

中图分类号: TP391.41 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2011)12-2140-05

论文索引信息: 刘红毅, 韦志辉, 张峥嵘. 改进的核回归图像恢复 [J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(12): 2140-2144

# 改进的核回归图像恢复

刘红毅<sup>1)</sup>, 韦志辉<sup>2)</sup>, 张峥嵘<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> (南京理工大学理学院, 南京 210094)

<sup>2)</sup> (南京理工大学计算机科学与技术学院, 南京 210094)

**摘要:** Steering 核回归是一种自适应的、有效的图像恢复方法, 在图像去噪、放大和去模糊中都得到了广泛应用。但此模型以高斯函数为核函数, 故得到的恢复图像边缘, 尤其是细小边缘常常会因过分平滑而模糊。提出基于鲁棒统计的各向异性核回归图像恢复模型, 该模型在 Steering 核回归模型基础上, 结合各向异性距离, 以鲁棒统计权函数代替高斯核函数。大量图像恢复实验结果显示, 与 Steering 核回归方法相比较, 所提出方法得到的恢复图像质量显著提高, 尤其是在细小边缘保持方面更具有明显优势。

**关键词:** 图像恢复; 核回归; 边缘保持

## Improved kernel regression model for image restoration

Liu Hongyi<sup>1)</sup>, Wei Zhihui<sup>2)</sup>, Zhang Zhengrong<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> (School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094 China)

<sup>2)</sup> (School of Compute Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094 China)

**Abstract:** Steering kernel regression is an adaptive and effective image restoration algorithm, which has been widely used for image denoising, enlargement and deblurring. However this model is based on the Gaussian kernel function, which often blurs the image edges, especially micro-edges in its restoration. A new anisotropic image restoration model based on robust statistics is proposed, which improved the Steering kernel regression model. The new method is to incorporate anisotropic distance and introduce robust estimation kernel function instead of Gaussian function. Extensive experiment results demonstrate that the new method can yield superior performance to that of the steering kernel regression, especially in preserving the details of the image edges.

**Keywords:** image restoration; kernel regression; edge preserving

## 0 引言

图像恢复的目的是消除或减少图像获得或传输过程中的品质下降问题, 改善提高图像质量。经典的像素级图像恢复方法利用周围像素点的值估计当前像素点的灰度值, 如平均值滤波、统计滤波等。此

类方法简单, 执行效率高, 但恢复图像边缘会因磨光而模糊。究其原因是忽略了图像信息本身的一个重要特征, 即不同部分具有不同强度的相关性: 在图像的平坦区域, 周围像素具有较强的相关性; 而在图像的边缘区域, 像素间的相关性较弱。近几年研究者在边缘保持的自适应图像恢复方面做出了大量卓有成效的工作, 主要有非线性滤波器方法<sup>[1-3]</sup>、图像

收稿日期: 2011-01-04; 修回日期: 2011-03-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(60802039); 江苏省自然科学基金项目(BK2010488); 南京理工大学自主科研专项计划基金项目(2010ZY070, 2010ZDJH07)。

第一作者简介: 刘红毅(1974—), 女, 讲师。2003年于西北大学获计算数学专业硕士学位, 主要研究方向为图像建模、图像多尺度分析、模式识别。E-mail: hylu@mail.njust.edu.cn。

变分模型方法<sup>[4-5]</sup>、图像变化域及稀疏表示方法等<sup>[6]</sup>。

Tomasi 和 Manduchi 提出双边滤波器,同时考虑到周围像素与中心点像素的几何距离以及灰度值之间的相似性<sup>[1]</sup>。距离远,相似性小的赋予较小权值,反之赋予较大权值。2005 年, Baudes 等人进一步将双边滤波思想拓展到非局部均值滤波<sup>[7-8]</sup>,以邻域像素与当前像素块之间的局部相似性作为权重。这种方法克服了传统局部邻域平均加权的局限性,在整幅图像中搜索相似块,计算量比较大。Brox 等人通过对像素块进行分类以加快非局部均值方法的搜索速度,得到对于纹理结构保持的快速去噪方法<sup>[9]</sup>。Takeda 等人提出 Steering 核回归模型<sup>[10]</sup>,通过各向异性距离自适应调节权值,并建立了非局部均值方法和核回归模型之间的联系<sup>[11]</sup>。Liu 等人改进了 Takeda 的 Steering 核回归模型,利用结构张量矩阵构造各向异性距离,有效保持了放大图像的边缘信息<sup>[12]</sup>。

