

中图法分类号: TP391 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2011)06-1051-06

论文索引信息: 张锟, 张昌芳, 李杰. 利用特征点序列截断的图像匹配判决算法 [J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(6): 1051-1056

利用特征点序列截断的图像匹配判决算法

张锟¹⁾, 张昌芳²⁾, 李杰¹⁾

¹⁾(国防科技大学机电工程与自动化学院, 长沙 410073) ²⁾(国防科技大学继续教育学院, 长沙 410073)

摘要: 当图像中特征点缺失比较严重时, 利用特征点 S 维分配算法和 K 均值聚类算法的图像匹配性能较差。此外, 随着待匹配图像数量的增加, 上述两类算法的计算量急剧上升。针对上述问题, 提出一种新的图像匹配判决算法——利用特征点序列截断的匹配判决。该算法利用了匹配特征点之间的匹配度量大于非匹配特征点之间的匹配度量, 以及同一匹配簇中来源于同一图像的特征点不超过一个的先验知识, 一方面对特征点缺失具有较强的鲁棒性, 另一方面克服了上述两类算法中的组合爆炸问题。仿真实验证实了所提算法的有效性。

关键词: 机器人视觉; 图像匹配; S 维分配算法; 特征点序列截断

An image matching decision algorithm using truncation of feature point sequence

Zhang Kun¹⁾, Zhang Changfang²⁾, Li Jie¹⁾

¹⁾(College of Mechatronics Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073 China)

²⁾(College of Continuing Education, National University of Defense Technology, Changsha 410073 China)

Abstract: The performance of image matching based on S -dimensional assignment algorithm and K -means clustering algorithm are both poor when the feature points within the images are severely missed. Besides, the computational complexity of the aforementioned two algorithms increases dramatically when the number of images to be matched increases. Aiming at these problems, a new decision algorithm for image matching decision is proposed which uses the truncation of the feature point sequence. The algorithm takes advantage of the prior knowledge that the matching measures between the feature points which are matched are larger than those which between the feature points which are not matched. So on the one hand it has good robustness to feature points missing problem, on the other hand it overcomes the combinatorial explosion problem in the aforementioned two algorithms. Simulations validate the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords: robot vision; image matching; S -dimensional assignment algorithm; truncation of feature point sequence

0 引言

同一场景的不同图像匹配是机器人视觉中的一个基本问题, 在诸如 3 维重建、对象识别和分类、图像对齐和相机自校正等应用中, 特征匹配都是一个关键步骤, 其中特征点匹配是较为常用的一种方

法^[1]。它包括两部分, 分别是匹配度量的计算和匹配判决。本文重点研究匹配判决部分。对于匹配判决问题, 文献中通常采用两类方法, 一类是 S 维分配算法^[2](如文献[3-4]), 另一类是聚类算法(如文献[5])。对于 S 维分配算法, 当 $S > 2$ 时是一个计算复杂度随问题规模的增大呈指数增长的问题, 即 NP-Hard 问题^[4]。当特征点数为 10 个或者 10 个以

收稿日期: 2010-04-08; 修回日期: 2010-07-24

基金项目: 国家科技攀登计划基金项目(2006BAG02B05-14)。

第一作者简介: 张锟(1976—), 男, 讲师。2004 年获国防科技大学博士学位, 主要研究方向为智能控制、磁悬浮控制等。

E-mail: zhangkun@maglev.cn。

上时,其计算时间是难以接受的,因此没有太大的实际意义。常见的聚类算法有 K 均值算法^[6]、谱聚类算法^[7-9]等。后者是近年来研究较多的一种算法,当匹配簇的形状非凸时,其性能优于 K 均值算法,但该算法对匹配度量矩阵的质量要求较高,只有当匹配度量矩阵接近分块对角矩阵时才能取得较好的匹配性能^[7-8],而且最终需转化为 K 均值聚类来实现。而在特征点数和聚类门限均未知的情况下, K 均值聚类也存在组合爆炸的问题。为此,提出一种新的匹配判决算法——利用特征点序列截断的匹配判决。该算法根据所有图像特征点两两之间匹配度量值的分布结构建立一个特征点序列,并通过对该序列进行截断来实现特征点之间匹配关系的判决。

