

中图法分类号: TP391.41 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2011)11-2047-07

论文索引信息: 汪永生, 李均利, 陈爽. 约束方程能量最小化提取3维血管图像中轴线 [J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(11): 2047-2053

约束方程能量最小化提取3维血管图像中轴线

汪永生, 李均利, 陈爽

(宁波大学信息学院数字技术与应用软件研究所, 宁波 315211)

摘要: 3维血管中轴线提取是血管量化的第一步, 同时也是最重要的一步。为此, 提出一种动态提取3维血管图像中轴线的方法。首先构造具有3维血管特征的能量约束方程, 通过细化方法或人工构造方式得到血管图像初始骨架线, 在能量约束方程的作用下, 沿着血管图像距离场梯度的方向不断向血管中轴线位置逼近。当方程能量达到最小值时, 初始骨架线也就固定在中轴线位置。实验结果表明, 提取出来的血管中轴线位置准确, 且保持拓扑结构和连通性。

关键词: 3维血管图像; 中轴线; 约束方程; 细化; 距离变换

Minimizing constraint equation energy extracts axis of 3D blood vessel images

Wang Yongsheng, Li Junli, Chen Shuang

(Digital Technology and Software Application Institute of Information College of Ningbo University, Ningbo 315211 China)

Abstract: Axis extraction of three-dimensional blood vessel images is the first and most important step in quantifying blood vessel. A dynamic method of extracting axis of three-dimensional blood vessel images was proposed. Firstly, the energy constraint equations has been constructed, the initial skeleton curve of blood vessel images obtained by thinning algorithm or artificial constructing method keeps the approximation location of the axis of blood vessels under energy constraint equations and along the distance field gradient direction of blood vessel images. When the equation energy reaches a minimum value, the initial skeleton is also fixed in the axis position at this time. Experimental results show that the position of the blood vessels axis extracted by this method is accurate, and the axis preserves topology and connectivity.

Keywords: 3D blood vessel image; axis; constraint equation; thinning; distance transformation

0 引言

随着医学诊断工具的不断改进与普及应用(如磁共振影像(MRI)和计算机断层扫描技术(CT)), 由其产生的医学影像常规地被用来评估病人血管的形状、功能和状态。血管的直径、长度和体积等这些有利于诊断、计划实施外科手术和治疗的参数

是相当重要的, 但是也不容易精确计算。血管中轴线提取是血管量化的第一步, 同时也是最重要的一步, 因此, 它在医学图像处理上已经受到了极大关注^[1]。

实际上, 血管中轴线可以看做血管的线性骨架, 它代表着血管的主要形态特征。关于3维物体的骨架提取一般可分为这几类。一类是3维细化方法^[2-4], 它的思想就是应用形态腐蚀操作相继不断

收稿日期: 2010-06-29; 修回日期: 2010-11-11

基金项目: 浙江省自然科学基金项目(Y1100076); 宁波市自然科学基金项目(2009A610089)。

第一作者简介: 汪永生(1976—), 男。现为宁波大学信息学院计算机数字技术与应用软件研究所硕士研究生, 主要研究方向为人工智能、图像处理。E-mail: zysztzx@sina.com。

地剥离物体的最外层,直到它只剩下该物体的骨架为止。为了防止过度剥离物体,要避免删除目标物体的端点;同时,只有不影响目标物体的连通性和拓扑结构的边界体素才能被移去。细化方法的优点是能够保证得到的骨架保持连续性和原对象的主要拓扑结构,但是骨架的位置一般不太准确,只是欧氏空间中真正骨架的一个近似。另一类是基于距离变换技术的3维骨架提取方法^[5-6],例如对于血管中一条局部中轴线,通过寻找相对位于离血管的法向截面的边界最远体素,来确定中轴点。它的主要特点是骨架位置准确,外形顺滑,缺点在于容易受边缘噪声的干扰,且难以保证骨架的连续性。还有一类中轴线提取技术是路径规划方法^[7-8],该方法是沿着物体选择一条初始路径,通过一定的策略来连接两个给定的点,然后路径不断朝着中轴线调整,最终定位在中轴位置。此外,还有基于形态学的方法、基于区域增长的方法和基于模型法等中轴提取算法,具体可参考文献[1]。

