

中图法分类号: TN919.81 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2010)11-1569-09

检索信息: 熊刚强, 齐东旭. 基于 U-正交变换的图像编码算法[J]. 中国图象图形学报, 2010, 15(11): 1569-1577

# 基于 U-正交变换的图像编码算法

熊刚强<sup>1), 2)</sup>, 齐东旭<sup>2), 3)</sup>

<sup>1)</sup> (广东医学院数学与计算机科学教研室, 东莞 523808) <sup>2)</sup> (中山大学信息科学与技术学院, 广州 510275)

<sup>3)</sup> (澳门科技大学资讯科技学院, 澳门)

**摘要:** 为了更有效地进行图像编码, 先用 U-正交函数系构造出一类新型的 U-正交变换, 并以三次 U-正交变换为例, 研究了基于 U-正交变换的图像编码算法。该编码算法首先通过离散 U-正交函数系的基函数构造 U-正交变换的变换矩阵, 并根据 U-正交矩阵的对称性给出了 U-正交变换的快速算法; 然后应用三次 U-正交变换对图像实施 2 维变换, 再用 JPEG 标准中的量化矩阵、Huffman 码表与熵编码方法对图像的三次 U-变换系数进行量化与编码, 实现了基于三次 U-正交变换的图像编码算法。实验结果表明, 三次 U-正交变换的编码增益、去相关效率与 DCT 基本相同, 而编码效果却与 JPEG 编码效果非常接近, 且计算复杂度与基于 FFT 的快速 DCT 算法基本一致。由此可见, 应用 U-正交变换对图像进行编码压缩是一类行之有效的方法, 并有望在视频编码中得到应用。

**关键词:** U-正交变换; 离散余弦变换; 图像编码; 去相关率; 编码增益

## Algorithm of image encoding based on U-orthogonal transform

XIONG Gangqiang<sup>1), 2)</sup>, QI Dongxu<sup>2), 3)</sup>

<sup>1)</sup> (Department of Mathematics and Computer, Guangdong Medical College, Dongguan 523808)

<sup>2)</sup> (School of Information Science and Technology, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275)

<sup>3)</sup> (Faculty of Information Technology, Macao University of Science and Technology, Macao)

**Abstract:** Discrete cosine transform (DCT) has been applied extensively to the area of image compressing; in order to improve image encoding, this paper introduces a class of orthogonal complete piecewise  $k$ -degree polynomials in  $L^2[0, 1]$  (so-called U-system). Firstly, a class of new U-orthogonal transform is constructed using U-orthogonal basis, and an algorithm of image coding based on U-orthogonal transform is presented by investigating 3-degree U-orthogonal transform (so-called U3). Secondly, two methods of calculating discrete U-orthogonal transform matrices are established, and the fast U-transform is derived from symmetrical characteristic of U-transform matrices. Thirdly, coding gain and de-correlation efficiency of U3 are studied, and then JPEG algorithm is realized using U3 instead of DCT. The experiments show coding gain and de-correlation efficiency of U3 are close to that of DCT, and the computational complexity of U-transform is approximate to that of DCT which computed using fast Fourier transform algorithm. Moreover the effect of reconstructed image from our scheme is comparable to that of decoded image from baseline JPEG. So it is effective to apply U-transform, which may be used extensively in the application of video coding, to the field of image compression.

**Keywords:** U-orthogonal transform; discrete cosine transform; image encoding; de-correlation rate; coding gain

## 0 引言

在静态图像编码中, JPEG (joint photographic

experts group) 标准<sup>[1]</sup>是目前应用广泛的图像编码标准, 它既适应灰度图像压缩的要求, 也适应彩色图像压缩<sup>[2]</sup>的要求。在 JPEG 标准中, 首先使用离散余弦变换 (DCT) 对图像进行  $8 \times 8$  的分块正交变

**基金项目:** 国家自然科学基金重点项目 (10631080); 国家基础研究发展规划 (973) 项目 (2004CB318000); 澳门科学发展基金项目 (045/2006/A); 北京市教委面上项目 (KM200910009001)。

**收稿日期:** 2009-04-28; **改回日期:** 2009-06-30

**第一作者简介:** 熊刚强 (1968—), 男, 讲师, 工程师, 博士研究生。主要研究方向是小波分析与计算机图像处理。E-mail: xiongqg@yahoo.cn。

换, 然后对变换系数进行量化、熵编码。在变换域中, 由于大部分系数的值都比较小, 因此经过量化处理后, 可以使这些系数变为 0, 再经过熵编码, 即可达到压缩图像的目的。基于 DCT 的变换编码技术不仅可应用于静态图像压缩, 也被广泛地应用于视频压缩<sup>[3]</sup>, 本文引入了另一类正交变换 (U-正交变换), 并用 U-正交变换代替 DCT 对图像进行变换编码。

U-正交函数系是 1983 年到 1984 年由齐东旭教授与冯玉瑜教授构造出来的一组分段多项式正交函数系<sup>[4-6]</sup> (简称 U-系统)。该函数系首先由 Legendre 正交多项式构造出 U-系统的函数生成元; 然后通过压缩、复制或反复制, 生成 U-系统的其他正交函数, 所生成的函数序列已被证明是  $L^2[0,1]$  空间上的完备正交函数系。2005 年, 宋瑞霞教授应用 U-系统的函数生成元构造出了另一组  $L^2[0,1]$  空间上的正交函数系<sup>[7]</sup>, 称之为 V-系统。U-系统与 V-系统在几何图形表示与频谱的研究中均取得了较为成功的应用<sup>[8-12]</sup>。本文首先通过 U-系统构造出 U-正交变换, 然后用 U-正交变换研究静态图像的编码算法。

