

中图法分类号: TN919.81 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2011)08-1552-09  
论文索引信息: 郭芬红, 熊昌镇. 正交 U 变换及其快速算法[J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(8): 1552-1560

# 正交 U 变换及其快速算法

郭芬红<sup>1),2)</sup>, 熊昌镇<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>(中山大学信息科学与技术学院, 广州 510275) <sup>2)</sup>(北方工业大学数学系, 北京 100144)

<sup>3)</sup>(北方工业大学自动化系, 北京 100144)

**摘要:**采用递推方法构造一种正交变换,称之为 U 变换,该变换含有分段常数基向量、分段一次多项式基向量以及分段二次多项式基向量,是对 Walsh 变换、斜变换的推广。根据递推方式,可以得到相应的快速算法。利用平移复制算子和 Kronecher 积的性质,推导基于 Kronecher 积的快速算法和正交 U 变换的直接分解算法。将该变换应用于图像压缩中,构造基于人类视觉系统的量化表,实验结果表明,正交 U 变换的图像压缩性能明显优于斜变换的图像压缩性能,与 DCT 变换的图像压缩性能相当,为图像压缩提供了一种新的选择。

**关键词:**图像压缩;正交变换;Kronecher 积;快速算法

## Orthogonal U transform and its fast algorithm

Guo Fenhong<sup>1),2)</sup>, Xiong Changzhen<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>(School of Information Science and Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275 China)

<sup>2)</sup>(Mathematics Department, North China University of Technology, Beijing 100144 China)

<sup>3)</sup>(Automation Department, North China University of Technology, Beijing 100144 China)

**Abstract:**In this paper, a new unitary transform called U transform is constructed with the recursion method. The U transform contains piecewise constant basis vectors, piecewise linear basis vectors and piecewise polynomials of degree 2 basis vectors, and so it is a generalization of Walsh transform and Slant transform. The corresponding fast algorithm based on Kronecher product is deduced. The new orthogonal U transform is applied to digital image compression with quantization table based on Human Visual System (HVS). The experimental results indicate that the compression performance of U transform outperforms the Slant transform and is equivalent to that of DCT.

**Keywords:**image compression;orthogonal transform;Kronecher product;fast algorithms

## 0 引言

Walsh 函数是美国数学家 Walsh 于 1923 年提出的一类完备正交函数系,是一类二值系统,比较适合表达和处理数字信息,在信号处理、计算机通信、数字电路等领域得到了广泛应用<sup>[1]</sup>。Swick 提出用正复制的方法生成 Walsh 函数<sup>[2]</sup>。20 世纪 80 年

代,张其善等人在此基础上建立了“桥函数”的概念<sup>[3]</sup>。王能超利用二分演化的思想分析了 Walsh 函数的数学美,给出了基于二分演化的 Walsh 函数构造过程<sup>[4-5]</sup>。Walsh 变换计算快速,它的基向量为分段常数基向量。

含有斜基向量的斜变换(ST)是由 Enomoto 与 Shibata 引入的<sup>[6]</sup>,他们仅考虑了斜向量长度为 4 和 8 的情况。斜变换的一般定义由 Pratt、Welch 与

收稿日期:2010-08-11;修回日期:2010-11-22

基金项目:北京市教育委员会科技发展计划面上项目(KM200910009001)。

第一作者简介:郭芬红(1980—),女,中山大学计算机软件与理论专业博士研究生,主要研究方向为图形图像处理。

E-mail:guofenhong@163.com。

Chen 提出,并给出了递推的快速算法<sup>[7]</sup>。Ahmed 和 Chen 给出了 ST 的 Cooley-Tukey 型快速算法<sup>[8]</sup>。Fino 等人利用广义 Kronecker 积讨论了 Walsh 序和反 Paley 序(即 Hadamard 序)的 ST 及其快速算法<sup>[9]</sup>。斜变换与 Walsh 变换有密切的联系,有很多类似的性质。王中德用矩阵乘积的形式给出了从 Walsh 变换逐步变换到斜变换的关系式,利用 Walsh 变换的快速算法,导出了 ST 递推的快速算法<sup>[10]</sup>。Anguh 和 Martin 设计一个截断方法计算 ST 并将其应用于图像处理<sup>[11]</sup>。文献[12]利用二分演化思想分析了 ST 的演化生成过程,利用 Kronecker 乘积,采用矩阵分解的方法,给出了不同序的斜矩阵的快速生成算法。斜变换与 Walsh 变换的复制思想是一致的,但斜变换不仅含有分段常数基向量,而且含有分段一次多项式基向量,使得斜变换更适合表示灰度渐变图像<sup>[7]</sup>。

