

中图分类号: TP391 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2011)09-1736-09

论文索引信息: 朱永贵, 杨晓兰. 稀疏 MR 图像重构的快速算法 [J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(9): 1736-1744

稀疏 MR 图像重构的快速算法

朱永贵, 杨晓兰

(中国传媒大学理学院, 北京 100024)

摘要: 提出小波稀疏的 MR 图像重构的交替最小化方法, 分析证明了这一方法的收敛性。利用半二次罚函数方法将小波稀疏的 MR 图像重构最优化问题分裂成两个子最优化问题: X-子问题和 Y-子问题, 通过对两个子问题的交替最小化得到原问题的最优解。利用 1 维软阈值收缩方法求解 Y-子问题, 利用 Fourier 变换的方法求解 X-子问题解, 进而给出原问题求解的分裂算法。利用 Phantom 图像和一些实际的 MR 图像与最新的算子分裂算法进行数值实验比较, 其结果是交替最小化方法重构的图像的信噪比比算子分裂算法的高, 而相对误差和 CPU 时间较低, 从而表明交替最小化方法是稀疏 MR 图像重构的一种快速算法。

关键词: 压缩传感; 最优化; 稀疏图像; 图像重构

Fast reconstruction method for sparse MR image

Zhu Yonggui, Yang Xiaolan

(School of Science, Community University of China Beijing 100024 China)

Abstract: An alternating minimization method for the reconstruction of MR images with wavelet sparsity, including the convergence analysis of this algorithm, is presented in this paper. Our algorithm is based on a half-quadratic penalty method. The optimization problem with wavelet sparsity is split into two sub-problems: the X-subproblem and the Y-subproblem. The solution for the original problem can be obtained by alternately solving the two subproblems, in which the Y-subproblem is solved via a 1D soft-thresholding or shrinkage and the X-subproblem is solved by a Fourier transform approach. Thus, the splitting algorithm for solving the original problem is generated. The phantom image and some real MR images are employed to test our approach in the numerical experiments. The alternating minimization algorithm is also compared to the state-of-the-art algorithm, operator splitting algorithm. The experimental results demonstrate that the alternating minimization algorithm has not only a greater signal-to-noise ratio (SNR), but has also less relative errors and is faster than the operator splitting algorithm. Therefore the alternating minimization method is a fast reconstruction method for sparse MR images.

Keywords: compressed sensing; optimization; sparse image; image reconstruction

0 引言

压缩传感 (compressed sensing) 即压缩感知的概

念首先被 Candes 等人^[1]和 Donoho^[2]于 2006 年引进。他们指出如果测量数据满足不相关性 (incoherence property), 稀疏信号可以从非常有限的抽样数据重构出来, 而这些测量值被称为原始稀疏

收稿日期: 2010-12-29; 修回日期: 2011-05-10

基金项目: 教育部科学技术研究重点项目 (109030); 中国传媒大学 382 人才工程项目 (G08382316)。

第一作者简介: 朱永贵 (1964—), 男, 副教授。2005 年于中国科学院数学与系统科学研究院获得应用数学专业博士学位, 主要研究方向为小波分析、图像处理和最优化, 已有多篇论文发表。E-mail: ygzhu@cuc.edu.cn。

信号的压缩。关于不相关性的问题在文献[3]中给出了详尽的讨论。用 \mathbf{u} 表示一个长度为 N 的稀疏信号(对于 $n \times n$ 2 维图像按一列一列地排列处理即可变为长度为 $N = n \times n$ 的 1 维向量信号),假设 \mathbf{A} 是一个 $M \times N (M \ll N)$ 的传感矩阵,那么在压缩传感中 $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{u}$ 就是信号 \mathbf{u} 的观测数据即压缩。重构原始信号 \mathbf{u} 的基本方法之一就是求解如下最优化问题:

$$\min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}\|_0 \quad \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (1)$$

这里的 $\|\mathbf{u}\|_0$ 是指 \mathbf{u} 的非零个数。式(1)是一个 NP 难问题^[4],从数值计算的角度来看,在计算机上是难于实现的。Candes 和 Tao 等人证明了在一定条件下,式(1)可以转化为如下最优化问题:

$$\min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}\|_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (2)$$

式(1)即 L_1 最优化是一个凸最优化问题,在计算机上是易于实现的。目前有许多求解最小化问题式(2)的方法。例如内点法^[5]、梯度投影法^[6]、迭代软阈值法^[7]和 LARS 法^[8]都可以用来求解式(2)。Bregman 迭代方法^[9]、分裂 Bregman 迭代法^[10]和非线性逆尺度空间法^[11]也是求解 L_1 范数最小化式(2)的最新方法。

压缩传感可用于医学成像领域中的 MR 图像重构。因为一些 MR 图像在小波基分解下往往是非常稀疏的,所以如果能够对稀疏图像进行精确重构,那么就能够实现 MR 的快速成像,从而使压缩传感在医学成像领域发挥更大的潜力。

在 MR 压缩传感中,传感矩阵 \mathbf{A} 是指部分 2 维离散 Fourier 变换矩阵,即 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{F}$,其中 \mathbf{P} 是从 $N \times N$ 单位矩阵中随机抽取 M 行形成的子矩阵, \mathbf{F} 是 2 维离散 Fourier 变换矩阵。假设 MR 图像 \mathbf{x} 在正交小波基 $\boldsymbol{\psi}$ 下的稀疏表示为 $\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}\mathbf{x}$,那么 L_1 问题就变为

$$\min_{\mathbf{x}} \|\boldsymbol{\psi}\mathbf{x}\|_1 \quad \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3)$$

当观测数据含有噪声如方差为 σ^2 的 Gauss 噪声时,可得到问题式(3)的松弛形式

$$\min_{\mathbf{x}} \|\boldsymbol{\psi}\mathbf{x}\|_1, \quad \|\mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \leq \sigma^2 \quad (4)$$