以上核回归或非局部均值方法的关键是如何更有效、自适应的利用像素与像素、块与块之间的相似性以得到周围像素灰度值对于当前像素灰度值的贡献——权值,近年来已有学者陆续提出用其他权函数代替非局部均值滤波中的权函数<sup>[13-14]</sup>。本文对核回归模型中的权函数进行改进,提出基于鲁棒统计权函数的各向异性核回归图像恢复模型。实验结果显示,无论是视觉效果方面还是峰值信噪比方面,所提出模型都具有良好的图像恢复效果。

## 1 核回归图像恢复模型

考虑图像观测模型

$$y_i = z(\mathbf{x}_i) + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{x}_i = (\mathbf{x}_{i1} \quad \mathbf{x}_{i2})^T$  为采样数据点,  $y_i$  是采样点的灰度值,  $z(\mathbf{x}_i)$  是真实图像,  $\varepsilon_i$  为误差,  $p$  为采样个数。图像恢复的核回归模型为

$$\min \sum_{i=1}^p [y_i - z(\mathbf{x}_i)]^2 W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) \quad (2)$$

式中,  $W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x})$  为核函数,度量像素点  $\mathbf{x}_i$  与  $\mathbf{x}$  之间的相似性。对  $z(\mathbf{x}_i)$  在  $\mathbf{x}$  点处进行 Taylor 展开,设  $\beta_i^T$  为 Taylor 展开式中  $z(\mathbf{x})$  的第  $i$  阶导数,记

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_p]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{b} = [\beta_0(\mathbf{x}), \beta_1^T(\mathbf{x}), \dots, \beta_N^T(\mathbf{x})]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{W} = \text{diag}[W_h(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}), W_h(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}), \dots, W_h(\mathbf{x}_p - \mathbf{x})] \quad (5)$$

则加权最小二乘问题式(2)的矩阵形式为

$$\hat{\mathbf{b}} = \arg \min_{\mathbf{b}} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}_x \mathbf{b}\|_{\mathbf{W}}^2 = \arg \min_{\mathbf{b}} (\mathbf{y} - \mathbf{X}_x \mathbf{b})^T \mathbf{W} (\mathbf{y} - \mathbf{X}_x \mathbf{b}) \quad (6)$$

式中,  $\mathbf{X}_x$  每个元素为 Taylor 展开式中  $\mathbf{x}$  的多次项,求解式(3)得到

$$\hat{z}(\mathbf{x}) = \hat{\beta}_0 = \mathbf{e}_1^T (\mathbf{X}_x^T \mathbf{W} \mathbf{X}_x)^{-1} \mathbf{X}_x^T \mathbf{W} \mathbf{y} \quad (7)$$

式中  $\mathbf{e}_1^T = (1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$  为单位向量。

在求解表达式(7)中,恢复图像  $\hat{z}(\mathbf{x})$  表示为观测图像  $y$  的加权平均和,不同权重  $W_h$  (核函数)决定了不同的恢复方法,也决定了图像恢复的精确度和计算量。

传统核函数只考虑采样点之间的距离,双边核函数不仅考虑到采样点之间的距离而且有效利用了采样点的灰度值<sup>[1]</sup>:

$$W_{\text{Bilater}}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}, y_i - y) = W_{h_s}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) W_{h_g}(y_i - y) \quad (8)$$