一般来说,任何一种3维血管的中轴线提取方法所提取的骨架线都应该是“薄”的连通细线,且能精确地固定在中心位置。本文利用细化方法或人工构造方式得到血管图像初始骨架线,通过我们所建立的血管能量约束方程,在血管图像距离场梯度的作用下不断动态地进行血管骨架线的方程能量最小化迭代,最终得到准确的血管中轴线。通过对人工构造的血管模型和真实血管中轴线的提取实验,验证了所提取的中轴线都能保持其连续性和拓扑结构,同时骨架位置也十分准确。

1 3维血管中轴线的提取

本文提出的方法首先是对3维血管图像进行细化处理或人工构造方式得到初始骨架线,然后对3维血管图像进行距离变换得到血管图像距离场,并计算其梯度,其距离场作为能量约束方程一个外部约束能量项。在能量约束方程的作用下,初始骨架线沿着其梯度方向不断迭代更新,直至整个骨架线能量处于最小状态或进化达到预先设置好的迭代代数,此时得到的就是最终所提取的血管图像中轴线。

1.1 3维物体细化算法

一幅3维二值数字图像 P 是一个包含4个元素的集合 $P = \{ZZ^3, m, n, B\}$,数字空间 ZZ^3 中的每个

元素称为 P 中的一点。 $B \subseteq ZZ^3$ 中的每一个点称为黑点并赋值为1, ZZ^3/B 中的每个点称为白点并赋值为0。邻接度 m 属于黑点体素,而邻接度 n 则属于白点体素。一个黑点成分或物体是 B 中一个最大的 m 连通的点集合,而一个白点成分是 ZZ^3/B 中一个最大的 n 连通的白点集合。关于 P 中的边界点、端点、邻接点的定义以及简化点的判断准则,具体请参考文献[2]。

3维细化算法的核心思想就是对一个目标物体层层进行腐蚀,直至目标物体只剩下一个体素宽的骨架,它是一个不断更新迭代的过程。一般情况下,一个迭代过程又分为几个子迭代,算法被用来删除目标体素,例如把目标体素改变为背景体素。根据每次迭代删除目标体素的不同,可以分串行细化算法^[2]和并行细化算法^[9],串行细化算法在每次迭代过程只删除一个体素,而并行细化算法则可能要删除许多体素。把图像数字空间划分几个子域,每次迭代时,每个子域相继被激活,这种细化方法称为子域细化算法^[3]。本文中,我们采用文献[9]细化算法。

1.2 在血管表面上人工构造初始骨架线的方法

这一节介绍一种有人工参与的情况下,在血管表面上人工构造了一条初始骨架线。对于图1所示的一条单支血管模型,在3维显示情况下,在血管表面上人工选取两个端点 P_0 和 P_n 。以 P_0 和 P_n 为端点作一条线段,并将其离散成 $n+1$ 个点(包括 P_0 和 P_n)。对于该线段上的任一点 P_i ,过 P_i 做该线段的法线,将其投影到血管模型的表面上,得到一个投影点。将所有的投影点连接起来,就可以在血管模型的表面上得到一条初始骨架线,如图1中粗线所示。具体实现过程描述如下。

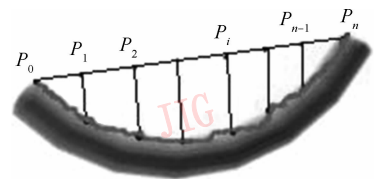


图1 在血管模型表面上人工构造的初始骨架线(粗线部分)示意图

Fig. 1 The artificial constructing initial skeleton curves on the vessel models surface