U 系统是 20 世纪 80 年代由齐东旭和冯玉瑜提出的<sup>[13-16]</sup>,是分段  $k$  次连续正交系统。Walsh 函数是 U 系统在  $k = 0$  时的特例;斜变换是 U 系统在  $k = 1$  时的离散情形<sup>[16]</sup>。由于 U 系统具有对分段多项式表达的几何信息能有限精确表达的再生性质,使得在信息重构时具有突出的优势。U 系统在几何图像频谱分析、数字水印等方面的应用见文献[17-20]。数字图像处理中的 FFT、DCT、DWT 等是指其离散形式的变换。而 U 系统的离散化过程先取对应离散值,然后再 Schmitt 正交化的方式得到,没有直接的离散变换。

利用 Walsh 变换、斜变换和 U 系统的复制思想,构造了正交 U 变换(DUT),该变换含有分段常数基向量、分段一次多项式基向量以及分段二次多项式基向量,因此 DUT 是对 Walsh 变换、斜变换的推广,通过推导递推公式,可得到 DUT 的快速算法。

构造的离散正交 U 变换有直接快速算法,其对应的离散分段正交多项式可以直接应用于曲线曲面的频谱分析、信号去噪和数字水印中,为了验证其应用价值,给出了图像压缩的应用实例。

### 1 正交 U 变换的构造

利用 Walsh 变换和斜变换的构造原理,采用正负复制方法和正交性来构造正交 U 变换。首先构造第 1~6 个基函数,满足以下条件:

- 1) 第 1 个离散基函数为常数向量;
- 2) 第 2 个离散基函数为离散一次多项式,满足一阶差分相等;
- 3) 第 3 个离散基函数为离散二次多项式,满足二阶差分相等;
- 4) 第 4~6 个离散基函数前半部分由前 3 个压缩一半后线性组合得到,后半部分分别由前半部分负复制和正复制得到;
- 5) 所有基函数两两离散正交。即

$$\sum_{x=0}^N f_i(x, N) f_j(x, N) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (1)$$

根据条件(1)~(5)可构造出第 1~6 个基函数如下:

$$f_1(x, N) = 1 / \sqrt{N} \quad (2)$$

$$f_2(x, N) = \frac{\sqrt{3}(N-1)}{\sqrt{(N+1)N(N-1)}} + \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{(N+1)N(N-1)}} x \quad (3)$$

$$x = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f_3(x, N) = \frac{\sqrt{5}[(N-1)(N-2) - 6(N-1)x + 6x^2]}{\sqrt{(N+2)(N+1)N(N-1)(N-2)}} \quad (4)$$

$$x = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f_4(x, N) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\sqrt{(N^2-4)(1-a^2)}}{2\sqrt{N^2-1}} f_0\left(x, \frac{N}{2}\right) + \\ & \frac{\sqrt{3}N}{2\sqrt{N^2-1}} \sqrt{(1-a^2)} f_1\left(x, \frac{N}{2}\right) + \\ & a f_2\left(x, \frac{N}{2}\right) \\ & \quad \quad \quad x = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ & - \frac{\sqrt{(N^2-4)(1-a^2)}}{2\sqrt{N^2-1}} f_0\left(x - \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right) + \\ & \frac{\sqrt{3}N}{2\sqrt{N^2-1}} \sqrt{(1-a^2)} f_1\left(x - \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right) - \\ & a f_2\left(x - \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right) \\ & \quad \quad \quad x = \frac{N}{2}, \dots, N-1 \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$f_5(x, N) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} \frac{\sqrt{N^2 - 16}}{4 \sqrt{N^2 - 1}} f_1\left(x, \frac{N}{2}\right) + \frac{\sqrt{15N}}{4 \sqrt{N^2 - 1}} \times \\ f_2\left(x, \frac{N}{2}\right) & x = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \\ -\frac{\sqrt{N^2 - 16}}{4 \sqrt{N^2 - 1}} f_1\left(x - \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right) + \frac{\sqrt{15N}}{4 \sqrt{N^2 - 1}} \times \\ f_2\left(x - \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right) & x = N/2, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$f_6(x, N) = \begin{cases} -\frac{a}{2} \frac{\sqrt{N^2 - 4}}{\sqrt{N^2 - 1}} f_0\left(x, \frac{N}{2}\right) + \frac{\sqrt{3Na}}{2 \sqrt{N^2 - 1}} \times \\ f_1\left(x, \frac{N}{2}\right) - \sqrt{1 - a^2} f_2\left(x, \frac{N}{2}\right) & x = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{a}{2} \frac{\sqrt{N^2 - 4}}{\sqrt{N^2 - 1}} f_0\left(x - \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right) + \right. \\ \left. \frac{\sqrt{3Na}}{2 \sqrt{N^2 - 1}} f_1\left(x - \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right) + \right. \\ \left. \sqrt{1 - a^2} f_2\left(x - \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right) \right] & x = N/2, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (7)$$