对应于问题式(4)的无约束形式是

$$\min_{\mathbf{x}} \|\boldsymbol{\psi}\mathbf{x}\|_1 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \quad (5)$$

模型式(5)在 MRI 压缩传感中已被许多人^[11-12]使用。

本论文就是研究用于 MR 图像重构的模型

式(5),采用半二次罚函数法的思想提出了求解式(5)的分裂算法。原问题分裂后形成的 \mathbf{y} 子问题可以通过软阈值(soft-thresholding 或 shrinkage)收缩方法求解,而 \mathbf{x} 子问题可利用 Fourier 变换和对角化的性质直接给出快速的求解算法。通过这两个子问题的交互求解最后得到原问题的数值解,在误差容许的范围内,所求得的数值解可以达到压缩传感的精确重构。这一方法不仅能够进行 1 维稀疏信号和 2 维稀疏图像的精确重构,而且对于 MR 的快速成像具有重要意义。

1 问题式(5)的交替最小化算法

根据半二次罚函数法可得到式(5)的逼近形式

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \|\mathbf{y}\|_1 + \frac{\beta}{2} \|\mathbf{y} - \boldsymbol{\psi}\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \quad (6)$$

“半二次”的意思就是说式(6)的目标函数对于 \mathbf{x} 的项都是二次函数,而对于 \mathbf{y} 的项不都是二次函数。当 $\beta \rightarrow \infty$ 时,要使式(6)有最优解,必须有 $\mathbf{y} = \boldsymbol{\psi}\mathbf{x}$,这时问题式(6)就变成了式(5)。关于半二次罚函数法的详细论述可参考文献[13-14]。

对于足够大的 β 可以用式(6)的解去逼近式(5)的解。如果分别固定 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} ,式(6)可以变为如下两个子问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}} \|\mathbf{y}\|_1 + \frac{\beta}{2} \|\mathbf{y} - \boldsymbol{\psi}\mathbf{x}\|_2^2 \\ \min_{\mathbf{x}} \frac{\beta}{2} \|\mathbf{y} - \boldsymbol{\psi}\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \end{aligned}$$

由于 \mathbf{y} 子问题是可分离的,所以可以采用 1 维软阈值收缩方法求解,即

$$\mathbf{y}_i = s((\boldsymbol{\psi}\mathbf{x})_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \times n \quad (7)$$

式中

$$s((\boldsymbol{\psi}\mathbf{x})_i) = \max\left\{\|(\boldsymbol{\psi}\mathbf{x})_i\| - \frac{1}{\beta}\right\} \cdot \text{sgn}((\boldsymbol{\psi}\mathbf{x})_i)$$

如果对于任意向量 $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^{N \times N}$,定义算子 $S_y(\mathbf{Z}) : \mathbf{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbf{R}^{N \times N}$ 为

$$S_y(\mathbf{Z}) = (s(\mathbf{Z}_1), s(\mathbf{Z}_2), \dots, s(\mathbf{Z}_{n \times n}))^T$$

$$s(z_i) = \max\left\{\|z_i\| - \frac{1}{\beta}\right\} \cdot \text{sgn}(z_i)$$

那么式(7)可以变为

$$\mathbf{y} = S_y(\boldsymbol{\psi}\mathbf{x}) \quad (8)$$

式中 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n \times n})^T$ 。

对于 \mathbf{x} 子问题, 其一阶最优优化条件为

$$\beta \boldsymbol{\psi}^* (\boldsymbol{\psi} \mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mu (\mathbf{P}\mathbf{F})^* (\mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$$

利用 $\boldsymbol{\psi}$ 的正交性: $\boldsymbol{\psi}^* \boldsymbol{\psi} = \mathbf{I}$, 可以将上述等式化为

$$(\beta \mathbf{I} + \mu \mathbf{F}^* \mathbf{P}^* \mathbf{P}\mathbf{F}) \mathbf{x} = \beta \boldsymbol{\psi}^* \mathbf{y} + \mu \mathbf{F}^* \mathbf{P}^* \mathbf{b} \quad (9)$$

对等式(9)的两边作 Fourier 变换可得

$$(\beta \mathbf{I} + \mathbf{P}^* \mathbf{P}) \mathbf{F}\mathbf{x} = \beta \mathbf{F}(\boldsymbol{\psi}^* \mathbf{y}) + \mu \mathbf{P}^* \mathbf{b} \quad (10)$$

由于 $\beta \mathbf{I} + \mathbf{P}^* \mathbf{P}$ 是对角矩阵, 所以利用式(10)很容易求解 $\mathbf{F}\mathbf{x}$ 。求出 $\mathbf{F}\mathbf{x}$ 后再对其作逆 Fourier 变换即可得到 \mathbf{x} 。求解 \mathbf{x} 子问题中所作的 Fourier 变换和逆 Fourier 变换, 在实际计算中可以通过 FFT2 和 IFFT2 来实现, 所以求解 \mathbf{x} 子问题的方法是一种快速算法。

为了方便起见, 设

$$S_x(\mathbf{y}) = \min_x \frac{\beta}{2} \|\mathbf{y} - \boldsymbol{\psi} \mathbf{x}\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$$

下面给出对于固定的 β , 求解问题式(5)的交替迭代计算方法。

在实际计算过程中, 需要根据所求问题的精度要求, 设置迭代终止准则。取重构图像的相邻迭代值的相对差异作为迭代终止准则。而重构图像的相邻迭代值的相对差异含义为

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\|_2}{\|\mathbf{x}^{(n)}\|_2} < \varepsilon \quad (11)$$