## 1 U-正交函数系

### 1.1 U-系统的构造

$r$  次 U-系统是由  $[0, 1]$  区间上的 Legendre 多项式构造出来的<sup>[10]</sup>, 其构造过程如下:

1) 首先取  $[0, 1]$  区间上的前  $r+1$  个 Legendre 多项式, 记为  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)$ 。

2) 构造 U-系统的函数生成元。

有限函数集合  $\{\psi_0^{(0)}(x), \psi_1^{(0)}(x), \dots, \psi_r^{(0)}(x)\}$  是 U-系统的函数生成元, 如果  $\psi_j^{(0)}(x), j=0, 1, \dots, r$  满足如下条件:

(1)  $\psi_j^{(0)}(x)$  是以  $x = \frac{1}{2}$  为分段点的  $r$  次分段多项式;

(2)  $\langle \psi_i^{(0)}(x), \psi_j^{(0)}(x) \rangle = \delta_{i,j}, i, j=0, 1, \dots, r,$

其中  $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ ;

(3)  $\langle \psi_j^{(0)}(x), x^i \rangle = 0, i, j=0, 1, \dots, r,$  其中  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示  $L^2[0,1]$  中的内积;

(4)  $\psi_j^{(0)}(x) \Big|_{x \in [1/2, 1]} = (-1)^{j+r-1} \times \psi_j^{(0)}(x) \Big|_{x \in [0, 1/2]}$

因此, 用待定系数法可以解出  $\psi_j^0(x), j=0, 1, \dots, r$  的具体表达式。

3) 由函数生成元迭代生成 U-系统的其他正交函数。

记  $\psi^{(0)} \triangleq \{\psi_0^{(0)}(x), \psi_1^{(0)}(x), \dots, \psi_r^{(0)}(x)\},$   
 $\psi^{(j)} \triangleq \{\psi_0^{(j)}(x), \psi_1^{(j)}(x), \dots, \psi_{(r+1)2^j-1}^{(j)}(x)\},$  其中  $\psi^{(j)}$  中函数成员由下式迭代生成:

$$\psi_{2n}^{(j)}(x) = \begin{cases} \psi_n^{(j-1)}(2x) & 0 \leq x < 1/2 \\ \psi_n^{(j-1)}(2-2x) & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\psi_{2n+1}^{(j)}(x) = \begin{cases} \psi_n^{(j-1)}(2x) & 0 \leq x < 1/2 \\ -\psi_n^{(j-1)}(2-2x) & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

$n=0, 1, \dots, (r+1)2^{j-1}-1$ 。那么函数集合

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)\} \cup_{j=0}^{+\infty} \psi^{(j)} \quad (1)$$

就是  $r$  次 U-正交函数系, 简称  $r$  次 U-系统。特别地, 零次 U-系统就是 Walsh 正交函数系, 而一次 U-系统就是离散 Slant 变换的解析表达形式。当  $r=3$  时, 取  $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = \sqrt{3}(1-2x), \varphi_2(x) = \sqrt{5}(6x^2-6x+1), \varphi_3(x) = \sqrt{7}(-20x^3+30x^2-12x+1), x \in [0, 1)$ 。

由构造算法可以得到

$$\psi_0^{(0)}(x) = \begin{cases} \sqrt{7}(-64x^3+66x^2-18x+1) & 0 \leq x < 1/2 \\ \sqrt{7}(-64(1-x)^3+66(1-x)^2-18(1-x)+1) & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\psi_1^{(0)}(x) = \begin{cases} \sqrt{5}(-140x^3+114x^2-24x+1) & 0 \leq x < 1/2 \\ \sqrt{5}(140(1-x)^3-114(1-x)^2+24(1-x)-1) & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\psi_2^{(0)}(x) = \begin{cases} \sqrt{3}(-224x^3+156x^2-28x+1) & 0 \leq x < 1/2 \\ \sqrt{3}(-224(1-x)^3+156(1-x)^2-28(1-x)+1) & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\psi_3^{(0)}(x) = \begin{cases} -280x^3+180x^2-30x+1 & 0 \leq x < 1/2 \\ 280(1-x)^3-180(1-x)^2+30(1-x)-1 & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

那么函数集合  $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\} \cup_{j=0}^{+\infty} \{\psi_0^{(j)}(x), \psi_1^{(j)}(x), \dots, \psi_{4 \times 2^j-1}^{(j)}(x)\}$  就是三次 U-系统。图 1 是三次 U-系统的前 32 个基函数的图形。

