM 迭代收敛准则,则停止迭代;否则, $t = t + 1$, 返回到第 3) 步循环。

4 实验与分析

给出了以下 4 组实验来表明本文提出方法的有效性。在实验中,将采用直观图像和改善信噪比 (ISNR) 两个角度来评价图像复原方法的性能,改善信噪比定义如下

$$ISNR = 10 \lg(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2 / \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2) \quad (17)$$

式中, \mathbf{x} 为原始图像, \mathbf{y} 为退化图像, $\hat{\mathbf{x}}$ 为复原图像。

在第 1 组实验中,首先将一幅清晰遥感图像模拟变为模糊并被噪声污染的退化图像,模糊核函数设置为 $\mathbf{h} = [1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1]^T [1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1]/256$, 噪声是标准差为 7 的高斯白噪声。接着,分别采用 TV 正则化和 $p=3$ 的 GTV 正则化对模拟的退化图像进行复原。迭代过程运用的都是 MM 算法,正则化参数使用了文献[15]中的自适应形式。TV 正则化复原中 $\lambda = 2.5 \times 10^6 / (TV(\mathbf{x}^{(t)}) + 1)$, GTV 正则化复原中 $\lambda = 2.5 \times 10^6 / (GTV(\mathbf{x}^{(t)}) + 1)$ 。图 4 和表 2 分别给出了复原图像直观结果和评价指标。实验终止时 TV 正则化复原共迭代 24 次, GTV 正则化复原共迭代 26 次,为了便于比较,表格中分别取第 5 ~ 24 次的迭代结果。为了表明本文所提方法对不同级别噪声污染图像的复原效果,第 2 组实验用同一遥感图

像模拟了噪声标准差为 3 的退化图像,TV 正则化复原中 $\lambda = 4.7 \times 10^5 / (\text{TV}(\mathbf{x}^{(t)}) + 1)$,GTV 正则化复原中 $\lambda = 4.7 \times 10^5 / (\text{GTV}(\mathbf{x}^{(t)}) + 1)$,按第 1 组实验的方式对其重做实验。图 5 和表 3 分别给出了实验结果,TV 正则化复原共迭代 24 次,GTV 正则化复原共迭代 26 次,表格中数据同样按照前一实验的原则选取。

另外,根据表格中的评价数据,还绘制了 ISNR 曲线如图 6 所示。曲线图直观的表明两种正则化方法都是向着最优的方向迭代。而且对于不同的噪声,GTV 正则化复原的改善程度都要优于 TV 正则化复原。

第 3 组实验,采用标准测试图 Lena,对维纳复

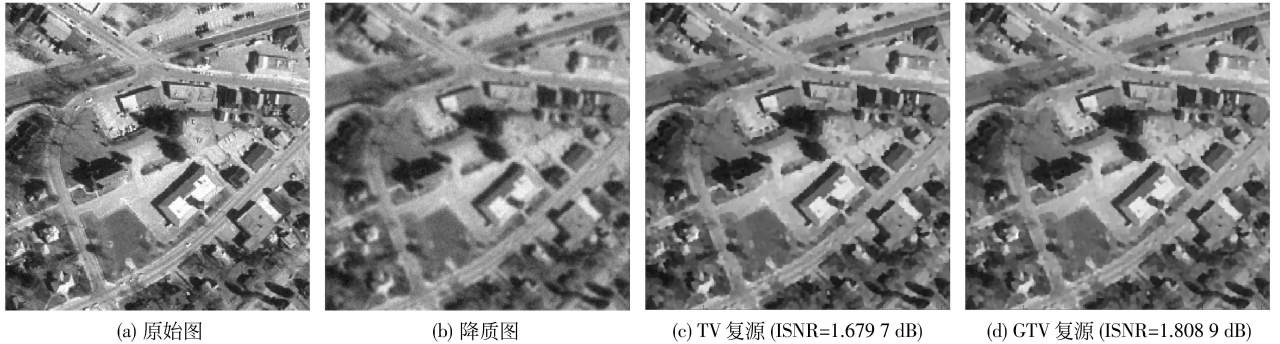


图 4 标准差为 7 的高斯白噪声污染下的复原结果

Fig. 4 The restoration results from the degraded image with white Gaussian noise with standard deviation 7

表 2 高斯白噪声(标准差为 7)污染下复原结果的 ISNR 值

Tab.2 The ISNR of the restored images from the degraded image with white Gaussian noise with standard deviation 7