1 匹配度量矩阵的数学模型

在对特征点的匹配关系进行判决之前,首先需要计算所有特征点两两之间的匹配度量,它们组成匹配度量矩阵。下面建立匹配度量矩阵的数学模型。

假设某场景中一共有 N 个特征点,对该场景进行拍摄并分别从所拍得的 S 幅图像 $I_1 \sim I_S$ 中提取出特征点,得到 S 个特征点集合 $F_1 \sim F_S$,其中 $F_i = \{f_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ 来源于图像 $I_i (i=1,2,\dots,S)$, n_i 为 F_i 中的特征点矢量的个数, f_{ij} 为 F_i 中的第 $j (j=1,2,\dots,n_i)$ 个特征点矢量。将来自图像 $I_1 \sim I_S$ 的特征点集合 $F_1 \sim F_S$ 的并集记为

$$F = \{f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n_1}, \dots, f_{S1}, f_{S2}, \dots, f_{Sn_s}\} \quad (1)$$

采用单下标对 F 中的元素重新进行标注,有

$$F = \{f_1, f_2, \dots, f_{n_\Sigma}\} \quad (2)$$

其中

$$n_\Sigma = \sum_{i=1}^S n_i \quad (3)$$

假设 F 中共含有 K 个匹配簇且各观测按顺序属于每个匹配簇,则与 F 对应的匹配度量阵 M 可以表示为

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1K} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{K1} & M_{K2} & \cdots & M_{KK} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中, $M_{kk} (k=1,2,\dots,K)$ 称为匹配块, $M_{ij} (i,j=1,2,\dots,K$ 且 $i \neq j)$ 称为非匹配块。根据匹配门限 $T \in (0,1]$ 可以将 M 中的元素分为两类:匹配元素和非

匹配元素,前者不小于 T ,后者则小于 T 。理想情况下,同一匹配簇内各元素之间的匹配度量为 1,而不同匹配簇的元素之间的匹配度量为 0,因此,理想情况下匹配度量矩阵 M 是分块对角矩阵。以上假设各观测按匹配簇的顺序排列,实际的阵群成员观测匹配问题中该条件通常不满足,但总存在置换矩阵 P ,使得 PMP^T 成为分块对角矩阵^[6]。

受图像观测噪声和特征点提取算法影响,特征点矢量往往具有一定的不确定性,这使得根据它们计算出的匹配度量矩阵往往受到一定程度的扰动。该扰动分为两种:一种称为结构扰动,即根据任何匹配门限 $T \in (0,1]$ 对 M 进行划分,均会出现匹配块 $M_{11} \sim M_{KK}$ 中包含非匹配元素(称为无效元素)和(或)非匹配块 $M_{ij} (i,j=1,2,\dots,K$ 且 $i \neq j)$ 中包含匹配元素(称为异常元素)的情况;另一种称为幅度扰动,即匹配元素在 $[1 - \sigma_m, 1]$ 范围内取值,而非匹配元素的取值区间则为 $[0, \sigma_{um}]$,其中 σ_m 和 σ_{um} 为幅度扰动参数, $\sigma_m, \sigma_{um} \in (0,1)$ 且 $1 - \sigma_m > \sigma_{um}$ 。

2 利用特征点序列截断的匹配判决

当图像中特征点缺失比较严重时, S 维分配算法或 K 均值聚类算法中对匹配簇数的假设有时与实际不符,因此匹配性能较差。同时,由于上述两类算法中利用的先验知识较少,往往需要搜索全部或者大部分解空间,从而导致当待匹配图像数量增加时它们的计算量急剧上升。针对这些问题,提出一种新的匹配判决算法——利用特征点序列截断的匹配判决。该方法充分利用匹配特征点之间的匹配度量大于非匹配特征点之间的匹配度量,以及同一匹配簇中来源于同一图像的特征点不超过一个的先验知识,一方面提高了特征点缺失严重情况下的匹配性能,另一方面缩小了解空间,从而提高了计算效率。具体地,利用特征点序列截断的匹配判决算法分为 3 个阶段,依次为特征点序列的构建、特征点序列的粗截断和特征点序列的精截断。