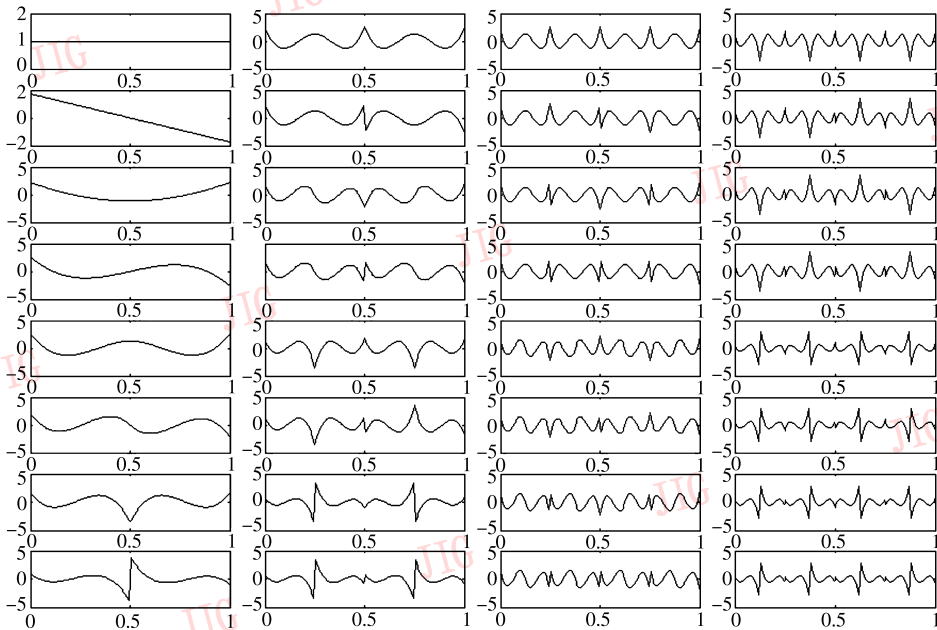


图 1 三次 U-系统的前 32 个正交基函数

Fig1 Figures of the first 32 base function of U-system

### 1.2 U-系统的性质

记  $u_n(x)$  是  $r$  次 U-系统中的第  $n+1$  个基函数, 在  $r$  次 U-系统中, 其基函数按公式(1)中的  $j$  值从小到大排列, 那么  $r$  次 U-系统有如下性质<sup>[4-6]</sup>。

**性质 1**  $r$  次 U-系统是  $L^2[0, 1]$  中的规范正交函数系, 即  $\langle u_i(x), u_j(x) \rangle = \delta_{i,j}$ 。

$$b_n \triangleq \langle f, u_n \rangle = \int_0^1 f(x)u_n(x)dx, n = 0, 1, \dots;$$

则称  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n u_n$  为函数  $f$  的 Fourier-U 级数,

$S_f(n) \triangleq \sum_{k=1}^n b_k u_k$  为函数  $f$  的 Fourier-U 级数的前  $n+1$  项之和, 那么  $S_f(n)$  满足性质 2。

**性质 2** Fourier-U 收敛性, 即对给定函数  $f \in L^2[0, 1]$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_f(n)\|_2 = 0$ 。

**性质 3** 列率递增性, 即 U-系统的基函数的变号数是逐渐递增。

## 2 U-正交变换

### 2.1 离散 U-正交变换

假设  $y=f(x)$  是连续的时间信号, 在单位时间内, 等间隔地对  $f(x)$  进行  $N=2^L$  ( $L$  为正整数) 次抽

样, 即可得到 1 维的离散信号  $\{f(x_i): i=0, 1, \dots, N-1, x_i \in [0, 1)\}$ , 定义 U-系统的离散正交变换为

$$F(n) \triangleq U\{f\}(n) \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)u_n(x_i) \quad n=0, 1, \dots \quad (2)$$

为了方便起见, 记  $f(i) \triangleq f(x_i), u(n, i) \triangleq u_n(x_i)$ , 那么式(2)可变为

$$F(n) = \sum_{i=0}^{N-1} f(i)u(n, i) \quad n=0, 1, \dots \quad (3)$$

考虑前  $N$  个变换系数, 记

$$F \triangleq \{F(0), F(1), \dots, F(N-1)\}^T$$

$$f \triangleq \{f(0), f(1), \dots, f(N-1)\}^T$$

$$U \triangleq \begin{pmatrix} u(0,0) & u(0,1) & \dots & u(0,N-1) \\ u(1,0) & u(1,1) & \dots & u(1,N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(N-1,0) & u(N-1,1) & \dots & u(N-1,N-1) \end{pmatrix} \quad (4)$$

因此, 式(3)可用矩阵表示为  $F = Uf$ 。

### 2.2 离散 U-正交矩阵

不像 Fourier 三角基函数那样, 由于对 U-正交函数等间隔离散化后, 所得到的基函数的离散点列

并不完全正交,只是近似正交,因此必须采用特殊的方法离散 U-正交基函数,并使得基函数的离散点列尽可能的保持原基函数的形状。本文采用了以下两种方法来计算离散 U-正交矩阵:

方法 1 的计算步骤如下:

- 1) 先对 [0,1] 区间进行等间隔划分,然后取每个区间中点的基函数值;
- 2) 用 Gram-Schmidt 方法对得到的离散点列进行正交化处理。

方法 2 的计算步骤如下:

- 1) 把 [0,1] 区间进行等间隔地划分;
- 2) 计算每个区间的积分值,由于 U-正交基函数是分段多项式函数,因此用高斯积分可以方便地计算出每个区间的积分值;
- 3) 用 Gram-Schmidt 方法进行正交化处理,这样便可以得到式(4)所示的 U-正交矩阵。对于三次 U-系统,可把 [0,1] 区间先进行 8 等分后,再用积分方法计算,计算出来的正交方阵如式(5)所示。

$$\begin{pmatrix}
 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 \\
 0.5401 & 0.3858 & 0.2315 & 0.0772 & -0.0772 & -0.2315 & -0.3858 & -0.5401 \\
 0.5401 & 0.0772 & -0.2315 & -0.3858 & -0.3858 & -0.2315 & 0.0772 & 0.5401 \\
 0.4308 & -0.3077 & -0.4308 & -0.1846 & 0.1846 & 0.4308 & 0.3077 & -0.4308 \\
 0.2755 & -0.4945 & -0.1694 & 0.3884 & 0.3884 & -0.1694 & -0.4945 & 0.2755 \\
 0.1391 & -0.4394 & 0.2495 & 0.4747 & -0.4747 & -0.2495 & 0.4394 & -0.1391 \\
 0.0863 & -0.3529 & 0.5410 & -0.2744 & -0.2744 & 0.5410 & -0.3529 & 0.0863 \\
 0.0581 & -0.2519 & 0.4456 & -0.4844 & 0.4844 & -0.4456 & 0.2519 & -0.0581
 \end{pmatrix} \quad (5)$$