迭代次数	TV 正则化迭代结果的 ISNR 值/dB				GTV 正则化迭代结果的 ISNR 值/dB			
5 ~ 8	-4.024 3	-3.920 5	-0.602 9	0.506 9	-3.924 1	-3.806 3	-0.326 7	0.729 5
9 ~ 12	0.986 4	1.167 6	1.245 1	1.508 0	1.115 0	1.277 2	1.350 6	1.670 2
13 ~ 16	1.589 3	1.651 2	1.673 7	1.671 7	1.759 3	1.789 2	1.802 6	1.807 1
17 ~ 20	1.679 3	1.679 3	1.679 3	1.679 7	1.803 5	1.808 8	1.808 8	1.808 8
21 ~ 24	1.679 7	1.679 7	1.679 7	1.679 7	1.808 8	1.808 9	1.808 9	1.808 9

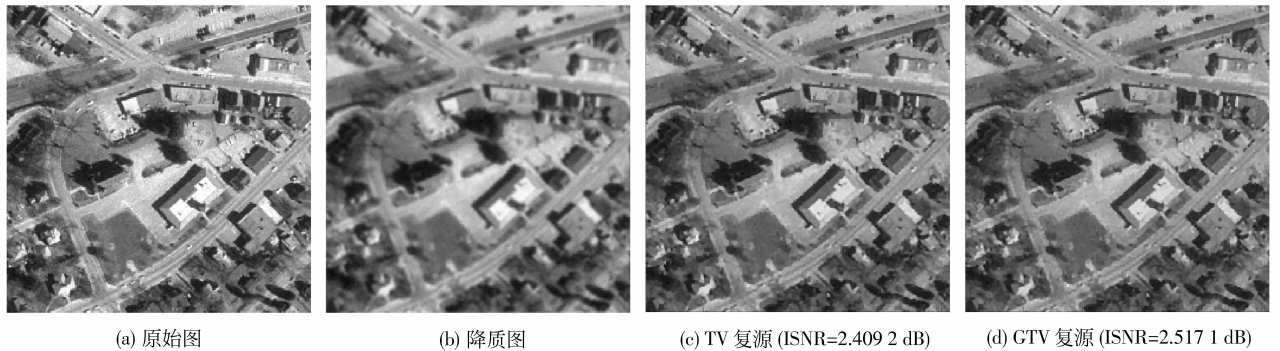


图 5 标准差为 3 高斯白噪声污染下的复原结果

Fig. 5 The restoration results from the degraded image with white Gaussian noise with standard deviation 3

表 3 高斯白噪声(标准差为 3)污染下复原结果的 ISNR 值

Tab.3 The ISNR of the restored images from the degraded image with white Gaussian noise with standard deviation 3

迭代次数	TV 正则化迭代结果的 ISNR 值/dB				GTV 正则化迭代结果的 ISNR 值/dB			
5 ~ 8	-3.528 5	-3.404 7	-0.674 3	0.960 4	-3.685 1	-3.547 1	-0.005 1	1.111 5
9 ~ 12	1.505 5	1.717 8	1.745 1	2.153 5	1.533 3	1.711 1	1.796 4	2.186 5
13 ~ 16	2.308 5	2.356 3	2.374 8	2.374 8	2.341 7	2.404 0	2.432 9	2.446 3
17 ~ 20	2.409 2	2.409 2	2.409 2	2.409 2	2.460 5	2.460 9	2.498 4	2.498 5
21 ~ 24	2.409 2	2.409 2	2.409 2	2.409 2	2.498 5	2.517 0	2.517 1	2.517 1

原、基于 CG 的 Tikhonov 复原、基于 CG 的 BTV 复原、基于 MM 的 TV 复原,以及基于 MM 的 GTV 复原方法进行比较,以验证所提方法的有效性。这里, BTV 正则化复原和 GTV 正则化复原的变分阶数 $p=3$ 。在实验中,首先将原始图像模拟变为模糊并被噪声污染的退化图像,模糊核函数设置为 $h=[1\ 4\ 6\ 4\ 1]^T[1\ 4\ 6\ 4\ 1]/256$,噪声是标准差为 7 的高斯白噪声。在维纳复原中,选取信噪功率比参数为 0.07,以达到最好的复原效果。对于 Tikhonov 正则化复原,迭代求解直接运用了共轭梯度(CG)算法,正则化参数 $\lambda=0.1$ 时达到最