式中,  $W$  取高斯函数,  $h$  为高斯函数的平滑参数。双边核采用可分离的形式将距离与灰度信息结合,但这仍不能完全反映图像的几何信息。Takeda 利用协方差矩阵提供的图像几何结构信息,提出自适应的核函数 Steering 核<sup>[10]</sup>

$$W_s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \frac{\sqrt{\det(\mathbf{C}_i)}}{2\pi h^2 \mu_i^2} \exp\left\{\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T \mathbf{C}_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{-2h^2 \mu_i^2}\right\} \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{C}_i$  为图像的局部协方差矩阵,式(9)通过协方差矩阵  $\mathbf{C}_i$  判断像素的类型,属于边缘还是平滑部分,达到了根据图像内容自适应调节权函数的目的。

## 2 鲁棒统计的核回归模型

Takeda 提出的 Steering 核回归模型利用各向异性距离,有效结合像素位置和灰度信息,得到几何结构保持的恢复图像。但由于高斯函数的平滑效果,恢复图像的细小边缘会因为过分磨光而丢失。在图像的细小边缘处,当前像素点的值和周围像素的相似度比较低,而高斯权函数却对于边缘周围像素也赋予了比较高的权值。鲁棒统计通过定义鲁棒惩罚(错误)函数来抑制图像的异常点(边缘)的影响。为了增加鲁棒性和拒绝异常点,

错误函数应该可以容忍更多的异常点,其导数影响函数也反映了这点,当梯度幅值在一个固定点之外,其影响就会减少。反映在权函数上就是靠近原点附近,权值收敛快,对于边缘起到增强或保持的效果。Black 等人利用不同鲁棒函数构造各向异性扩散<sup>[15]</sup>,在几种鲁棒函数中,Tukey 函数得到了较好效果。Peter 等人在文献[13]中提出了 Geman-McClure 函数可以得到比高斯函数更好的非局部去噪效果。

从鲁棒统计的角度,高斯函数是鲁棒错误函数 Welsh 函数对应的权函数。Welsh 函数、Tukey 双边函数以及 Geman-McClure 函数的数学表达式及图形如下。从图形上也可以看到,Tukey、Geman-McClure 函数比  $l^2$  范数更加鲁棒,当距离在某个范围之外,函数的影响函数会降到零,权值也降到零值,相当于硬阈值。这种情况下光滑力度会有所减小,但对于边缘却会得到很好保持。

1) Welsh 函数

$$\text{错误函数 } \rho_w(x) = -\frac{\sigma^2}{2} (1 - e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}})$$

$$\text{权函数 } W_w(x) = e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$$

$$\text{影响函数 } \psi_w(x) = xe^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$$

如图 1 所示。

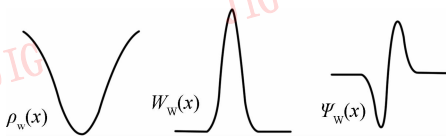


图 1 Welsh 鲁棒函数

Fig. 1 Welsh robust function

2) Tukey 函数

错误函数

$$\rho_T(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4\sigma^2} & |x| \leq \sigma \\ \frac{x^2}{4} & |x| > \sigma \end{cases}$$

权函数

$$W_T(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{\sigma^2} & |x| \leq \sigma \\ 0 & |x| > \sigma \end{cases}$$

影响函数

$$\psi_T(x) = \begin{cases} x \left( 1 - \frac{x^2}{\sigma^2} \right) & |x| \leq \sigma \\ 0 & |x| > \sigma \end{cases}$$