式中  $a$  为自由参数, 满足  $0 < a < 1$ 。

接下来, 由生成元  $f_4(x, N)$ ,  $f_5(x, N)$ ,  $f_6(x, N)$  分组分类正负复制生成第7~12个基向量, 第13~24个基向量, 第25~48个基向量, 一直进行下去<sup>[13]</sup>。该正负复制生成基向量的过程可以递推表示为

$$f_{2k-1}(x, N) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} f_k\left(x, \frac{N}{2}\right) & x = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ f_k\left(x - \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right) & x = \frac{N}{2}, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$f_{2k}(x, N) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} f_k\left(x, \frac{N}{2}\right) & x = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ -f_k\left(x - \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right) & x = \frac{N}{2}, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (9)$$

式中  $k = 4, 5, 6, \dots, N/2$ ,  $N = 2 \times 2^n, n > 1$  或  $N =$

$3 \times 2^n, n > 1$ 。该生成过程思想源于 WALSH 和斜变换的正负复制思想。可证明以此方式生成的基函数是两两离散正交的。对第1~3个离散基函数改写成如下的递推方式:

$$f_1(x, N) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} f_1(x, N/2) & x = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \\ f_1(x, N/2) & x = N/2, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$f_2(x, N) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} a_1 f_1(x, N/2) + a_2 f_2(x, N/2) & x = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \\ -a_1 f_1(x - N/2, N/2) + a_2 f_2(x - N/2, N/2) & x = N/2, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$f_3(x, N) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} a_3 f_1(x, N/2) + a_4 f_2(x, N/2) & x = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \\ -a_3 f_1(x - N/2, N/2) + a_4 f_2(x - N/2, N/2) & x = N/2, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sqrt{3N}}{2 \sqrt{N^2 - 1}} & a_2 &= \frac{\sqrt{N^2 - 4}}{2 \sqrt{N^2 - 1}} \\ a_3 &= \frac{\sqrt{15N}}{4 \sqrt{N^2 - 1}} & a_4 &= \frac{\sqrt{N^2 - 16}}{4 \sqrt{N^2 - 1}} \end{aligned} \quad (13)$$

令  $U_N$  和  $U_{N/2}$  分别为

$$U_N = \begin{pmatrix} f_1(0, N) & f_1(1, N) & \dots & f_1(N-1, N) \\ f_2(0, N) & f_2(1, N) & \dots & f_2(N-1, N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_N(0, N) & f_N(1, N) & \dots & f_N(N-1, N) \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$U_{N/2} = \begin{pmatrix} f_1\left(0, \frac{N}{2}\right) & f_1\left(1, \frac{N}{2}\right) & \dots & f_1\left(\frac{N}{2}-1, \frac{N}{2}\right) \\ f_2\left(0, \frac{N}{2}\right) & f_2\left(1, \frac{N}{2}\right) & \dots & f_2\left(\frac{N}{2}-1, \frac{N}{2}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{\frac{N}{2}}\left(0, \frac{N}{2}\right) & f_{\frac{N}{2}}\left(1, \frac{N}{2}\right) & \dots & f_{\frac{N}{2}}\left(\frac{N}{2}-1, \frac{N}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (15)$$