式中 ε 是任意小的正数。

下面给出求解问题式(5)的交替最小化算法。

算法 1

- 1) 将问题式(5)分裂成 \mathbf{x} 子问题和 \mathbf{y} 子问题。
- 2) 输入参数 β 、 μ 和 ε 的值, 将 \mathbf{x} 初始化为 $\mathbf{x}^{(0)}$, 取其 0 向量。
- 3) 对于 $\mathbf{x}^{(0)}$, 利用式(8)计算 $\mathbf{y}^{(1)} = S_y(\boldsymbol{\psi} \mathbf{x}^{(0)})$ 。对于 $\mathbf{y}^{(1)}$, 利用求解 \mathbf{x} 子问题的快速算法计算 $\mathbf{x}^{(1)} = S_x(\mathbf{y}^{(1)})$ 。
- 4) 判别式迭代准则式(11)是否成立, 如果成立, 则给出原问题的解, 否则进行循环迭代:

利用式(8)和求解 \mathbf{x} 子问题的快速算法交替计算

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(2)} &= S_y(\boldsymbol{\psi} \mathbf{x}^{(1)}) \\ \mathbf{x}^{(2)} &= S_x(\mathbf{y}^{(2)}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = S_y(\boldsymbol{\psi} \mathbf{x}^{(k-1)})$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = S_x(\mathbf{y}^{(k)})$$

$$k = 1, 2, \dots$$

直到式(11)成立迭代准则为止。

这种交替求解最优优化问题的思想在图像处理中已被许多研究人员所采用^[15-16]。

2 收敛性分析和连续性方法

给出 1 维软阈值收缩算子的非扩张 (non-expansive) 性质。

定理 1 对于 $x \in \mathbf{R}$, 如果 1 维软阈值收缩算子 $s: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 以下形式

$$s(x) = \max\left\{\left|x\right| - \frac{1}{\beta}, 0\right\} \cdot \text{sgn}(x)$$

给出, 那么 $s(\cdot)$ 是非扩张的, 即对于任意 $x^1, x^2 \in \mathbf{R}$, 有

$$|s(x^1) - s(x^2)| \leq |x^1 - x^2| \quad (12)$$

而且 $S_y(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ 也是非扩张的, 也就是对任意 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$, 有

$$\|S_y(\mathbf{x}^1) - S_y(\mathbf{x}^2)\|_2 \leq \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|_2 \quad (13)$$

证明: 对于 $x^1, x^2 \in \mathbf{R}$, 当 $\text{sgn}(x^1) = \text{sgn}(x^2) \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} &\left| \max\left\{\left|x^1\right| - \frac{1}{\beta}, 0\right\} \cdot \text{sgn}(x^1) - \max\left\{\left|x^2\right| - \frac{1}{\beta}, 0\right\} \cdot \text{sgn}(x^2) \right| = \\ &\left| \max\left\{\left|x^1\right| - \frac{1}{\beta}, 0\right\} - \max\left\{\left|x^2\right| - \frac{1}{\beta}, 0\right\} \right| = \\ &\left\{ \begin{array}{lll} \left| \left|x^1\right| - \left|x^2\right| \right| & \left|x^1\right| \geq \frac{1}{\beta} & \left|x^2\right| \geq \frac{1}{\beta} \\ \left| \left|x^2\right| - \frac{1}{\beta} \right| & \left|x^1\right| < \frac{1}{\beta} & \left|x^2\right| \geq \frac{1}{\beta} \\ \left| \left|x^1\right| - \frac{1}{\beta} \right| & \left|x^1\right| \geq \frac{1}{\beta} & \left|x^2\right| < \frac{1}{\beta} \\ 0 & \left|x^1\right| \geq \frac{1}{\beta} & \left|x^2\right| < \frac{1}{\beta} \end{array} \right\} \leq \end{aligned}$$

$$|x^1| - |x^2| \leq |x^1 - x^2|$$

当 $\text{sgn}(x^1) = \text{sgn}(x^2) = 0$ 时, 式(12)显然成立。

当 $\text{sgn}(x^1) \neq \text{sgn}(x^2)$, 而且都不等于 0 时,

$$\left| \max\left\{\left|x^1\right| - \frac{1}{\beta}, 0\right\} \cdot \text{sgn}(x^1) - \max\left\{\left|x^2\right| - \frac{1}{\beta}, 0\right\} \cdot \text{sgn}(x^2) \right| =$$

$$\begin{aligned} & \max\left\{|x^2| - \frac{1}{\beta}, 0\right\} \cdot \operatorname{sgn}(x^2) \Big| = \\ & \left| \max\left\{|x^1| - \frac{1}{\beta}, 0\right\} + \max\left\{|x^2| - \frac{1}{\beta}, 0\right\} \right| = \\ & \left| \max\left\{|x^1| + |x^2| - \frac{2}{\beta}, |x^1| - |x^2|, |x^2| - |x^1|\right\} \right| \leq \\ & \left| \max\left\{|x^1 - x^2| - \frac{2}{\beta}, |x^1 + x^2|\right\} \right| < |x^1 - x^2| \end{aligned}$$

当 $\operatorname{sgn}(x^1)$ 和 $\operatorname{sgn}(x^2)$ 中仅有一个为 0 时, 由于对于 $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} & \left| \max\left\{|x| - \frac{1}{\beta}, 0\right\} \cdot \operatorname{sgn}(x) \right| < |x|, \text{ 所以} \\ & \left| \max\left\{|x^1| - \frac{1}{\beta}, 0\right\} \cdot \operatorname{sgn}(x^1) - \right. \\ & \left. \max\left\{|x^2| - \frac{1}{\beta}, 0\right\} \cdot \operatorname{sgn}(x^2) \right| < \\ & |x^1 - x^2| \end{aligned}$$

综合上述就说明 $s(\cdot)$ 是非扩张的, 即式(12)成立。

对于任意 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 由于

$$\begin{aligned} & \|S_y(\mathbf{x}^1) - S_y(\mathbf{x}^2)\|_2^2 = \\ & \sum_{i=1}^{n \times n} |s(\mathbf{x}_i^1) - s(\mathbf{x}_i^2)|^2 \leq \\ & \sum_{i=1}^{n \times n} |\mathbf{x}_i^1 - \mathbf{x}_i^2|^2 \end{aligned}$$