优,正则项中使用了式(18)所示的拉普拉斯算子。

$$\Gamma = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

在基于 CG 的 BTV 复原中 $\alpha=0.4, \lambda=11$ 时得到最优解。在 TV 和 GTV 正则化复原中,采用 MM 算法迭代优化求解,对于 TV 正则化复原 $\alpha=0.4, \lambda=2.5 \times 10^6 / (\text{TV}(x^{(t)})+1)$ 时得到最优解,对于 GTV 正则化复原 $\alpha=0.4, \lambda=2.5 \times 10^6 / (\text{GTV}(x^{(t)})+1)$ 时得到最优解。图 7 给出了不同方法对 Lena 图像的复原结果。

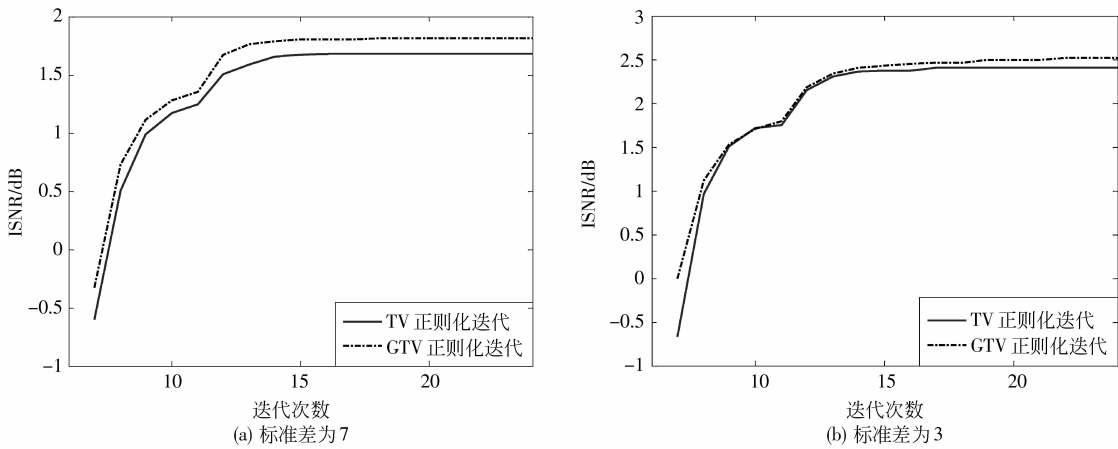


图 6 不同标准差的高斯白噪声污染下的 ISNR 曲线

Fig. 6 ISNR curves of the restored image for the degraded image with different white Gaussian noise



图 7 不同方法对 Lena 图像复原结果

Fig. 7 Restoration results with the degraded Lena images using different algorithm

为了表明本文方法对不同图像的鲁棒性,第 4 组实验选用了标准测试图 Cameraman 按第 3 组实验重做实验。复原中,噪声功率比参数为 0.08。Tikhonov 正则化复原中正则化参数 $\lambda = 0.07$ 时达到最优。在基于 CG 的 BTV 复原中 $\alpha = 0.4, \lambda = 11$ 时得到最优解。TV 和 GTV 正则化复原中,同样采用 MM 算法迭代优化求解, $\alpha = 0.4$, 正则化参数分别

为 $\lambda = 2.5 \times 10^6 / (\text{TV}(\mathbf{x}^{(t)}) + 1)$ 和 $\lambda = 2.5 \times 10^6 / (\text{GTV}(\mathbf{x}^{(t)}) + 1)$ 。图 8 给出了不同方法对 Cameraman 图像的复原结果。除了图 7 和图 8 给出的直观结果,还将以上两组实验 ISNR 性能指标列于表 4 当中。可以看出带有正则化的复原要好于维纳复原,而基于 MM 算法的 GTV 正则化复原好于所有其他正则化复原。



图 8 不同方法对 Cameraman 图像复原结果

Fig. 8 Restoration results with the degraded Cameraman images using different algorithm

表 4 不同方法复原结果的 ISNR 值

Tab. 4 The ISNR comparison of the restored images using different algorithm

图像	维纳复原结果	基于 CG 的 Tikhonov 复原结果	基于 CG 的 BTV 复原结果	基于 MM 的 TV 复原结果	基于 MM 的 GTV 复原结果
Lena	0.973 5	1.045 35	2.146 19	2.783 83	2.912 95
Cameraman	0.831 055	0.937 02	2.122 34	2.680 21	2.873 92