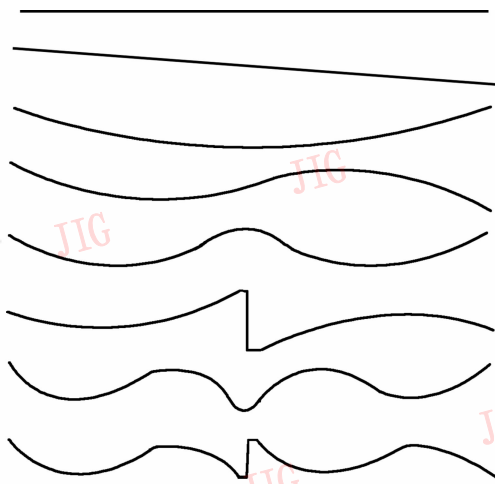
因此当  $N = 3 \times 2^n$  或  $2 \times 2^n, n > 1$  时, 根据式(5)~(12)可得:



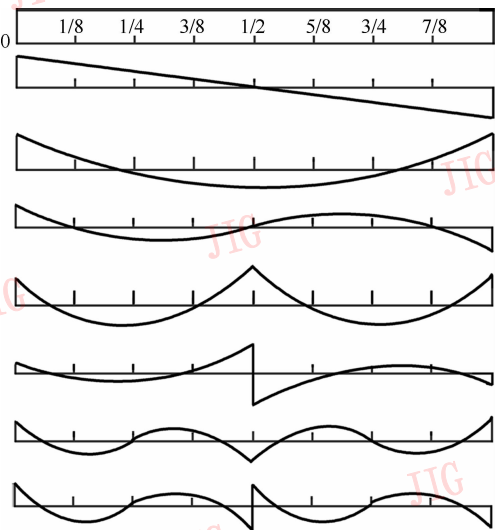
$$a_9 = \frac{\sqrt{3}Na}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{N^2-1}}$$

$$a_{10} = \frac{-\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{2}} \quad a_7 = a \quad (18)$$

当  $N = 32$  时,其正交 U 变换的前 8 个基数如图 1(a)所示,由上往下分别是第 1~8 个基函数,由左往右为  $x$  从  $0 \sim N-1$  离散变化值。分段二次 U 系统的前 8 个基函数如图 1(b)所示,由上往下分别是第 1~8 个基函数,由左往右为  $x$  从  $0 \sim 1$  连续变化值。从图可以看出两者的图例非常相似,当  $a$  为特定的值时,正交 U 变换为分段二次 U 系统离散形式。



(a) U变换前8个基函数 ( $N=32$ )



(b) 分段二次U系统前8个基函数图

图 1 二阶 U 系统与 U 变换基函数图例  
Fig1. Basis function of U transform and U-system ( $k=2$ )

## 2 正交 U 变换的快速算法

利用复制算子和 Kronecker 积,可将正交 U 变换矩阵简洁地表示出来,定义如下复制算子:

$$H = \begin{pmatrix} e & e \\ e & -e \end{pmatrix} \quad (19)$$

及其运算

$$H \otimes A = \begin{pmatrix} e & e \\ e & -e \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} eA & eA \\ eA & -eA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & -A \end{pmatrix} \quad (20)$$

称  $H$  为平移复制算子。利用复制算子可将  $H_N$  表示为

$$H_N = H \otimes H_{N/2} = H \otimes (H \otimes H_{N/4}) \triangleq$$

$$H^2 \otimes H_{N/4} = \dots =$$

$$H \otimes H \otimes \dots \otimes H \otimes [1] \triangleq$$

$$H^n \otimes [1] \quad (21)$$

下述矩阵分解式是设计快速算法的基础:

$$H \otimes AB = (I_2 \otimes A)(H \otimes B) =$$

$$(H \otimes A)(I_2 \otimes B) \quad (22)$$

$$H \otimes A = H_2 \otimes AH_2 = H \otimes [1]$$

由式(21)(22)有

$$H_N = (I_2 \otimes H_{N/2})(H \otimes I_{N/2}) =$$

$$(H \otimes I_{N/2})(I_2 \otimes I_{N/2}) \quad (23)$$

因此有

$$H^k \otimes AB = (I_{2^k} \otimes A)(H^k \otimes B) \quad (24)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