如图 2 所示。

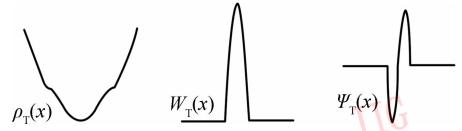


图 2 Tukey 鲁棒函数

Fig. 2 Tukey robust function

3) Geman-McClure 函数

$$\text{错误函数 } \rho_{GM}(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2 + x^2}$$

$$\text{权函数 } W_{GM}(x) = \frac{\sigma^2}{(\sigma^2 + x^2)^2}$$

$$\text{影响函数 } \psi_{GM}(x) = \frac{\sigma^2 x}{(\sigma^2 + x^2)^2}$$

如图 3 所示。

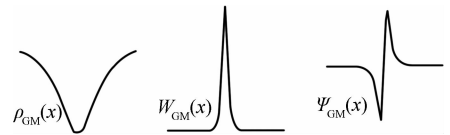


图 3 Geman-McClure 鲁棒函数

Fig. 3 Geman-McClure robust function

在以上分析基础上,选用 Tukey 权函数和 Geman-McClure 权函数,建立两种鲁棒统计意义下的各向异性核回归图像恢复模型

$$\min \sum_{i=1}^P [y_i - z(x_i)]^2 W_T(x_i - x) \quad (10)$$

$$\min \sum_{i=1}^P [y_i - z(x_i)]^2 W_{GM}(x_i - x) \quad (11)$$

式中,  $W_T$  和  $W_{GM}$  分别为

$$W_T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \begin{cases} 1 - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_c^2}{\sigma^2} & \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_c \leq \sigma \\ 0 & \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_c > \sigma \end{cases} \quad (12)$$

$$W_{GM}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \frac{\sigma^2}{(\sigma^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_c^2)^2} \quad (13)$$

距离采用协方差矩阵得到的各向异性距离

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_c = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T \mathbf{C}_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (14)$$

模型式(10)(11)的求解同模型式(2)。

3 实验结果及分析

本部分分别给出图像放大和去噪两组实验结

果,为说明方便,用高斯代表 Steering 核回归模型,用 Tukey 表示 Tukey 核回归模型,GM 表示 Geman-McClure 核回归模型。

### 3.1 图像放大

实验数据采用 Lena 图像(256 × 256)、Rice 图像(256 × 256) 和 Lena 脸部图像 (Lenasf) (100 × 100)。在放大实验中,为了得到方法的可比性,对原始图像进行 2 倍降采样后再进行放大。

图 4 给出了应用 3 种模型对 Lena 图像进行放大两倍的图像和残差图像。图 4(a)中,高斯函数有很好的平滑效果,但放大图像的帽檐等纹理有部分丢失,而且竖线形边缘(如桌腿)等被过分模糊。Tukey 权函数在帽檐处与高斯函数类似,有过于平滑的效果,但图像中细小边缘头发等却得以较好保持。相比而言,GM 权函数不但可以达到同样的平滑效果,而且 Lena 图像中的帽檐、头发等边缘及纹理清晰可见(图 4(c)),有效避免了阶梯效应。残差图像图 4(d)中,由高斯核得到的边缘有明显竖条效应,而其他两种方法中残留边缘显著减少,尤其是在桌脚处。同时,GM 方法得到的残差图像里包含的纹理和边缘成分最少,说明此权函数在保持图像的细小边缘及纹理方面具有良好性能。

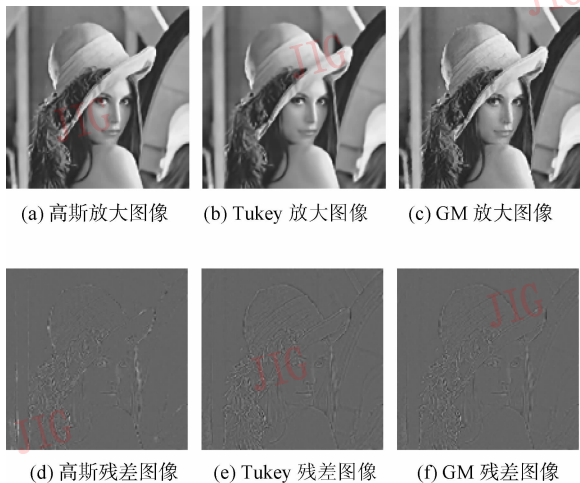


图 4 Lena 图像放大结果

Fig. 4 Enlargement results for Lena image

3 种核回归模型对 Rice 图像放大两倍后的效果如图 5 所示。相对于 Lena 图像,Rice 图像包含纹理少,但细节丰富,小边缘多。Tukey 和 GM 方法得到的放大图像质量明显高于高斯核的,高斯核得到的放大图像中的边缘过于模糊,同时残差图像中丢失了较多的大米边缘。而 GM 核对