所以 $\|S_y(\mathbf{x}^1) - S_y(\mathbf{x}^2)\|_2 \leq \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|_2$, 证毕。

令 $M = \beta I + \mu F^* P^* P F$, 因为 $\beta > 0, \mu > 0$, 所以 M 是非奇异的。利用式(9)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k)} &= S_x(\mathbf{y}^{(k)}) = M^{-1}(\beta \psi^* \mathbf{y}^{(k)} + \mu F^* P^* \mathbf{b}) = \\ & M^{-1}(\beta \psi^* S_y(\psi \mathbf{x}^{(k-1)}) + \mu F^* P^* \mathbf{b}) = \\ & \beta M^{-1} \psi^* S_y(\psi \mathbf{x}^{(k-1)}) + \mu M^{-1} F^* P^* \mathbf{b} \end{aligned}$$

假设

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}^{(k-1)}) &= \beta M^{-1} \psi^* S_y(\psi \mathbf{x}^{(k-1)}) + \\ & \mu M^{-1} F^* P^* \mathbf{b} \end{aligned} \quad (14)$$

那么

$$\mathbf{x}^{(k)} = T(\mathbf{x}^{(k-1)}) \quad (15)$$

定理 2 当模型式(5)中的 μ 足够大时, 以式(14)定义的算子 T 是非扩张的, 即对于任意的 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 都有

$$\|T(\mathbf{x}^1) - T(\mathbf{x}^2)\|_2 \leq \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|_2$$

证明

$$\begin{aligned} & \|T(\mathbf{x}^1) - T(\mathbf{x}^2)\|_2 = \\ & \beta \|M^{-1} \psi^* (S_y(\psi \mathbf{x}^1) - S_y(\psi \mathbf{x}^2))\|_2 \end{aligned}$$

根据定理 1 中的式(13)可得

$$\begin{aligned} & \|M^{-1} \psi^* (S_y(\psi \mathbf{x}^1) - S_y(\psi \mathbf{x}^2))\|_2 \leq \\ & \|M^{-1} \psi^* \psi (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)\|_2 = \|M^{-1}(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)\|_2 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & \|T(\mathbf{x}^1) - T(\mathbf{x}^2)\|_2 \leq \beta \|M^{-1}(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)\|_2 \leq \\ & \beta \|M^{-1}\| \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|_2 \end{aligned}$$

这里 $\|\cdot\|$ 是指矩阵范数。

由于 $M = \beta I + \mu F^* P^* P F$, 所以 μ 可以大到使得 $\beta \|M^{-1}\| \leq 1$, 这时就有

$$\|T(\mathbf{x}^1) - T(\mathbf{x}^2)\|_2 \leq \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|_2, \text{ 证毕。}$$

定理 3 对于任意初始值 $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 假设 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ 是由式(15)生成的序列, 那么 T 是渐近正则的, 即

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_2 = \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^{k+1}(\mathbf{x}^{(0)}) - T^k(\mathbf{x}^{(0)})\|_2 = 0 \end{aligned}$$

证明: 因为 $\mathbf{y}^{(k)} = S_y(\psi \mathbf{x}^{(k-1)})$, 利用式(9)得

$$\begin{aligned} & (\beta I + \mu F^* P^* P F) \mathbf{x}^{(k+1)} = \\ & \beta \psi^* S_y(\psi \mathbf{x}^{(k)}) + \mu F^* P^* \mathbf{b} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & (\beta I + \mu F^* P^* P F) \mathbf{x}^{(k)} = \\ & \beta \psi^* S_y(\psi \mathbf{x}^{(k-1)}) + \mu F^* P^* \mathbf{b} \end{aligned} \quad (17)$$

式(16)减去式(17)得

$$\begin{aligned} & (\beta I + \mu F^* P^* P F)(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \\ & \beta \psi^* (S_y(\psi \mathbf{x}^{(k)}) - S_y(\psi \mathbf{x}^{(k-1)})) \end{aligned}$$

也就是

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} = \beta M^{-1} \psi^* (S_y(\psi \mathbf{x}^{(k)}) - S_y(\psi \mathbf{x}^{(k-1)}))$$

所以

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_2 \leq \\ & \beta \|M^{-1} \psi^*\| \|S_y(\psi \mathbf{x}^{(k)}) - S_y(\psi \mathbf{x}^{(k-1)})\|_2 \end{aligned}$$

利用 $S_y(\cdot)$ 的非扩张性可以得到

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_2 \leq \beta \|M^{-1} \psi^*\| \|\psi(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)})\|_2$$

记 $\rho = \beta \|M^{-1} \psi^*\| \|\psi\|$, 那么有

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_2 \leq \rho \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_2 \leq \\ & \rho^k \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_2 \end{aligned}$$

让 μ 足够大, 使得 $\rho < 1$, 所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_2 = 0$$

证毕。

由于最优化问题式(6)中的目标函数是凸函数, 而且它还是下有界、强制性的, 所以式(6)至少有一个极小点 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 而且满足

$$\mathbf{x}^* = S_x(\mathbf{y}^*), \mathbf{y}^* = S_y(\psi \mathbf{x}^*)$$

于是 \mathbf{x}^* 是 T 的不动点。根据 Opial 定理^[17], 序列

$\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ 收敛到 T 的不动点。

算法 1 可以通过罚参数连续性方法^[18-19] 加快计算速度。它的思想就是罚参数 β 随着迭代次数 k 的变化而变化,具体地说就是 β 开始取较小的值,然后逐渐增加,这可以大大地提高计算速度。这一结论,在后面的数值实验中得到了证实。