2.1 特征点序列的构建

在进行匹配判决时,首先按照特征点之间的匹配度量对 F 中的所有元素进行“排序”,得到一个单连接树 $T = \{V, L\}$,其中 $V = v_1 v_2 \cdots v_{n_\Sigma}$ 和 $L = l_1 l_2 \cdots l_{n_\Sigma-1}$ 分别称为节点序列和相邻边权重序列,它们的构建步骤如下^[10]:

1) 在矩阵 M 中找出最大匹配度量对应的两个

特征点 f_u 和 f_v , 令 $v_1 = f_u, v_2 = f_v, l_1 = M_{uv}$ 。

2) 对于 $i = 3, \dots, n_x$, 以矩阵 M 为基础从特征点 $F \setminus \{f_1, f_2, \dots, f_{i-1}\}$ 中找出与特征点 f_1, f_2, \dots, f_{i-1} 之中任何一个具有最大匹配度量的特征点 f_k , 则令 $v_i = f_k, l_{i-1} = M_{\pi(i-1)k}$, 其中 $\pi(\cdot)$ 表示根据单连接树算法得到的自然数列 $1\ 2\ \dots\ i-1$ 的一种排列。

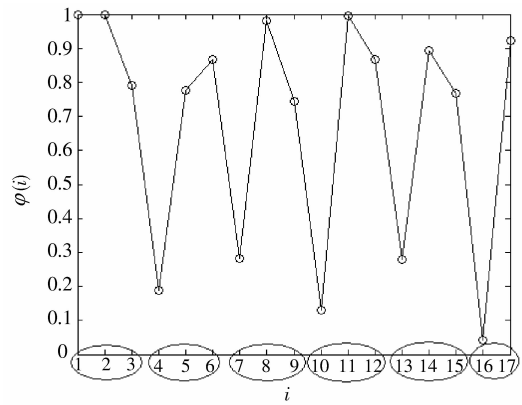
2.2 特征点序列的粗截断

由于节点 $v_i (i = 1, 2, \dots, n_x)$ 与式(2)中的特征点 f_i 对应, $l_i (i = 1, 2, \dots, n_x - 1)$ 与特征点之间的匹配度量有关, 因此 V 和 L 又分别称为特征点序列和匹配度量序列。定义函数

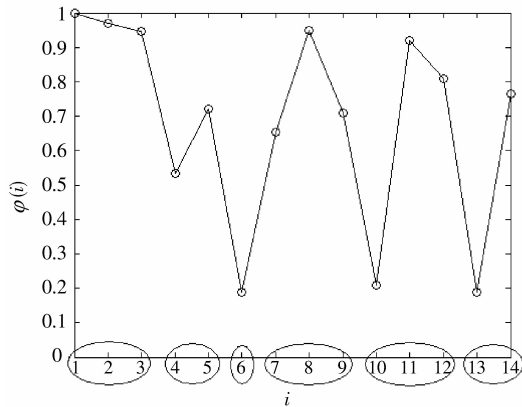
$$\varphi(i) = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ l_{i-1} & i = 2, 3, \dots, n_x \end{cases} \quad (5)$$

图 1 画出了两次仿真实验中函数 $\varphi(i)$ 的取值曲线, 其中图像幅数 $S = 3$, 特征点个数 $N = 6$, 各图像中特征点的缺失概率相同, 均为 0.1。第 1 次仿真中 3 幅图像实际观测到的特征点数分别为 5、5 和 6; 而第 2 次仿真中它们则分别观测到 4、5 和 5 个特征点。为便于分析, 在两幅图中将所有匹配特征点的序号画在同一个椭圆内。