由上述 4 组实验,可以看出对于不同噪声指标退化的图像,GTV 正则化复原在视觉效果和改善信噪比方面均优于 TV 正则化复原,而且几乎每次迭代 GTV 正则化复原都体现出了它的优势。另外,在与维纳复原和其他正则化复原方法相比的实验中,基于 MM 算法的 GTV 正则化复原显示了它的优越性。这主要是由于 GTV 正则化严格继承了 TV 正则化的方法,且在优化中使用了 MM 算法准确求得了最优解。因此,本文提出的用 MM 算法优化的 GTV 正则化图像复原方法是合理而有效的。

5 结论

提出一种基于 MM 算法的 GTV 图像复原方法。该方法中的 GTV 正则项是在保留 TV 重尾特征和借鉴 BTV 双重加权机制的基础上推导出的,GTV 既能在形式上保持与 TV 一致,同时还考虑到了像素之间灰度和距离的双重关系。针对 GTV 在最优化过程中的求解瓶颈,利用 MM 算法迭代求解优势,对给出的 GTV 正则化的代价函数进行寻优求解。视觉

效果和信噪比的改善方面均验证了所给方法的有效性,在去噪的同时较好地保持了非连续点。本文的方法不仅可以用于一般的图像复原,而且也可用于多帧或序列图像的超分辨率重构中,下一步研究的重点可以集中在超分辨率重构的 GTV 适用性和实时性的改造和优化方面。

参考文献 (References)

- [1] Vogel C R. Computational Methods for Inverse Problems [M]. Philadelphia, USA: SIAM, 2002:2-11.
- [2] Shao Wenze, Wei Zihui. Multi-frame super-resolution reconstruction based on anisotropic Markov random field modeling [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 36(6):1256-1263. [邵文泽, 韦志辉. 基于各向异性 MRF 建模的多帧图像变分超分辨率重建 [J]. 电子学报, 2009, 36(6):1256-1263.]
- [3] Li S Z. Markov Random Field Modeling in Computer Vision [M]. Berlin: Springer, 1995:35-40.
- [4] Figueiredo M, Nowak R. An EM algorithm for wavelet-based image restoration [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12 (8):906-916.
- [5] Bioucas-Dias J M. Bayesian wavelet-based image deconvolution: a GEM algorithm exploiting a class of heavy-tailed priors [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(4): 937-951.
- [6] Farsiu S, Robinson M D, Elad M, et al. Fast and robust multiframe super resolution [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(10):1327-1344.
- [7] Lei J, Liu S, Li Z H, et al. An image reconstruction algorithm based on the extended Tikhonov regularization method for electrical capacitance tomography [J]. Measurement, 2009, 42(3):368-376.
- [8] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. Physica D, 1992, 60 (1-4): 259-268.
- [9] Vogel C, Oman M. Fast, robust total variation-based reconstruction of noisy, blurred images [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(6):813-824.
- [10] Bioucas-Dias J, Figueiredo M, Oliveira J P. Total variation-based image deconvolution: a majorization-minimization approach [C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2006, 2: 861-864.
- [11] El H A, Menard M, Lugiez M, et al. Weighted and extended total variation for image restoration and decomposition [J]. Pattern Recognition, 2010, 43(4):1564-1576.
- [12] Tomasi C, Manduchi R. Bilateral filtering for gray and color images [C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. New Delhi, India: N. K. Mehra for Narosa Publishing House, 1998: 836-846.
- [13] Takeda H, Farsiu S, Milanfar P. Deblurring using regularized locally-adaptive kernel regression [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2008, 17(4):550-563.
- [14] Tian J, Ma K K. Stochastic super-resolution image reconstruction [J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2010, 21(3): 232-244.
- [15] Oliveira J P, Bioucas-Dias J M, Figueiredo M A T. Adaptive total variation image deblurring: a majorization-minimization approach [J]. Signal Processing, 2009, 89:1683-1693.
- [16] Borman S. Topics in Multiframe Superresolution Restoration [D]. Notre Dame, IN, USA: University of Notre Dame, 2004.
- [17] Rodriguez P, Wohlberg B. Efficient minimization method for a generalized total variation functional [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2008, 18(2):322-332.
- [18] Kumar S, Nguyen T Q. Total subset variation prior [C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2010: 77-80.