下面给出加速求解问题式(5)的算法。

算法 2

1) 输入 μ 、 ε 和 β 的初始值 β_0 ,再输入 β 的终止值 $\beta_{\max} (> \beta_0)$ 。

2) 当 $\beta < \beta_{\max}$ 做如下循环:

- (1) 运行算法 1,直至满足迭代准则式(11);
- (2) $\beta \leftarrow 2\beta$ 。

否则,给出原问题的解。

3 数值实验

在这一部分利用一些 Phantom 图像和 MR 图像进行数值实验,并将交替最小化算法与最新的算子分裂方法^[20] 进行比较,以显示本文给出算法的有效性。

先简要介绍算子分裂算法求解问题式(5)的具体过程。按照文献[20],算子分裂算法求解的模型如下:

$$\min_x \alpha TV(\mathbf{x}) + \gamma \|\psi\mathbf{x}\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\psi\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \quad (18)$$

上述模型和模型式(5)相比,仅多了全变分(TV)稀疏项 $\alpha TV(\mathbf{x})$,如果让 $\alpha = 0$,式(18)与式(5)在本质上是一样的,这就是要选择算子分裂算法与交替最小化算法比较的主要原因。

算子分裂算法采用的是不动点迭代,其求解式(18) ($\alpha = 0$) 的主要步骤如下:

- 1) $\mathbf{s}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}^{(k)} - \tau_1 (\nabla_x h(\mathbf{x}^{(k)}))$;
- 2) $\mathbf{t}_{ij}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{y}_{ij}^{(k)} + \tau_2 L_{ij} \psi \mathbf{x}^{(k)}$;
- 3) $\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \text{sgn}(\mathbf{s}^{(k)}) \max\{0, |\mathbf{s}^{(k)}| - \tau_1 \gamma\}$;
- 4) $\mathbf{y}_{ij}^{(k+1)} \leftarrow \min\left\{\frac{1}{\tau_2}, \|\mathbf{t}_{ij}^{(k)}\|_2\right\} \frac{\mathbf{t}_{ij}^{(k)}}{\|\mathbf{t}_{ij}^{(k)}\|_2}$

$k = 0, 1, \dots$, 初始点为 $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}_{ij}^{(0)}, \mathbf{s}^{(0)}, \mathbf{t}_{ij}^{(0)}$ 。

根据 Combettes 和 Wajs^[21] 的收敛性理论,上述 4 步迭代生成的 $\mathbf{x}^{(k)}$ 在 τ_1, τ_2 足够小的情况下是收敛的。文献[20]指出这种分裂算法也可以通过降

低 γ 的值加快计算速度。关于分裂算法的详细论述,读者可参阅文献[20]。

在数值实验中,信噪比(SNR)和相对误差(relative error)用来评估重构图像的质量。信噪比和相对误差定义如下:

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\|\mathbf{x}_o\|_2}{\|\mathbf{x}_o - \mathbf{x}\|_2} \right)$$

$$\text{Rerr} = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\|_2^2}{\|\mathbf{x}_o\|_2^2}$$

式中 \mathbf{x} 和 \mathbf{x}_o 分别代表重构图像和原始图像。

在本文的数值实验中,所采用的噪声是均值为 0,方差为 0.01 的 Gauss 噪声,不论是交替最小化算法还是分裂算法,正交小波采用的都是 Harr 小波。在用交替最小化算法进行数值实验中,给定的初始值 $\beta_0 = 2^5$,而在加速过程中 β 的增长倍数为 2,最大的 $\beta_{\max} = 2^{10}$,让 $\mu = 1\ 000$,设图像的初始值 $\mathbf{x}_0 = 0$,取迭代终止准则为

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_2}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|_2} < \varepsilon \quad \varepsilon > 0 \quad (19)$$

图 1(a) 是 256×256 的 Shepp-Logan Phantom 原始图像,在其频域上按照图 1(b) 所示的 66 views 进行抽样,其抽样率为 16.35%,采用交替最小化算法在 $\varepsilon = 10^{-3}$ 作图像重构实验,所得结果如图 1(c),重构图像的信噪比(SNR)、相对误差(Rerr)和 CPU 时间分别为 26.495 4 dB、0.047 3 和 2.984 4 s。

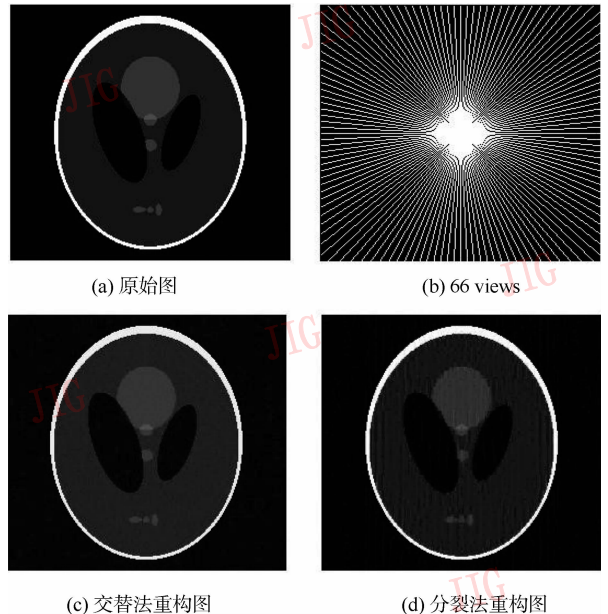


图 1 Phantom 原始图、66 views 抽样频域图和重构图 Fig. 1 Original Phantom, 66 views and reconstructions