理想情况下, 匹配特征点之间的匹配度量明显大于非匹配特征点之间的匹配度量, 因此图 1 中 $\varphi(i)$ 的取值存在一定的起伏, 而且这种起伏具有很强的规律性: 对于序列 $\varphi(1)\varphi(2)\dots\varphi(n_x)$ 中的第 $i (i = 2, 3, \dots, n_x - 2)$ 个元素 $\varphi(i)$, 如果 $\varphi(i) < \varphi(i+1)$, 那么 v_i 与 v_{i-1} 不匹配。可以利用该规律对 2.1 节所建立的特征点序列 V 进行粗截断, 所得到的各段组成一个子序列, 该子序列中的特征点很可能完全匹配, 因此将它们称为一个候选匹配簇。理想情况下, 通过特征点序列的粗截断得到的候选匹配簇即为最终的匹配簇。但实际应用中, 受图像原始观测误差、特征点提取算法性能、匹配度量计算难以完善等因素的影响, 可能会出现匹配特征点之间的匹配度量小于非匹配特征点之间匹配度量的情况, 从而导致特征点序列粗截断所形成的各个候选匹配簇中的特征点有可能不完全匹配(如图 1(b)所示, 按照上述规律, V 中第 6~9 个特征点组成一个候选匹配簇, 但实际上第 7~9 个特征点匹配, 第 6 个特征点则不与任何点匹配), 因此需要对粗截断所形成的各个子序列进行精截断, 2.3 节将对此进行详细阐述。



(a) 候选匹配簇中的特征点完全匹配



(b) 候选匹配簇中的特征点不完全匹配

图 1 两次仿真实验中函数 $\varphi(i)$ 的取值曲线

Fig. 1 The plots of function $\varphi(i)$ during two simulations

2.3 特征点序列的精截断

将与完全匹配的特征点对应的子序列称为一个匹配簇, 根据匹配簇的大小将来自 S 幅图像的特征点之间的匹配关系分为 S 类, 依次记为 $R^1 \sim R^S$, 其中 R^1 表示匹配簇中只有一个特征点, 它来自图像 $I_1 \sim I_S$ 中的某幅图像, 依此类推, $R^i (i = 2, \dots, S)$ 表示匹配簇中有 i 个特征点, 它们来源于 $I_1 \sim I_S$ 中的 i 幅图像。在各图像特征点的缺失概率大于 0 的情况下, 上述 S 种匹配关系都可能存在, 而受到特征点缺失、真实特征点个数未知等因素的影响, 事先无法明确知道会有多少幅图像中含有某个真实特征点, 因此在对特征点序列各段精截断得到的各个子序列进行精截断的过程中, 首先将满足匹配约束的最小匹配簇作为初始的临时匹配簇, 然后对临时匹配簇两侧的(即与临时匹配簇中最大和最小特征点序号相邻的)节点进行验证, 只要某个节点满足生长约束(匹配特征点之间的匹配度量大于非匹配特征点之间的匹配度量), 则将其按序号由小到大的顺序

添加到临时匹配簇中,一旦临时匹配簇两侧的节点都不满足生长约束,则当前的临时匹配簇停止生长,并将之确认为一个匹配簇。

将粗截断形成的第 t 段特征点序列记为 $c_t^v \triangleq v_{i1} v_{i2} \cdots v_{i(n_i+1)}$,其中 n_i 表示 c_t^v 中特征点的个数,则与 c_t^v 对应的匹配度量序列为 $c_t^l \triangleq l_{i1} l_{i2} \cdots l_{in_i}$ 。下面给出对 c_t^v 进行精截断的详细算法设计。整个算法的主要步骤包括:

1) 如果 c_t^l 中的每个元素都已遍历,则算法结束;否则从 c_t^l 中尚未遍历的匹配度量中找出最大值 l_{im} ,并记 $V_i = \{v_{im}, v_{i(m+1)}\} \setminus V_{ed}$,其中 $v_{im}, v_{i(m+1)}$ 分别表示与 l_{im} 对应的前后两个节点, V_{ed} 表示到目前为止已经遍历的节点集合。