当  $N = 2^n, n \geq 2$  时,正交 U 变换快速算法为

$$U_N = T_N(H \otimes U_{N/2}) =$$

$$T_N(H \otimes (T_{N/2}(H \otimes U_{N/4}))) =$$

$$T_N(I_2 \otimes T_{N/2})(H^2 \otimes U_{N/4}) =$$

$$T_N(I_2 \otimes T_{N/2})(I_4 \otimes T_{N/4})(H^3 \otimes U_{N/8}) =$$

$$\dots = \left( \prod_{i=0}^{n-2} (I_{2^i} \otimes T_{2^{n-i}}) \right) (H^{n-1} \otimes U_2) =$$

$$\left( \prod_{i=0}^{n-2} (I_{2^i} \otimes T_{2^{n-i}}) \right) H_N \quad (25)$$

当  $N = 3 \times 2^n, n \geq 1$  时,正交 U 变换矩阵的快速算法为

$$U_N = T_N(H \otimes U_{N/2}) =$$

$$T_N(H \otimes (T_{N/2}(H \otimes U_{N/4}))) =$$

$$T_N(I_2 \otimes T_{N/2})(H^2 \otimes U_{N/4}) =$$

$$T_N(I_2 \otimes T_{N/2})(I_4 \otimes T_{N/4})(H^3 \otimes U_{N/8}) = \dots = \left( \prod_{i=0}^{n-2} (I_{2^i} \otimes T_{2^{n-i}}) \right) (H^{n-1} \otimes U_3) \quad (26)$$

由式(23),可得正交 U 变换的直接分解式。当  $N = 2^n, n \geq 2$  时

$$U_N = T_N(H \otimes U_{N/2}) = T_N(H \otimes (T_{N/2}(I_2 \otimes U_{N/4}))) = T_N(H \otimes I_{N/2})(I_2 \otimes T_{N/2})(I_2 \otimes H \otimes I_{N/4})(I_4 \otimes U_{N/4}) = \dots = \prod_{i=1}^n (I_{2^{i-1}} \otimes T_{2^{n-i+1}})(I_{2^{i-1}} \otimes H \otimes I_{2^{n-i}}) = \prod_{i=1}^n (I_{2^{i-1}} \otimes T_{2^{n-i+1}})(I_{2^{i-1}} \otimes H_2 \otimes I_{2^{n-i}}) = \left( \prod_{i=1}^{n-2} (I_{2^{i-1}} \otimes T_{2^{n-i+1}})(I_{2^{i-1}} \otimes H \otimes I_{2^{n-i}}) \right) \times (I_{2^{n-2}} \otimes H \otimes I_2)(I_{2^{n-2}} \otimes H_2) \quad (27)$$

当  $N = 3 \times 2^n, n \geq 1$  时,可得到相类似的直接分解算法。

当  $N=4$  时,可得以下  $4 \times 4$  矩阵

$$U_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{5}} \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

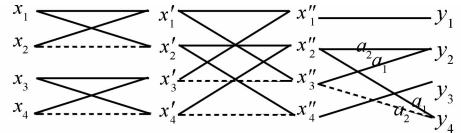
其中  $U_4$  和  $4 \times 4$  的斜变换矩阵相同,可由  $U_2$  递推得到:

$$U_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

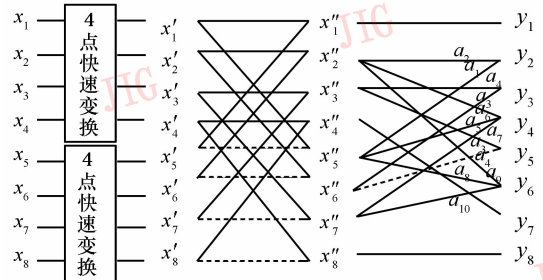
$$U_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{5}} \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad (30)$$