现在再采用分裂算法对同样的 Phantom 图像进行实验。为了能够与交替最小化算法具有可比性,在分裂算法中选取 $\gamma = 1 \times 10^{-3}$,这与交替最小化算法中的 $\mu = 1\ 000$ 是一样的,分裂算法的终止准则仍然为式(19)。当取 $\varepsilon = 10^{-4}$ 时,其重构结果如图 1(d),重构图像的信噪比(SNR)、相对误差(Rerr)和 CPU 时间分别为 18.693 1 dB、0.116 2 和 7.33 s。从两种方法重构的结果来看,交替最小化算法重构的图像质量明显好于分裂算法,而且从 SNR、Rerr 和 CPU 的评价指标来看,尽管交替算法终止容忍值 ε 比分裂算法终止容忍值 ε 大 10 倍,但前者重构图像的 SNR 比后者还是高于 7.802 3 dB,而 Rerr、CPU 时间前者比后者少 0.068 9、4.345 6 s。

继续对 Phantom 图像进行 77、88、99 和 110 views 抽样,其抽样率分别是 27.60%、31.17%、34.62% 和 34.62%,采用这两种方法进行重构的图像如图 2 和图 3。

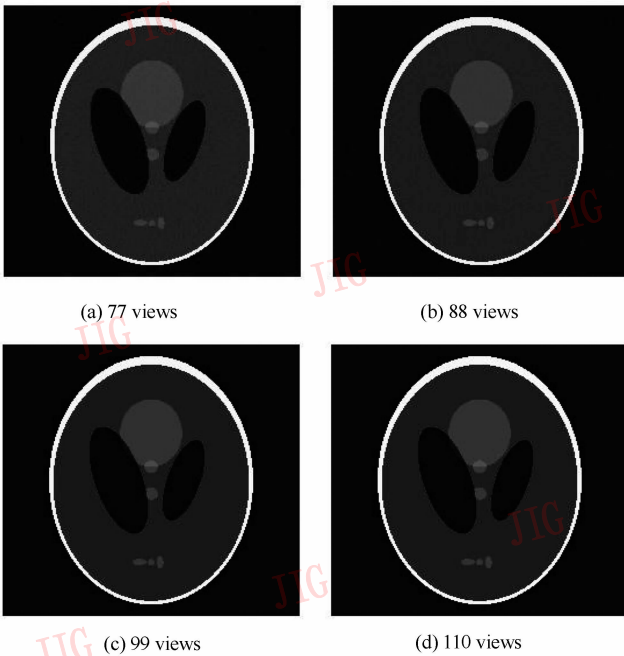


图 2 交替最小化算法重构图

Fig. 2 Reconstructions by alternating minimization method

表 1 显示的是这两种方法得到的重构图像的信噪比、相对误差和 CPU 时间。从表中数据可以看出,交替最小化算法得到的重构图像的信噪比比算子分裂算法重构图像的信噪比要高得多,而相对误差和 CPU 时间却小得多。

图 4—6 给出了这两种方法重构 Phantom 图像的信噪比、相对误差和 CPU 时间与抽样率之间的关系。

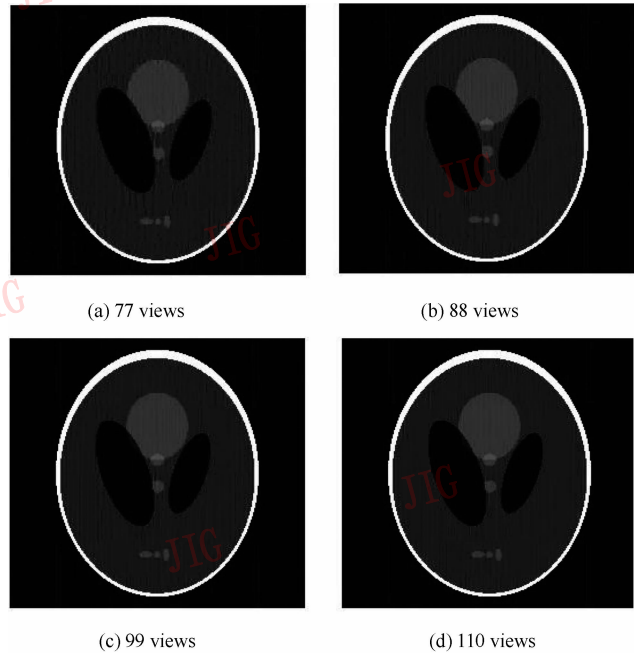


图 3 算子分裂算法重构图

Fig. 3 Reconstructions by operator splitting method

表 1 两种方法重构图像的信噪比、相对误差和 CPU 比较

Tab. 1 SNR, Rerr, CPU of two reconstructions

views/抽样率/%	方法	信噪比/dB	相对误差	CPU/s
77/27.6	交替法	29.983 8	0.031 7	2.796 9
	分裂法	21.112 3	0.088 0	6.910 0
88/31.17	交替法	32.674 7	0.023 2	2.437 5
	分裂法	23.191 0	0.069 3	6.860 0
99/34.62	交替法	35.511 1	0.016 8	1.968 8
	分裂法	24.774 7	0.057 7	6.660 0
110/37.98	交替法	37.773 8	0.012 9	1.750 0
	分裂法	27.019 0	0.044 6	6.500 0