2) 如果 V_i 中只有一个节点,则直接将该节点判为孤立点(即只有一个特征点的匹配簇)并转向 1);否则, V_i 中有两个节点,这时根据两种不同的情况分别进行处理:

(1) 如果与 V_i 中的两个节点对应的特征点来源于同一幅图像,则判断是否 c_t^l 中的每个元素都已遍历:①如果都已遍历,则将所有尚未遍历的节点均判为孤立点并转向步骤 1);②如果尚未遍历完,则若 $m = 1$,则将 V_i 中的第一个节点判为孤立点并转向步骤 1);若 $m = n_i - 1$,则将 V_i 中的第二个节点判为孤立点并转向步骤 1);若 $m \in \{2, \dots, n_i - 2\}$,则直接转向步骤 1)。

(2) 如果与 V_i 中的两个节点对应的特征点来源于不同的图像,则判断 m 是否属于 $\{2, \dots, n_i - 2\}$: ①如果属于,则判断度量值 l_{im} 是否满足条件 $l_{im} > l_{i(m+1)}$ 且 $l_{im} > l_{i(m-1)}$: 如果满足,则令临时匹配簇 $I_i = \{v_{im}, v_{i(m+1)}\}$ 并转向步骤 3); 否则: 如果 $l_{im} \leq l_{i(m-1)}$,则将 V_i 中的第 1 个节点判为孤立点并转向步骤 1); 如果 $l_{im} \leq l_{i(m+1)}$,则将 V_i 中的第 2 个节点判为孤立点并转向步骤 1)。②如果不属于,则判断 n_i 是否等于 1: 如果等于,则直接将 V_i 判为匹配簇,并且结束算法; 如果不等于,则判断 l_{im} 是否满足条件 $l_{im} > l_{i(m+1)}$ ($l_{im} > l_{i(m-1)}$): 若满足,则令临时匹配簇 $I_i = \{v_{im}, v_{i(m+1)}\}$ 并转向步骤 3); 如果不满足,则若 c_t^l 中的每个匹配度量都已遍历,那么将 c_t^v 中所有未遍历的节点均设为孤立点并转向步骤 1); 否则,将 V_i 中的第 1, 2 个节点判为孤立点,并转向步骤 1)。

3) 以 n_i 表示临时匹配簇 I_i 的长度。如果 c_t^l 中

的每个匹配度量均已遍历,则将 I_i 判为匹配簇并转向步骤 1); 否则: 从 c_t^l 尚未遍历的匹配度量中找出最大值 l_{in} ,并按照 3 种不同的情况分别处理:

(1) 如果 $v_{i(n_i+1)} \neq I_i(1)$ 且 $v_{in} \neq I_i(n_i)$,则表示匹配度量值 l_{in} 的后(前)节点并不与 I_i 的首(尾)节点重合,因此 I_i 终止生长并判为匹配簇,然后转向 1)。

(2) 如果 $v_{i(n_i+1)} = I_i(1)$,则表示 l_{in} 的后节点与 I_i 的首节点重合,这时判断节点 v_{in} 是否和 I_i 中某个节点对应的特征点来源于同一幅图像:①如果是,则 I_i 终止生长并判为匹配簇,然后转向 1);②否则,令 $I_i = [v_{in} I_i]$ 并转向步骤 3)。

(3) 如果 $v_{in} = I_i(n_i)$,则表示 l_{in} 的首节点与 I_i 的尾节点重合,这时判断节点 $v_{i(n_i+1)}$ 是否和 I_i 中某个节点对应的特征点来源于同一幅图像:①如果是,则 I_i 终止生长并判为匹配簇,然后转向步骤 1);②否则,令 $I_i = [I_i v_{i(n_i+1)}]$,并转向步骤 3)。