根据式(27)(30)可以得到  $N = 4$  点,  $N = 8$  点及  $N = 16$  点正交 U 变换的快速算法如图 2 所示。

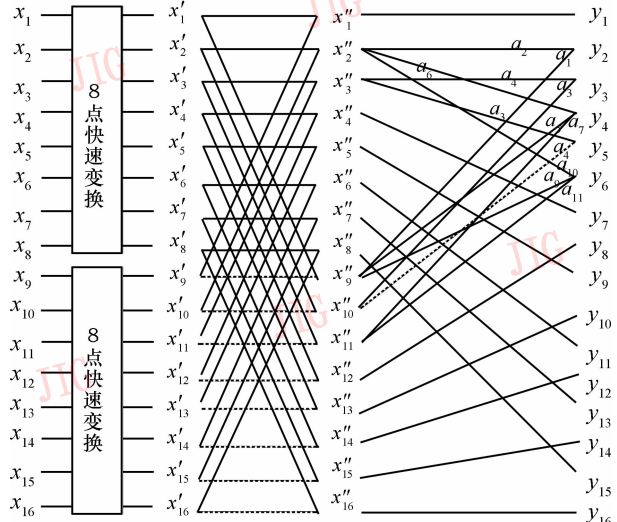
其中  $X = \{x_i\}, i = 1, \dots, N$  为输入向量,  $Y = \{y_i\}, i = 1, \dots, N$  为最后计算结果,其他为中间计算结果,符号  $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \rightarrow c$  表示  $c = a + b$ ;  $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \rightarrow c$  表示  $c = a - b$ 。



(a) 4 点快速变换流程图



(b) 8 点快速变换流程图



(c) 16 点快速变换流程图

图 2 4,8,16 点快速变换流程图

Fig. 2 Flow chart of 4,8,16 point fast transform

### 3 基于正交 U 变换的图像压缩算法

为了验证正交 U 变换的应用价值,在此给出图像压缩的实例。假设  $f(x,y)$  是大小为  $N \times N$  的灰度图像,  $U$  为正交 U 变换矩阵,定义  $F = UfU^T$  为 2 维正交 U 变换,称  $f = U^T F U$  为 2 维正交逆变换。

用 U 变换代替 DCT 实现静态图像的变换编码,设图像为  $f$ ,U 矩阵为  $8 \times 8$ (自由参数  $a = 0.3749$ ) 的正交 U 变换矩阵, $Q$  为据文献[21]构造的基于人眼视觉系统的量化矩阵。其对应的  $8 \times 8$  量化矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 16 & 16 & 17 & 18 & 21 & 24 \\ 16 & 16 & 16 & 16 & 17 & 19 & 22 & 25 \\ 16 & 16 & 17 & 18 & 20 & 22 & 25 & 29 \\ 16 & 16 & 18 & 21 & 24 & 27 & 31 & 36 \\ 17 & 17 & 20 & 24 & 30 & 35 & 41 & 47 \\ 18 & 19 & 22 & 27 & 35 & 44 & 54 & 65 \\ 21 & 22 & 25 & 31 & 41 & 54 & 70 & 88 \\ 24 & 25 & 29 & 36 & 47 & 65 & 88 & 115 \end{pmatrix}$$

- 1) 计算图像  $f$  的 DUT 分块变换 记第  $i$  行、第  $j$  列的子图像块为  $f_{ij}$ ,则分块变换为  $F_{ij} = Uf_{ij}U^T$ ;
- 2) 对变换系数按量化矩阵进行量化 按 Zigzag 扫描顺序排序<sup>[22]</sup>,去掉子图像块后面的零系数,加上块结束标志;
- 3) Huffman 编码 在编码过程中,直流系数和

交流系数统一使用 Huffman 编码;首先对变换系数进行第 1 次扫描,统计变换系数的频率;然后,第 2 次扫描进行 Huffman 编码,并保存 Huffman 码的映射表、原始图像大小、子图像块的数目、量化矩阵、变换系数的最小值以及 Huffman 码表;

4) 解码时,首先进行 Huffman 解码;然后,反 Zigzag 顺序重排图像数据,对重排后的数据块进行 2 维二次正交逆变换,即  $f_{ij} = U^T F_{ij} U$ ,取整之后,即可以得到重构图像  $f$ 。