在方法 1 中,只需要先计算区间中点的基函数值,然后再做正交化处理;由于三次 U-系统是由三次分段多项式函数构成,因此对每个小区间来说,可使用高斯积分来计算该区间的积分值,这时需要先计算 4 个点的函数值,然后计算 4 点函数值的和,最后做正交化处理。由此可见,第 2 种方法相对于第一种方法来说,虽然计算过程稍复杂,但是方法 2 所计算出的正交矩阵的行向量更加接近 U-系统的基函数。在实际应用中,最好采用方法 2 计算 U-正交变换的正交矩阵。

### 2.3 2 维离散 U-正交变换

设  $z=f(x,y)$ ,  $x,y=0,1,\dots,N-1$  是 2 维离散点列,定义 2 维离散 U-正交变换为

$$F(m,n) \triangleq \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)u(m,x)u(n,y) \quad (6)$$

其中  $u(m,x)$  与  $u(n,y)$  是变量  $x,y$  的 U-正交基函数。假设  $F$  是图像  $f$  的 2 维离散 U-正交变换的变换系数矩阵,那么式(6)可用矩阵表示为

$$F = UfU^T \quad (7)$$

图 2(a)是三次 U-正交变换的 8 个合成基图形,图 2(b)是 DCT 的 8 个合成基图形,两者列率性质是相同的,且基本形状非常相似。图 2(c)是由 1 维 U3 基向量所张成的 2 维变换基的亮度图像,图 2(d)是 2 维 DCT 的变换基的亮度图像,由图 2 可以看出,2 维 U3 块变换基与 2 维 DCT 的块变换基的亮度图像是相同的,因此作为正交变换,U3 与 DCT 有相同的物理性质。

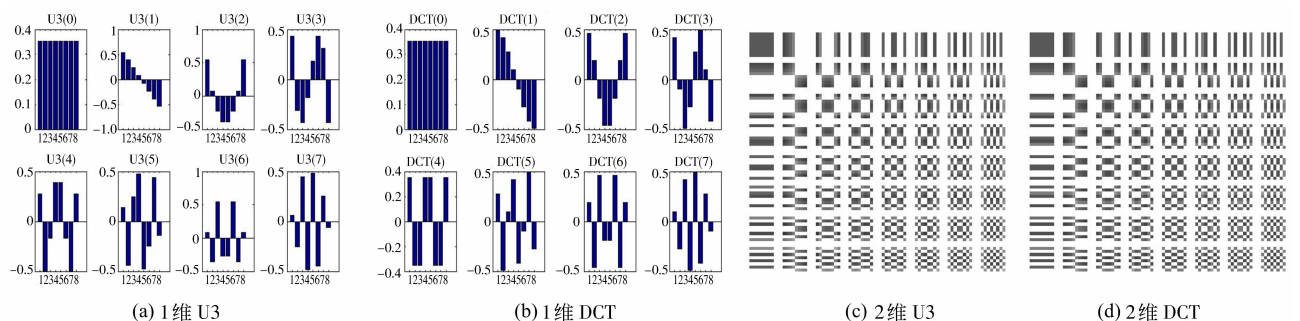


图 2 基向量的图像

Fig2 Base-vector images of U3 and DCT

### 3 基于 U-正交变换的图像编码

#### 3.1 U-正交变换的编码过程

U-正交变换的基函数的列率是逐渐增加的<sup>[4-6]</sup>,且 2 维 U-正交变换域的“能量”一般都集中在低频段,而高频系数的幅值一般都比较小,通过量化处理后,绝大部分的系数都变为 0,这样就可以把幅值较小的高频系数“压缩”掉,并且被“压缩”掉的高频分量往往对人类的视觉不太敏感。因此,可以用 U-正交变换代替 DCT 对图像进行压缩编码。下面步骤是基于 U-正交变换的编码过程。

- 1) 对输入图像进行  $8 \times 8$  的分块 U-正交变换;
- 2) 量化变换系数 本文先直接使用 JPEG 所提供的量化矩阵进行量化处理,然后对每个系数块按 Zigzag 顺序进行排序,形成 1 维向量;
- 3) 熵编码 对直流系数用差分编码方法进行编码,而对交流系数则首先把它组织成“零行程/非零值”的数据格式,再进行 Huffman 编码。在编码过程中,对变换系数进行一次扫描,直接查找 JPEG 标准中的 DC 系数差值码表与 AC 系数码表;

#### 4) 输出编码后的数据

解码时,首先对得到的数据进行熵解码,然后再把 1 维数据按反 Zigzag 序排列成 2 维的数据块,并进行反量化,最后对反量化后的数据实施分块逆 U-正交变换,取整后,就可得到解码图像。

#### 3.2 U-正交变换的计算

由 Legendre 多项式的性质与 U-系统的构造算法可知,U-正交函数系的基函数是对称的或反对称的。下面考虑三次 U-正交变换的计算问题,而且对于其他  $r$  次 U-正交变换也可以做相同的讨论。