于细小边缘保持很好,图像边缘清晰可见,残差图像中只有很少一部分边缘丢失,其均方误差也达到了最小。Tukey 方法介于两者之间。

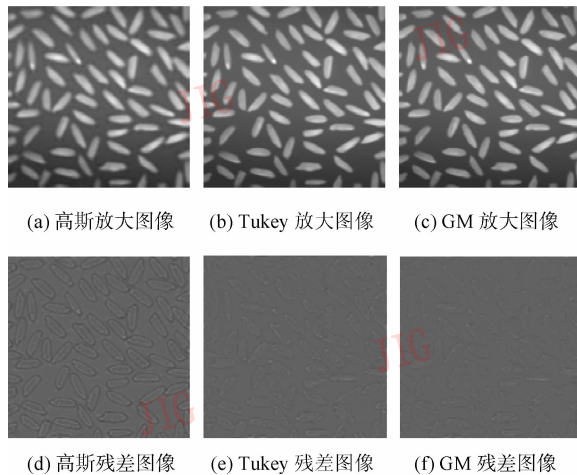


图 5 Rice 图像放大结果

Fig. 5 Enlargement results for Rice image

表 1 给出不同图像在 3 种模型下放大效果的均方误差。无论是纹理丰富的 Lena 图像和 Lena 脸部图像,还是细节丰富的 Rice 图像,GM 核都达到了最小的均方误差,特别是对于 Rice 图像这类具有细小边缘的图像,GM 方法可以达到很小的均方误差(3.432 7)。

表 1 放大图像均方误差比较

Tab. 1 RMSE for the enlargement results

图像	放大倍数	RMSE		
		高斯	Tukey	GM
Lena	2	8.839 5	8.591 2	7.791 9
Lenasf	2	10.049 1	9.806 3	8.990 2
Lenasf	4	19.349 7	18.585 1	18.241 7
Rice	2	6.858 3	3.986 0	3.434 7
Rice	4	9.845 4	10.016 6	9.245 3

### 3.2 图像去噪

在图像去噪实验中,对 256 × 256 大小的 Pepper、Rice 和人工合成几何图像分别加入 30% 的高斯白噪声。图 6 比较了 3 种模型对几何图像的去噪效果。高斯核有效去除了大部分噪声,但是几何图形边线却变得模糊,在三角形和圆的边缘出现了类似于振铃效应的双边。同时,残差图像保留了圆的更多边缘信息。由 GM 核得到的去噪图像达到与高斯核同样的去噪效果(图 6(c)),而且去噪图像细节清晰,其中的

几何图形三角形、圆等的边线得到了很好的保持。由 Tukey 核得到去噪效果虽然不如高斯核,但较好保持了图像边缘。在对于 Pepper 图像和 Rice 图像去噪实验中,也得到了同样的结果,峰值信噪比见表 2。整体而言,GM 核在去噪的同时很好保持了图像的细小边缘且得到了较高的峰值信噪比。