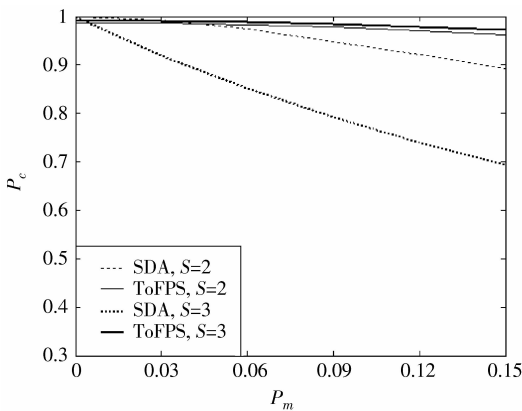
3 仿真实验与分析

以正确匹配率 P_c 和虚假匹配率 P_f 作为衡量匹配性能的指标,对文中提出利用特征点序列截断的匹配判决算法和比较具有一般性的 S 维分配算法的匹配性能进行对比分析,其中正确匹配率是指正确匹配的组数与匹配组数真实值的比值,而虚假匹配率则为错误匹配的组数占算法得到的所有匹配组数的比例。另外,从计算复杂度的角度考虑,还对二者的计算时间进行对比分析。为了使仿真结果不受某种具体图像特征点提取算法和匹配度量计算方法的影响,直接根据第 1 节建立的数学模型对匹配度量矩阵进行模拟;同时,为了降低仿真数据的随机性对算法性能的影响,仿真结果均由 10^4 次蒙特卡罗仿真平均得到。

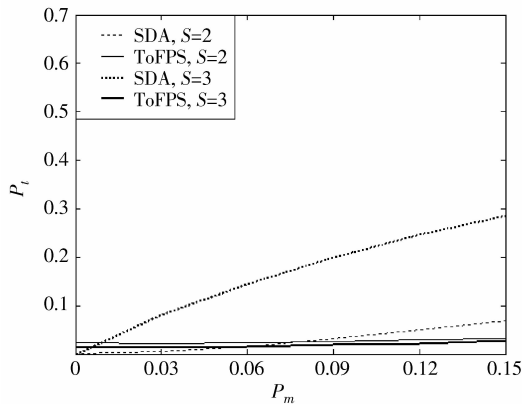
仿真条件设定如下:假设某场景中共有 6 个真实特征点,对该场景进行拍摄并从所拍得的 2~3 幅图像中提取出特征点。假定各幅图像中特征点的缺失概率相同并记作 P_m 。实验中幅度扰动参数 $\sigma_m = \sigma_{um} = 0.2$,结构扰动概率 $P_e = P_v = 0.05$ 。

采用相同的匹配度量矩阵,对利用特征点序列截断的匹配判决与利用 S 维分配的匹配判决在不同缺失概率情况下的匹配性能及计算时间进行对比分析。图 2 中的(a)(b)两幅子图分别给出了 2~3 幅图像情况下采用两类判决方式时的正确匹配率 P_c 和虚假匹配率 P_f 匹配性能随缺失概率的变化曲线,

其中“SDA”(S=2,3)表示“利用 S 维分配的匹配判决”,“ToFPS”表示利用特征点序列截断的匹配判决。从图 2 中可以看出,在 2 幅图像情况下,当缺失概率较低时,利用 2 维分配的匹配判决算法的性能略优于利用特征点序列截断的匹配判决算法,随着缺失概率的增大,二者的匹配性能均逐渐下降,但后者的下降幅度较大。与 2 幅图像的情况相比,当对 3 幅图像中的特征点进行匹配时,后者的优越性更加明显。



(a) 正确匹配率



(b) 虚假匹配率

图 2 2~3 幅图像情况下采用两类判决算法的匹配性能随缺失概率的变化曲线

Fig. 2 The curves of matching performance of two matching decision algorithms vs missing probability when the number of images is two or three