联系到图像的编码过程,只考虑含 8 个点的离散点列的三次 U-正交变换(U3)的计算。记  $\mathbf{x}^T \triangleq \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$  是输入点列,  $\mathbf{x}_e^T \triangleq \{x_0 + x_7, x_1 + x_6, x_2 + x_5, x_3 + x_4\}$ ,  $\mathbf{x}_o^T \triangleq \{x_0 - x_7, x_1 - x_6, x_2 - x_5, x_3 - x_4\}$ ; 记  $\mathbf{y}^T \triangleq \{y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\}$  是  $\mathbf{x}$  经 U3 变换后的输出点列,即  $\mathbf{y} = \mathbf{U}_3 \mathbf{x}$ ,其中  $\mathbf{U}_3$  是式(5)所示的矩阵。

由于  $\mathbf{U}_3$  的第 1、3、5、7 行是对称的,第 2、4、6、8 行是反对称的,记  $\mathbf{y}_e^T \triangleq \{y_0, y_2, y_4, y_6\}$ ,  $\mathbf{y}_o^T \triangleq \{y_1, y_3, y_5, y_7\}$ ,即  $\mathbf{y}_e^T, \mathbf{y}_o^T$  是输出点列  $\mathbf{y}$  的偶序号点列与奇序号点列;那么用式(8)(9)可以计算出输出点列  $\mathbf{y}$ 。

$$\mathbf{y}_e = \begin{pmatrix} 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 \\ 0.5401 & 0.0772 & -0.2315 & -0.3858 \\ 0.2755 & -0.4945 & -0.1649 & 0.3884 \\ 0.0863 & -0.3529 & 0.5410 & -0.2744 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (8)$$

$$\mathbf{y}_o = \begin{pmatrix} 0.5401 & 0.3858 & 0.2315 & 0.0772 \\ 0.4308 & -0.3077 & -0.4308 & -0.1846 \\ 0.1391 & -0.4394 & 0.2495 & 0.4747 \\ 0.0581 & -0.2519 & 0.4456 & -0.4844 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (9)$$

由于计算式(8)(9)各需要 16 次乘法与 12 次加法,计算  $\mathbf{x}_e$  与  $\mathbf{x}_o$  各需要 4 次加法,因此计算输出点列  $\mathbf{y}$  总共需要做 32 次实数乘法与 32 次实数加法,而直接计算输出点列  $\mathbf{y}$  则需要做 64 次乘法与 56 次加法,这表明用式(8)(9)计算输出点列  $\mathbf{y}$  要比直接计算快近一倍。

可考虑用 Cooley-Tukey 提出的快速傅里叶变换(FFT)计算 DCT,在计算过程中,首先在原输入点列  $\mathbf{x}$  后面补 8 个 0,扩充到含 16 个点的点列  $\bar{\mathbf{x}}$ ,然后对  $\bar{\mathbf{x}}$  进行快速傅里叶变换,再取其实部便可以得到 DCT<sup>[13]</sup>的变换系数。用蝶形计算方法计算 16 点的 FFT 需要做 32 次复数乘法、64 次复数加法<sup>[14]</sup>,由于后面 8 个点为 0,因此计算 8 点的 DCT 实际上只需要做 24 次复数乘法、48 次复数加法。综上所述,与基于 FFT 的快速 DCT 计算相比,计算 U3 正交变换与 DCT 的计算相近,而且不需要做复数计算。

#### 3.3 U-正交变换的编码性能

##### 1) 能量集中性能

应用正交变换对图像进行压缩编码,其性能好与正交变换域中的“能量”集中程度有很大关系,衡量“能量”集中程度的常用方法是通过比较正交变换的编码增益<sup>[15-16]</sup>(transform coding gain)。

下面考虑  $8 \times 8$  的分块正交变换的编码增益。假设  $\mathbf{f} \triangleq \{f_{i,j}; 0 \leq i, j \leq 7\}$  是输入的  $8 \times 8$  的图像块,  $\hat{\mathbf{f}} \triangleq \{\hat{f}_{i,j}; 0 \leq i, j \leq 7\}$  是相应的变换系数矩阵,记

$$\begin{cases} \text{COV}(\mathbf{f}) \triangleq \{\sigma_{i,j}; 0 \leq i, j \leq 7\} \\ \text{COV}(\hat{\mathbf{f}}) \triangleq \{\hat{\sigma}_{i,j}; 0 \leq i, j \leq 7\} \end{cases} \quad (10)$$

是相应输入图像块与输出系数的协方差矩阵,根据文献[16]的定义,图像块  $\mathbf{f}$  经过正交变换后的编码增益可以表示为  $\text{COV}(\hat{\mathbf{f}})$  的对角线元素(即方差)的算术平均值与几何平均值的比值,即

$$C_g \triangleq \frac{\frac{1}{8} \sum_{i=0}^7 \hat{\sigma}_{i,i}}{\sqrt{\prod_{i=0}^7 \hat{\sigma}_{i,i}}} \quad (11)$$

其中,  $C_g$  表示编码增益,  $\hat{\sigma}_{i,i}$  是  $\text{COV}(\hat{f})$  对角线上的元素, 虽然正交变换保持能量不变, 但可以改变能量分布, 性能优良的正交变换可以将大部分能量集中到极少数的变换系数中。由于算术平均值  $\frac{1}{8} \sum_{i=0}^7 \hat{\sigma}_{i,i}$  受最大的方差支配, 几何平均值  $\prod_{i=0}^7 \hat{\sigma}_{i,i}$  受最小的方差支配, 因此当  $\prod_{i=0}^7 \hat{\sigma}_{i,i}$  越小或  $\frac{1}{8} \sum_{i=0}^7 \hat{\sigma}_{i,i}$  越大时,  $C_g$  就越大, 能量就越集中, 正交变换的性能越优良。