令 P_0, P_n 两点坐标分别为 (x_0, y_0, z_0) 和 (x_n, y_n, z_n) ,则空间直线 $\overrightarrow{P_0P_n}$ 方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_n - x_0) \times t \\ y = y_0 + (y_n - y_0) \times t \\ z = z_0 + (z_n - z_0) \times t \end{cases} \quad (1)$$

式中, t 为整数。则过直线 $\overrightarrow{P_0P_n}$ 上一点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ 的法平面方程为

$$(x_n - x_0)(X - x_i) + (y_n - y_0)(Y - y_i) + (z_n - z_0)(Z - z_i) = 0 \quad (2)$$

假设血管表面上一点 $P'_i(x'_i, y'_i, z'_i)$, 该点坐标满足式(2), 且 P'_i 到 P_i 的距离比血管表面上也满足式(2) 的其他各点到 P_i 的距离都要短, 则 P'_i 为 P_i 在血管表面上的投影。

对于更加复杂结构的血管, 我们可以多选取几个关键点, 然后依次对关键点之间的线段进行投影操作, 这样也能在血管表面上构造出初始骨架线。虽然通过人工构造的初始骨架线在血管的表面, 但是通过本文提出的中轴线方法, 它最终都能动态的收敛到血管的中心位置, 即得到我们所需要提取的血管中轴线。

1.3 3 维物体的距离变换

一幅 3 维二值数字图像的距离变换就是求所有的特征体素(或前景体素)到它最近非特征体素(或背景体素)的距离值, 最后得到的是一幅 3 维的距离图。距离变换一般可分欧氏距离变换和非欧氏距离变换, 具体请参考文献[10-11]。对于 3 维的欧氏距离变换虽然是完全精确的距离, 但是非常耗时。本文对 3 维血管图像的距离计算, 是采用文献[11] 向量街区距离变换算法(VCVDT)。它的变换速度快, 精度也较高。

通过距离变换我们得到了一个标量场——距离场, 而物体的距离场与其骨架之间有着某种联系。一般来说, 骨架点处的距离变换值应该比其大多数相邻点的距离变换值要大。如果把距离场看做高低起伏的地形, 那么提取物体的骨架事实上就是寻找距离场中的脊线。

设 3 维离散空间物体的距离场为 $D(i, j, k)$, 距离场的梯度 $G(i, j, k)$ 可以表示为

$$G(i, j, k) = \begin{Bmatrix} 0.5(D(i+1, j, k) - D(i-1, j, k)) \\ 0.5(D(i, j+1, k) - D(i, j-1, k)) \\ 0.5(D(i, j, k+1) - D(i, j, k-1)) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{Bmatrix} \quad (3)$$

式中, G 是由 G_x, G_y, G_z 构成的一个梯度向量, $G_x,$

G_y, G_z 分别是 x, y, z 方向上的梯度。

梯度方向上的方向导数实际上表示距离场在梯度方向上的变化速率, 骨架点实际上是距离场的脊线, 而距离场的脊线正是距离场的梯度发生突变的地方, 具体参考文献[12]。

从图 2(b) 可以看出, 距离场的值由物体的表面到内部是逐步增加的, 由此得到的梯度向量也一直指向物体内部的中心位置^[13]。

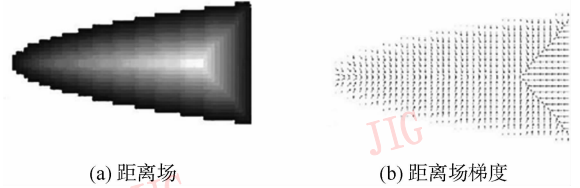


图 2 2 维图像的距离场及其梯度
Fig. 2 The distance field and its gradient of a 2D image

1.4 3 维血管中轴线能量约束方程

设 $u(x, y, z)$ 为分割得到的 3 维血管(设其定义域为 Ω), 对任何复杂的血管, 我们都可以简化为图 3(a)(b) 两种情况。这里以图 3(a) 为例来说明。设 C_{AB} 为细化算法得到的初始骨架线, 则通过最小化能量方程式(4), 就可以得到精度很高的中轴线 C_0 。