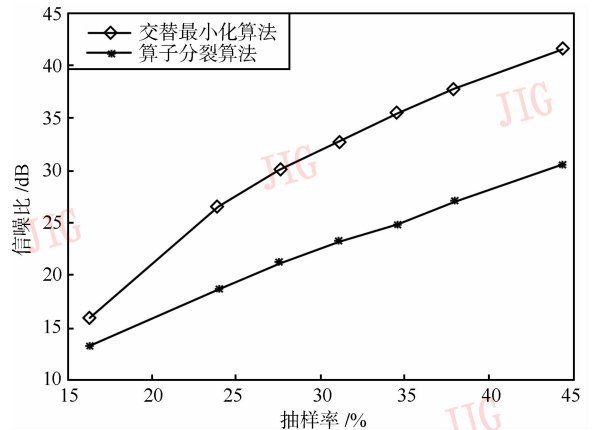


图 4 重构图像的信噪比与抽样率之间的关系

Fig. 4 Relation between SNR and sampling ratios

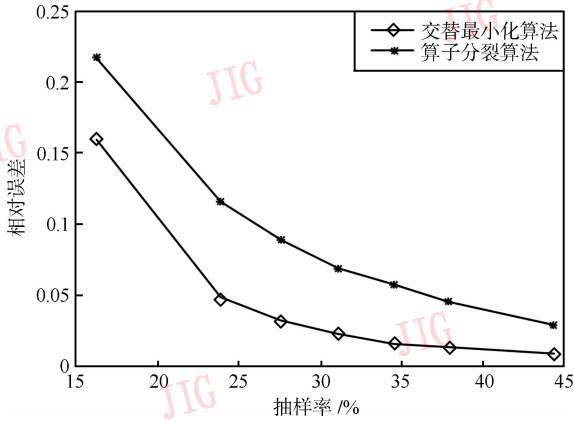


图 5 重构图像的相对误差与抽样率之间的关系
Fig. 5 Relation between Rerr and sampling ratios

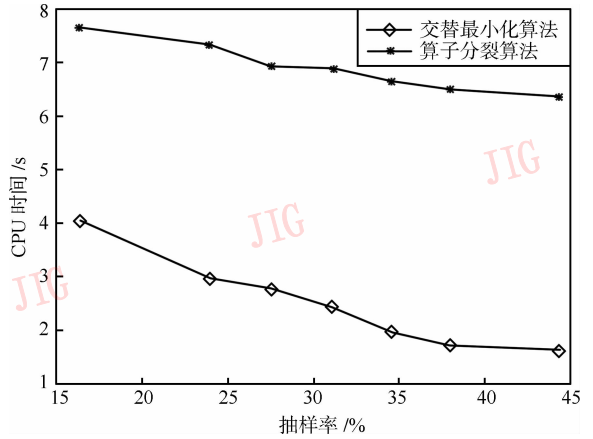


图 6 重构图像的 CPU 与抽样率之间的关系
Fig. 6 Relation between CPU and sampling ratios

图 7 为 MR 原始图像对其进行 110 views 频域抽样,用交替最小化方法和算子分裂方法进行重构实验,所采用的参数和迭代终止值仍然不变,得到的结果如图 8 和图 9。