为了全面地比较 U-正交变换与 DCT 的编码性能, 本文选定 7 幅图像进行测试。假设  $N$  为图像块的数目, 测试时, 首先计算出每个图像块的编码增益, 并按照文献[15]的方法对式(11)做修改, 即

$$C_g^{(k)} \triangleq 10 \lg \left( \frac{\frac{1}{8} \sum_{i=0}^7 \hat{\sigma}_{i,i}^{(k)}}{\sqrt{\prod_{i=0}^7 \hat{\sigma}_{i,i}^{(k)}}} \right) = 10 \left( \lg \sum_{i=0}^7 \hat{\sigma}_{i,i}^{(k)} - \frac{1}{8} \sum_{i=0}^7 \lg \hat{\sigma}_{i,i}^{(k)} - \lg 8 \right) \quad (12)$$

式中,  $C_g^{(k)}$  表示第  $k$  块图像经过正交变换的编码增益,  $\hat{\sigma}_{i,i}^{(k)}$  是第  $k$  块图像经正交变换后的第  $i$  列的方差,  $k = 1, 2, \dots, N$ 。然后计算  $C_g^{(k)}$  的平均值  $\bar{C}_g$ , 即  $\bar{C}_g \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N C_g^{(k)}$ 。

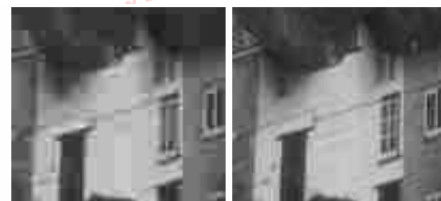
显然,  $\bar{C}_g$  越大, 能量集中程度越高, 正交变换的数据压缩性能越高, 表 1 是 7 幅图像经三次 U-正交变换(U3), DCT, Walsh 变换(WHT, 即零次 U-正交变换)后的  $\bar{C}_g$ 。从表 1 可以看出, DCT 的能量集中程度略优于 U3, 但这种差异很小, 在实际应用中几乎可以忽略(如图 3 所示), 而 WHT 相差较大。

表 1 正交变换的平均增益  $\bar{C}_g$   
Tab. 1  $\bar{C}_g$  of orthogonal transform

正交变换	图像名						
	Lena	Woman	Harbour	Goldhill	Zelda	Peppers	Baboon
DCT	14.091 5	22.954 5	12.774 4	13.098 9	15.158 8	14.867 7	7.131 1
U3	14.033 7	22.917 8	12.706 0	12.978 3	15.141 7	14.905 3	6.923 0
WHT	12.920 4	21.584 9	12.198 1	12.510 0	14.272 5	13.955 5	6.339 5



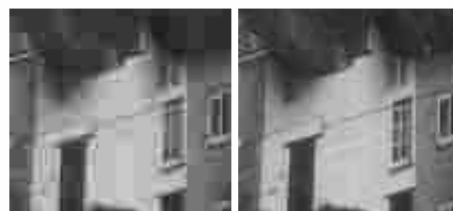
(a) Lena, DCT, 0.25bit/pixel and 0.50 bit/pixel



(b) Goldhill, DCT, 0.25 bit/pixel and 0.50bit/pixel



(c) Lena, U3, 0.25bit/pixel and 0.50bit/pixel



(d) Goldhill, U3, 0.25bit/pixel and 0.50bit/pixel

图 3 图像重建效果

Fig. 3 Performance of reconstruction compressed images

## 2) 去相关性的效率

正交变换可以把图像从空域变换到能量集中的变换域, 这就很大程度地消除了像素之间的相关性。一般来说, 经正交变换后, 协方差的能量越小, 正交变换去相关性的效率就越高<sup>[17]</sup>。比如, 图像经 Karhunen-Loeve 变换(KLT)后, 其协方差矩阵的非对角线元素都为 0, 即协方差的能量为 0, 表明

KLT 是最优的线性变换。文献[17]定义的去相关效率公式为

$$\mu^{(k)} = 1 - \frac{\sum_{i,j=0; i \neq j}^7 |\hat{\sigma}_{i,j}^{(k)}|}{\sum_{i,j=0; i \neq j}^7 |\sigma_{i,j}^{(k)}|} \quad (13)$$

式中,  $\mu^{(k)}$  是第  $k$  块图像经正交变换后的去相关效

率,  $\hat{\sigma}_{i,i}^{(k)}$  与  $\sigma_{i,j}^{(k)}$  为式(10)中所定义的协方差矩阵中的元素,  $k = 1, 2, \dots, N$ 。由于图像的自相关矩阵也能描述图像像素点之间的相关性, 且对角线上的元素就是图像列向量的能量值, 因此用自相关系数定义去相关率, 即可把式(13)改写为

$$\mu^{(k)} = 1 - \frac{\sum_{i,j=0;i \neq j}^7 |\hat{r}_{i,j}^{(k)}|}{\sum_{i,j=0;i \neq j}^7 |r_{i,j}^{(k)}|} \quad (14)$$