### 4 实验结果

在 Windows XP 环境下,用 Matlab7.0 对 10 幅大小为  $512 \times 512$  的灰度图像进行仿真,如图 3 所示。在实验中我们使用  $8 \times 8$  的正交 U 变换对图像做变换编码;同时采用相同大小的斜变换(SLT)矩阵和 DCT 矩阵对图像进行压缩,并与 DUT 的结果作对比分析。DUT、SLT 和 DCT 的图像压缩流程是相同,首先对图像进行分块正交变换,再用量化表对变换域系数量化,接着进行 Zigzag 序扫描重排系数,然后进行 Huffman 编码,按 JPEG 文件格式生成压缩文件。为了便于比较,计算相同码率下压缩重构图像与原始图像的峰值信噪比(PSNR),DCT 变换压缩算法中的量化表为 JPEG 标准中的量化表,DUT 和 SLT 变换的量化矩阵为构造的基于人眼视觉系统的量化矩阵  $Q$ 。实验结果如表 1 所示。



图 3 测试所用的 10 幅图像

Fig. 3 Ten test images

由表 1 可以看出,基于 DUT 变换编码的压缩性能明显高于基于斜变换的图像压缩性能,PSNR 值提高 3~7 dB。与基于 DCT 变换编码相比,两者的图像压缩性能相当,其中 Peppers, Barbara, Boat 和 Zelda 图像的压缩性能优于 DCT 变换编码算法。Bridge, Crowd 和 Goldhill 图像的压缩的性能略低于 DCT 变换编码压缩算法。该实验结果表明,构造的正交 U 变换在图像压缩领域的性能优于斜变换,与 DCT 变换相当。由于图像压缩涉及预处理,量化表构造等相关操作;不同的量化表得到的压缩效果有很大的不同,因此进一步工作是构造满足正交 U 变换的特定量化表,从而达到最优的压缩效果。

表 1 DCT、DUT 和 SLT 图像编码结果

Tab. 1 Image compression Results of DCT, DUT and SLT

测试图像	码率 /(bit/pixel)	DCT	DUT	SLT
		PSNR/dB		
Peppers	0.397 9	33.09	33.30	28.91
Barbara	0.568 5	29.39	29.96	22.56
Boat	0.525 0	31.23	31.39	26.59
Bridge	0.600 3	26.54	26.32	23.40
Crowd	0.442 2	30.97	30.67	27.91
Girl	0.649 7	33.09	33.03	30.21
Goldhill	0.515 1	31.56	31.47	27.87
Lena	0.404 0	33.84	33.88	29.87
Woman	0.403 6	39.76	39.76	36.95
Zelda	0.390 3	36.58	36.69	33.49

## 5 结 论

利用 Walsh 变换和斜变换的正负复制思想,采用递推的方式构造一种的新的正交变换——正交 U 变换(DUT),该变换含有分段常数基向量、分段一次多项式基向量以及分段二次多项式基向量,是 Walsh 变换和斜变换的推广。利用递推过程直接得到该变换的快速计算方法,给出了 4 点、8 点、16 点矩阵的快速算法的流程图。利用 Kronecher 积,推导基于 Kronecher 积的快速算法和正交 U 变换的直接分解算法。图像压缩应用结果表明,正交 U 变换的压缩性能与 DCT 变换相当,但明显高于斜变换。构造的离散正交 U 变换有直接快速算法,其对应的离散分段正交多项式可以直接应