表 1 给出了不同缺失概率情况下,图像幅数为 2~3 时两种匹配判决算法的计算时间。从表 1 中可以看出,当对 2 幅图像的特征点进行匹配时,两种判决方式的计算时间差别不大;当对 3 幅图像的特征点进行匹配时,在各种缺失概率情况下,利用特征点序列截断的匹配判决的计算时间均明显低于利用

S 维分配的匹配判决;随着图像幅数的增多,前者的计算时间增幅不大,而后者的计算时间则急剧上升。

表 1 不同缺失概率下图像幅数 S=2,3 时两种匹配判决算法的计算时间

Tab.1 The computation time of two matching decision algorithms vs missing probability when the number of images is two or three

		P_m						/s
		0	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	
S = 2	ToFPS	0.001 8	0.002 4	0.002 7	0.002 9	0.003 1	0.002 9	
	2DA	0.002 4	0.002 5	0.002 4	0.002 4	0.002 2	0.002 3	
S = 3	ToFPS	0.003 4	0.003 6	0.003 7	0.003 8	0.004 3	0.004 4	
	3DA	0.466 7	0.409 3	0.327 4	0.247 4	0.180 4	0.127 1	

综合图 2 和表 1 中的数据可以看出:图像幅数越多,利用特征点序列截断的匹配判决的性能优势越明显。

4 结 论

提出一种新的图像匹配判决算法——利用特征点序列截断的匹配判决。该算法充分利用了匹配特征点之间的匹配度量大于非匹配特征点之间的匹配度量,以及同一匹配簇中来源于同一图像的特征点不超过一个的先验知识,不仅提高特征点缺失严重情况下的匹配性能,还缩小解空间,从而提高了计算效率。

仿真结果表明,与利用 S 维分配的匹配判决算法相比,利用特征点序列截断的匹配判决算法所需时间大幅缩短,在缺失概率较高情况下其匹配性能有显著提高,而在缺失概率接近 0 的情况下其性能下降也并不明显;图像幅数越多,所提算法的性能优势越明显。

参考文献 (References)

[1] Zhou Ji, Shi Jiaoying, Zhao Youbing. Robust algorithm for feature point matching[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2002, 14(8): 754-757, 777. [周骥, 石教英, 赵友兵. 图像特征点匹配的强壮算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14(8): 754-757, 777.]

[2] Gilbertand K G, Hofstra R B. Multidimensional assignment problems[J]. Decision Sciences, 1988, 19(2): 306-321.

- [3] Ristic B, Smets P. The TBM global distance measure for the association of uncertain combat ID declarations[J]. Information Fusion, 2006, 7(3): 264-276.
- [4] Ristic B, Smets P. Global cost of assignment in the TBM framework for association of uncertain ID reports[J]. Aerospace Science and Technology, 2007, 11(4): 303-309.
- [5] Schubert J. Clustering belief function based on attracting and conflicting metalevel evidence [C]// Proceedings of the 9th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty. Amsterdam: Elsevier Science, 2003: 349-360.
- [6] Sun Jixiang. Modern Pattern Recognition [M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 2002. [孙继祥. 现代模式识别[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2002.]
- [7] Ng A Y, Jordan M I, Wei Y. On spectral clustering: analysis and an algorithm[J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2002, 14: 849-856.
- [8] Tian Zheng, Li Xiaobin, Ju Yanwei. Perturbation analysis for spectral clustering[J]. Science in China Series F: Information Science, 2007, 37(4): 527-543. [田铮, 李小斌, 句彦伟. 谱聚类的扰动分析[J]. 中国科学 F 辑: 信息科学, 2007, 37(4): 527-543.]
- [9] Cai Xiaoyan, Dai Guanzhong, Yang Libin. Survey on spectral clustering algorithms[J]. Computer Science, 2008, 35(7): 14-18. [蔡晓妍, 戴冠中, 杨黎斌. 谱聚类算法综述[J]. 计算机科学, 2008, 35(7): 14-18.]
- [10] Serban N. Clustering confidence sets[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2009, 139(2): 109-124.