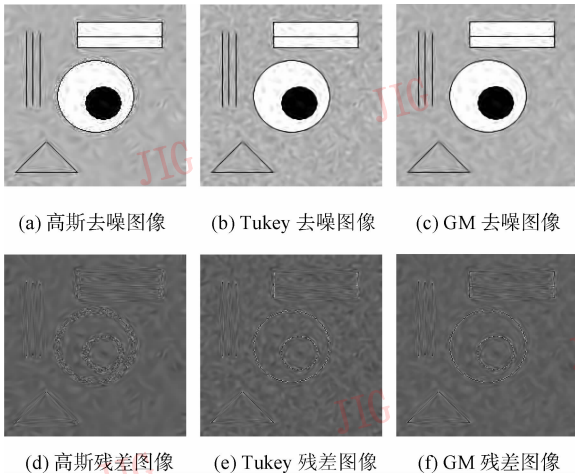


图 6 人工合成几何图像去噪结果

Fig. 6 Denoising results for Geometric image

表 2 去噪图像峰值信噪比比较

Tab. 2 PSNR for the denoising results

图像	PSNR		
	高斯	Tukey	GM
几何图像	28.294 4	26.639 5	27.449 4
Rice	30.761 7	30.795 9	30.898 9
Pepper	27.707 5	27.371 5	27.859 9

## 4 结 论

针对传统高斯核函数得到的恢复图像过于平滑的不足,选用鲁棒统计函数 Tukey 以及 GM 函数诱导的权函数代替核回归中的核函数,像素间距离采用协方差矩阵计算得到的各向异性距离,提出改进的 Steering 核回归图像恢复模型。同 Steering 核回归模型相比较,在图像去噪和放大实验中,所提出的两种模型得到的恢复图像具有更好的视觉效果,同时更好保持了图像的边缘与纹理等细节部分,特别是对于纹理较少、细节丰富的图像(如 Rice 图像)。在 3 种核回归模型中,基于 GM 核函数的核回归模型不仅达到了最好的视觉效果,而且具有更大的峰值信噪比和更小的均方误差。

## 参考文献 (References)

- [1] Tomasi C, Manduchi R. Bilateral filtering for gray and color images [C]// Proceedings of the International Conference on Computer Vision, Washington, USA: IEEE, 1998: 839-846.
- [2] Elad M. On the bilateral filter and ways to improve it [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2002, 11(10): 1141-1151.
- [3] Shao Wenze, Wei Zhihui. Digital bilateral TV filtering and nonlinear denoising [J]. Journal of Graphic and Image, 2007, 12(7): 1178-1184. [邵文泽, 韦志辉. 数字双边全变差滤波与非线性去噪 [J]. 中国图象图形学报, 2007, 12(7): 1178-1184.]
- [4] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithm [J]. Physical D, 1992, 60(1): 259-268.
- [5] Chan T, Marquina A, Mulet P. High order total variation-based image restoration [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2000, 22(2): 503-516.
- [6] Caneds E J. Ridgelet: Theory and Application [D]. Stanford: Stanford University, 1998.
- [7] Buades A, Coll B, Morel J M. A review of image denoising algorithms, with a new one [J]. Multiscale Modeling and Simulation, 2005, 4(2): 290-530.
- [8] Buades A, Coll B, Morel J M. A non-local algorithm for image denoising [C]// Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, San Diego, USA: IEEE, 2005: 60-65.
- [9] Brox T, Kleinschmidt O, Cremers D. Efficient nonlocal means for denoising of textural patterns [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2008, 17(7): 1057-1092.
- [10] Takeda H, Farsiu S, Milanfar P. Kernel regression for image processing and reconstruction [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(2): 349-366.
- [11] Takeda H, Farsiu S, Milanfar P. A generalization of non-local means via kernel regression [C]// Proceedings of IS&T/SPIE Conference of Computational Imaging. San Jose, USA: SPIE, 2008: 68140.
- [12] Liu H Y, Wei Z H. An edge-adaptive structure tensor kernel regression for image interpolation [C]// Proceedings of the International Conference on Future Computer and Communication. Piscataway NJ, USA: IEEE, 2010: 2681-2684.
- [13] Peter D J, Govindan V K, Abraham T M. Robust estimation approach for nonlocal-means denoising based on structurally similar patches [J]. International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics, 2009, 2(2): 293-310.
- [14] Ming L. An improved non-local filter for image denoising [C]// Proceedings of the International Conference on Information Engineering and Computer Science. Piscataway NJ, USA: IEEE, 2009: 1-4.
- [15] Black J, Sapiro G, Marimont D H, et al. Robust anisotropic diffusion [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 421-432.