式中,  $\hat{r}_{i,j}^{(k)}$  与  $r_{i,j}^{(k)}$  分别为第  $k$  块图像经正交变换后的自相关系数与第  $k$  块图像的自相关系数。为了比较各正交变换的效果, 可先计算每个图像块的去相关效率  $\mu^{(k)}$ , 然后计算  $\mu^{(k)}$  的平均值, 即  $\bar{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mu^{(k)}$ , 并把  $\bar{\mu}$  作为正交变换去相关的效率值。

表 2 是 7 幅图像经 DCT, U3, WHT 变换后的去相关效率的测试值, 由表 2 可以看出, DCT 与 U3 的去相关效率值并无多大的差异, 而 WHT 的去相关性的效率值则相差较大。

### 3.4 仿真实验

为了测试 U-正交变换的压缩编码效果, 本文选择用三次 U-正交变换(U3)代替 DCT 对图像进行变换编码, 使用方法 2 计算三次 U-正交变换矩阵, 即式(5); 同时, 为了便于与 DCT 进行对比, 本文先通过调整编码的量化因子, 使得 DCT 编码的码率与 U3 编码的码率相同, 并且等于指定的值, 然后计算重构图像的峰值信噪比 (PSNR)。表 3 是 U3 与 DCT 对 7 幅图像进行编码的部分结果, 从表中可以看出, 用 U3 对图像进行压缩编码的 PSNR 值与 DCT 的 PSNR 值相差不大, 一般 DCT 的 PSNR 值略高于 U3, 两者的 PSNR 的最大差值为 0.34 dB。造成这种差异有两个方面的可能: 一方面, DCT 本身的性能略优于 U3; 另一方面, U3 变换编码所使用的是 DCT 压缩编码的量化表与 Huffman 码表, U3 与 DCT 的变换域系数的概率模型有可能不一样, 因此直接使用 DCT 的量化表与 Huffman 码表, 就有可能降低 U3 的编码性能。

表 2 正交变换的去相关率  $\bar{\mu}$

Tab. 2 De-correlation rate  $\bar{\mu}$  of orthogonal transform

正交变换	图像名						
	Lena	Woman	Harbour	Goldhill	Zelda	Peppers	Baboon
DCT	0.822 4	0.933 3	0.728 6	0.825 0	0.850 2	0.859 9	0.679 4
U3	0.820 4	0.933 5	0.726 8	0.821 3	0.850 1	0.862 9	0.663 4
WHT	0.771 8	0.908 5	0.704 1	0.799 7	0.816 3	0.817 7	0.623 6

表 3 重构图像的峰值信噪比 (dB)

Tab. 3 PSNR of reconstructed images (dB)

码率 /(bit/pixel)	正交变换	图像名						
		Lena	Woman	Harbour	Goldhill	Zelda	Peppers	Baboon
0.25	U3	30.84	39.92	24.57	28.31	33.87	30.67	22.87
	DCT	31.08	36.96	24.64	28.47	33.98	30.57	22.92
0.50	U3	34.53	40.60	27.28	31.17	37.56	33.93	24.96
	DCT	34.87	40.70	27.36	31.43	37.67	33.96	25.14
0.75	U3	36.39	42.21	29.13	32.83	39.09	35.26	26.35
	DCT	36.69	42.34	29.26	33.13	39.20	35.34	26.62
1.00	U3	37.70	43.30	30.82	34.18	40.12	36.19	27.55
	DCT	37.97	43.44	30.95	34.47	40.24	36.24	27.84
1.25	U3	38.80	44.22	32.41	35.33	40.91	36.95	28.66
	DCT	39.04	44.36	32.55	35.62	41.04	36.97	28.98
1.50	U3	39.75	45.07	33.96	36.38	41.62	37.61	29.78
	DCT	39.96	45.23	34.08	36.66	41.71	37.61	30.09

图 3 是 Lena 图像与 Goldhill 图像用 U3 与 DCT 压缩编码并重建后图像, 其中码率分别为 0.25 bit/pixel, 0.5 bit/pixel, 由此可以看出二者重建图像的主观效果并无显著差异。选定 3 幅纹理不同的图像 (Lena, Goldhill, Baboon) 进行仿真实验, 据实验结果绘制的 DCT 与 U3 变换编码的率失真曲线如图 4 所示。由图 4 可以看出, U3 变换编码的性能与 DCT 相当。