用于曲线曲面的频谱分析、信号去噪和数字水印中,将另文阐述。

## 参考文献 (References)

- [1] Zheng Weixing, Su Weiyi. Walsh Function Theory and Applications [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1983:230-238. [郑维行, 苏维宜. 沃尔什函数理论与应用 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1983:230-238.]
- [2] Swick D A. Walsh function generation [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1969, 15(1):167-170.
- [3] Zhang Qishan, Zhang Youguang. Bridge Function Theory and its Application [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1992: 1-30. [张其善, 张有光. 桥函数理论及其应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1992:1-30.]
- [4] Wang Nengchao. The mathematical beauty of Walsh function(1) [J]. Journal of Yunnan University: Natural Science, 1997, 19(Suppl):306-314. [王能超. Walsh 函数的数学美(1) [J]. 云南大学学报: 自然科学版, 1997, 19(增刊):306-314.]
- [5] Wang Nengchao. The mathematical beauty of Walsh function(2) [J]. Journal of Yunnan University: Natural Science, 1997, 19(Suppl):315-323. [王能超. Walsh 函数的数学美(2) [J]. 云南大学学报: 自然科学版, 1997, 19(增刊):315-323.]
- [6] Enomoto H, Shibata K. Orthogonal transform coding system for television signals [J]. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 1971, 13(8):11-17.
- [7] Pratt W, Welch L, Chen. Wenhsung. Slant transform image coding [J]. IEEE Transactions on Communications, 1979, 22(8): 1075-1093.
- [8] Ahmed N, Chen M C. A cooley-tukey algorithm for the slant transform [J]. International Journal of Computer Mathematics, 1976, 5(B):331-338.
- [9] Fino B J, Algazi V R. A unified treatment of discrete fast unitary transform [J]. SIAM Journal on Computing, 1977, 6: 700-717.
- [10] Wang Z D. New algorithm for the slant transform [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1982, 4(5):551-555.
- [11] Anguh M M, Martin R R. A truncation method for computing slant transforms with applications to image processing [J]. IEEE Transactions on Communications, June 1995, 43(6): 2103-2110.
- [12] Shi Baochang, Wang Nengchao. The evolving generation and fast algorithms of slant transform [J]. Computational Mathematics, 2000, 22(4):437-448. [施保昌, 王能超. 斜变换的演化生成与快速算法 [J]. 计算数学, 2000, 22(4):437-448.]
- [13] Feng Y Y, Qi D X. A sequence of piecewise orthogonal

- polynomials[J]. SIAM Journal of Mathematics, 1984, 15(4): 834-844.
- [14] Qi Dongxu, Feng Yuyu. On the convergence of the Fourier-U series [J]. Journal of China University of Technology: Mathematics Album, 1983, 13(5): 7-17. [齐东旭, 冯玉瑜. 关于 Fourier-U 级数的收敛性[J]. 中国科技大学学报: 数学专辑, 1983, 13(5): 7-17]
- [15] Qi Dongxu, Feng Yuyu. On an orthogonal complete system  $\{U\}$  [J]. Natural Science Journal of Jilin University, 1984, 22(2): 21-31 [齐东旭, 冯玉瑜. 关于正交完备系  $\{U\}$  [J]. 吉林大学自然科学学报, 1984, 22(2): 21-31]
- [16] Qi Dongxu. Fractal and Its Computer Generation [M]. Beijing: Science Press, 1994: 160-187. [齐东旭. 分形及其计算机生成 [M]. 北京: 科学出版社, 1994: 160-187.]
- [17] Qi Dongxu. A class of discontinuous orthogonal functions and its applications [J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 1990, 5(1): 39-46. [齐东旭. 关于一类非连续的正交函数及其应用的探讨[J]. 高校应用数学学报, 1990, 5(1): 39-46]
- [18] Cai Z C, Ma H, Sun W, et al. Analysis of frequency spectrum for geometric modeling in digital geometry [C]//Wavelet Analysis and Applications. Basel, Switzerland: Birkhäuser Press, 2007: 525-542.
- [19] Ding W, Yan W Q, Qi D X. Digital watermark image embedding based on U-System [C]//Proceedings of the 6th International Conference on Computer Aided Design & Computer Graphics. Shanghai, China: Wen Hui Publishers, 1999: 893-899.
- [20] Xiong Gangqiang, Qi Dongxu, Guo Fenhong. An algorithm of image compression based on all phase U bi-orthogonal transform of 3-Degree U system [J]. Progress in Natural Science, 2009, 19(5): 551-564. [熊刚强, 齐东旭, 郭芬红. 一种基于全相位双正交三次 U 变换的 JPEG 编码的新算法[J]. 自然科学进展, 2009, 19(5): 551-564.]
- [21] Veeraswamy K, Srinivaskumar S, Chatterji B N. Designing quantization table for Hadamard transform based on human visual system for image compression [J]. ICGST-GVIP Journal, 2007, 7(3): 31-38.
- [22] Rafael C G, Richard E W, Steven L E. Digital Image Processing Using MATLAB [M]. Beijing, China: Publishing House of Electronics Industry, 2005: 317-325.