从重构图像的结果可看出交替最小化算法重构的图像好于算子分裂算法重构的图像。表 2 显示的是这两种方法的信噪比、相对误差和 CPU 时间。

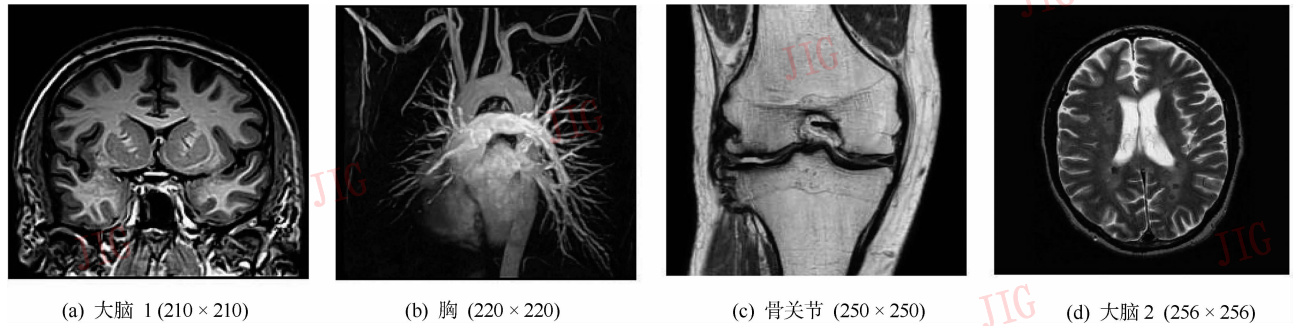


图 7 MR 原始图像
Fig. 7 Original images of MR

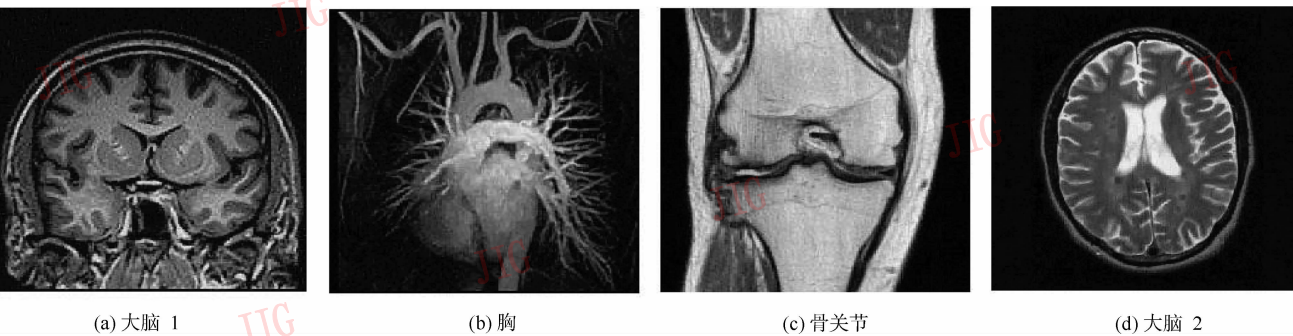


图 8 交替最小化算法重构的图像
Fig. 8 Reconstructions by alternating minimization method

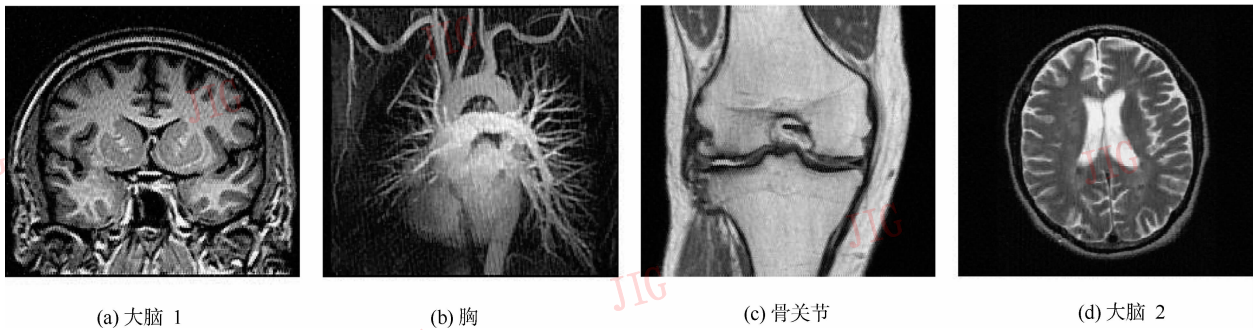


图9 算子分裂算法重构的图像

Fig. 9 Reconstructions by operator splitting method

表2 两种方法重构图像的信噪比、相对误差和 CPU 比较

Tab. 2 SNR, Rerr, CPU of two reconstructions

图像	方法	SNR/dB	Rerr	CPU/s
大脑 1	交替法	15.658 2	0.164 9	1.343 8
	分裂法	14.635 2	0.185 5	2.420 0
胸	交替法	19.048 8	0.111 6	1.218 8
	分裂法	17.706 7	0.130 2	2.810 0
骨关节	交替法	24.202 4	0.061 6	1.000 0
	分裂法	23.633 6	0.065 8	2.950 0
大脑 2	交替法	21.397 2	0.085 1	1.593 8
	分裂法	20.749 0	0.091 7	5.530 0

4 结 论

给出了压缩传感中用于重构小波稀疏下的 MR 图像重构的交替最小化算法,并分析了该算法的收敛性。交替最小化算法可以通过连续性方法得到加速。通过数值实验对交替最小化算法与最新的算子分裂算法进行了比较,实验结果表明:

1) 交替最小化算法重构的图像比算子分裂算法重构的图像具有更高的信噪比,具有更低的相对误差和更少的 CPU 计算时间。

2) 从主观观察来看,在 MRI 压缩传感中交替最小化算法比算子分裂算法具有更好的图像重构质量。

交替最小化方法可用于核磁共振快速成像,在图像压缩传感中具有一定的应用价值。

参考文献 (References)

[1] Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact

signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2006, 52(2): 489-509.

[2] Donoho D, L. Compressed sensing [J] . IEEE Trans. Inform. Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.

[3] Candes E J, Romberg J. Sparsity and incoherence in compressive sampling [J]. Inverse Problems, 2007, 23(3): 969-985.

[4] Natarajan B K. Sparse approximation solutions to linear systems [J]. SIAM J. Comput., 1995, 24(2): 227-234.

[5] Kim S J, Koh K, Lustig M. An interior-point method for large-scale ℓ_1 -regularized least squares [J]. IEEE Trans. on Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4): 606-617.

[6] Figueiredo M, Nowak R., Wright S J. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems [J]. IEEE Trans. on Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4): 586-597.

[7] Daubechies I, Defrise M, De Mol C. An iterative thresholding algorithm for linear problems with a sparsity constraint [J]. Comm. Pure Appl. Math., 2004, 57(11): 1413-1457.

[8] Efron B, Hastie T, Johnstone I, et al. Least angle regression [J]. Ann. Statist., 2004, 32(2): 407-499.

[9] Yin W, Osher S, Goldfarb D. Bregman iterative algorithm for ℓ_1 -minimization with applications to compressed sensing [J]. SIAM J. Image Sciences, 2008, 1(1): 143-168.

[10] Goldstein T, Osher S. The split Bregman method for ℓ_1 -regularized problems [J]. SIAM J. Image Sciences, 2009, 2(2): 323-343.

[11] He L, Chang T C, Osher S, et al. MR Image Reconstruction by Using the Iterative Refinement Method and Nonlinear Inverse Scale Space Methods; UCLA CAM Report 06-35 [R] . Los Angeles: University of California, 2006.

[12] Lustig M, Donoho D, Pauly J. Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging [J] . Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 58(6): 1182-1195.

[13] Geman D, Reynolds G. Constrained restoration and recovery of discontinuities [J] . IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 1992, 14(3): 367-383.

[14] Geman D, Yang C. Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization [J]. IEEE Trans. Image Process., 1995, 4(7): 932-

- 946.
- [15] Huang Y, Michael K N, Wen Y. A fast total variation minimization method for image restoration [J]. SIAM J. Multiscale Model. Simul., 2008, 7(2): 774-795
- [16] Wang Y, Yang J, Yin W, et al. An alternating minimization algorithm for total variation image reconstruction [J]. SIAM J. Image Sciences, 2008, 1(3): 248-272.
- [17] Opal Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, 73(4): 591-597.
- [18] Yang J, Yin W, Wang Y. A fast algorithm for edge-preserving variational multichannel image restoration [J]. SIAM J. Image Sciences, 2009, 2(2): 569-592.
- [19] Hale E T, Yin W, Zhang Y. Fixed-point continuation for ℓ_1 -minimization: methodology and convergence [J]. SIAM J. Optim., 2008, 19(3): 1107-1130.
- [20] Ma S, Yin W, Zhang Y, et al. An efficient algorithm for compressed MR imaging using total variation and wavelets [C]// Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Anchorage, Alaska; Oregon State University, 2008: 1-8.
- [21] Combettes P L, Wajs V R. Signal recovery by proximal forward-backward splitting [J]. SIAM J. Multiscale Model. Simul., 2005, 4(4): 1168-1200.