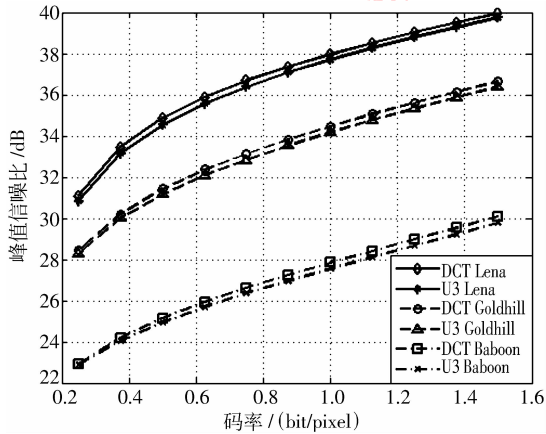


图 4 U3 与 DCT 变换编码的率失真曲线

Fig. 4 Rate-PSNR curve of U3 and DCT transform encoding

## 4 结 论

本文首先由 U-系统构造出相应的 U-正交变换, 同时以三次 U-正交变换为例, 研究了 U3 的图像压缩编码性能。图像经 U3 变换后, 不仅其变换系数的“能量”的集中性能与 DCT 相近, 而且去相关性能与 DCT 的去相关效率基本一致。实验证明, 应用 U3 代替 DCT 实现 JPEG 图像压缩, 其效果与 JPEG 相似, 计算复杂度与基于 FFT 的 DCT 快速算法相近, 计算过程要比 DCT 简洁, 且已有文献论证: 实现 8 个点的快速 DCT 只需要 11 次乘法与 29 次加法, 因此, 需要进一步地研究 U-正交变换的快速算法。U-正交变换作为 Walsh 正交变换的自然推广, 是一类新型的正交变换, 它虽然和 DCT 有相同的变换性能, 但 U-正交变换是基于 U-系统构造出来的, 由于 U-系统的基函数有连续的基函数, 也有间断的基函数, 用 U-正交函数系逼近一类非连续的信号时有独特的优势, 因此, U-正交变换在数字图像与数字信号处理的应用领域中应该有着广阔的应用前景。

## 参考文献 (References)

- [1] Wallace G K. The JPEG still picture compression standard [J]. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 1992, 38 (1): 18-34.
- [2] Neelamani R, Queiroz de R, Fan Zhigang, et al. JPEG compression history estimation for color images [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(6): 1365-1378.
- [3] Sikora T. The MPEG-4 video standard verification model [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 1997, 7(1): 19-31.
- [4] Qi Dongxu, Feng Yuyu. On the convergence of Fourier-U series [J]. Journal of China University of Science and Technology, Issue of Math, 1983, (5): 7-17. [齐东旭, 冯玉瑜. 关于 Fourier-U 级数的收敛性 [J]. 中国科技大学学报 (数学专辑), 1983, (5): 7-17.]
- [5] Qi Dongxu, Feng Yuyu. On the orthogonal complete system  $\{U\}$  [J]. Acta Scientia Nature, University of Jilin, 1984, (2): 21-31. [齐东旭, 冯玉瑜. 关于正交完备系  $\{U\}$  [J]. 吉林大学自然科学学报, 1984, (2): 21-31.]
- [6] Feng Yuyu, Qi Dongxu. A sequence of piecewise orthogonal polynomials [J]. SIAM Journal Mathematical Analysis, 1984, 15(4): 834-844.
- [7] Song Ruixia, Ma Hui. A new class orthogonal system of signal multi-resolution analysis [J]. Science Technology and Engineering, 2005, 5(23): 1807-1812. [宋瑞霞, 马辉. 信号多分辨分析的一类新的正交基 [J]. 科学与工程, 2005, 5(23): 1807-1812.]
- [8] Cai Zhanchuan, Ma Hui, Sun Wei, et al. Analysis of Frequency Spectrum for Geometric Modeling in Digital Geometry [C]// Proceedings of Wavelet Analysis and Applications. Basel, Switzerland: Birkhäuser Verlag Basel, 2007: 525-542.
- [9] Li Jian, Song Ruixia, Ye Mengjie, et al. Orthogonal reconstruction of 3D model based on V-system over triangular domain [J]. Chinese Journal of Computers, 2009, 32(2): 193-202. [李坚, 宋瑞霞, 叶梦杰, 等. 基于三角域上 V-系统的三维几何模型的正交重构 [J]. 计算机学报, 2009, 32(2): 193-202.]
- [10] Qi Dongxu, Tao Chenjun, Song Ruixia, et al. Representation for a group of parametric curves based on the orthogonal complete U-system [J]. Chinese Journal of Computers, 2006, 29(5): 778-785. [齐东旭, 陶尘钧, 宋瑞霞, 等. 基于正交完备 U-系统的参数曲线图组表达 [J]. 计算机学报, 2006, 29(5): 778-785.]
- [11] Zhang Bo, Zou Jiangcheng, Liu Xuli. A novel V-system descriptor in shape recognition [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2007, 19(7): 920-926. [张波, 邹建成, 刘旭丽. 一类新的 V-描述子在形状识别中的应

- 用[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2007, 19(7): 920-926. ]
- [12] Liang Yanyan, Song Ruixia, Wang Xiaochun, et al. Complete orthogonal V-system and its application in geometrical information reconstruction [ J ]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2007, 19(7): 871-876. [ 梁延研, 宋瑞霞, 王小春, 等. 完备正交 V-系统及其在几何信息重构中的应用[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2007, 19(7): 871-876. ]
- [13] Ruan Qiuqi. Digital Image Process [ M ]. Beijing, China: Publishing House of Electronics Industry, 2007, 105-106. [ 阮秋琦. 数字图像处理学[M]. 北京: 电子工业出版社, 2007, 105-106. ]
- [14] Cooley J W, Tukey J W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series [ J ]. Mathematics of Computation, 1995, (19): 297-301.
- [15] Liang Jie, Tran D T. Fast multiplierless approximations of the DCT with lifting scheme [ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(12): 1-12.
- [16] Taubman D S, Marcellin M W. JPEG2000 Image Compression Fundamentals, Standards and Practice [ M ]. Beijing, China: Publishing House of Electronics Industry, 2004: 127-135. [ 魏江力, 柏正桢. JPEG2000 图像压缩基础、标准和实践[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004: 127-135. ]
- [17] Tian Xiaohua, Zhu Guangxi, Wang Yao. A DCT-like  $8 \times 8$  integer transform [ J ]. Journal of Image and Graphics, 2004, 9(8): 916-921. [ 田晓华, 朱光喜, 王曜. 一种类 DCT 的  $8 \times 8$  整数变换[J]. 中国图象图形学报, 2004, 9(8): 916-921. ]