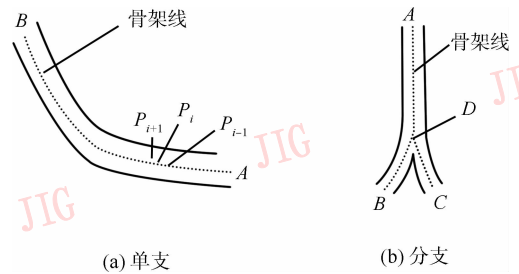


图 3 血管骨架线示意图
Fig. 3 Blood vessel skeleton curves

$$\begin{cases} (C_0, u) = \operatorname{argmin} F(u, C_{AB}) \\ F(u, C_{AB}) = \alpha \cdot L(C_{AB}) + \beta \cdot E_C(C_{AB}) + \gamma \cdot D(C_{AB}) + \mu \cdot E_T(C_{AB}) \end{cases} \quad (4)$$

式中, $L(C_{AB})$ 表示曲线 C_{AB} 的长度, 实际计算可采用下式:

$$L(C_{AB}) = \sum_{i=1}^{n-1} |P_i - P_{i-1}| \quad (5)$$

式中, $P_i (1 \leq i \leq n)$ 是曲线 C_{AB} 上所有的点, 显然当 C_{AB} 是 C_0 时, 长度是最短的; $E_C(C_{AB})$ 表示曲线 C_{AB} 的连续性能量, 同 Snake 模型中的连续性能量, 这一项是为了保证曲线 C_{AB} 上的点等间距, 实际计算可

采用下式:

$$\begin{cases} D_A = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} |P_i - P_{i-1}| \\ E_C(C_{AB}) = \sum_{i=1}^{n-1} \|P_i - P_{i-1}\| - D_A \end{cases} \quad (6)$$

通过距离变换得到的 3 维血管距离场 $D(i, j, k)$ 作为能量方程的一个外部能量约束项。血管中轴线的位置在距离场中通常是距离值最大的位置。由于能量方程最小化的缘故,因此这一项把它的值取负,具体计算为

$$D(C_{AB}) = \sum_{i=0}^{n-1} D(P_i) \quad (7)$$

$E_T(C_{AB})$ 是曲线 C_{AB} 的拓扑能量项,或者说这是一项惩罚项。曲线 C_{AB} 上一非端点 P_i 与其相邻点 P_{i-1} 和 P_{i+1} 只要有一个不满足 26 邻域关系,就称其不满足拓扑结构。如果 P_i 是端点,其相邻点只有一个, P_{i-1} 或者是 P_{i+1} , 是否满足拓扑结构的判断准则与上面非端点类似。实际计算可采用下式:

$$\begin{cases} f(P_i) = \begin{cases} 0 & P_i \text{ 与其邻接点满足 26 邻域关系} \\ 1 & \text{其他} \end{cases} \\ E_T(C_{AB}) = \sum_{i=1}^n f(P_i) \end{cases} \quad (8)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \mu$ 为权值,其中 μ 为惩罚因子。曲线长度和曲线距离值在准确的中轴线条件下基本上能达到最小值,而连续能量即使在严格准确的中轴线条件下也不一定最小,故 α, γ 的取值要比 β 大。 μ 的取值应比 α, β 和 γ 都小,它的主要是在能量约束方程迭代后期对骨架线起到局部微调作用。至于以上各权值,我们可通过实验确定经验值。

对于图 3(b) 这样有分支的血管,实际上是将初始骨架线分成 3 段 AD, BD, CD , 分别计算其总能量,最后相加。如何检测 D 这样的点? 由 3 维细化算法得到的初始骨架线,其上面的骨架点在 26 邻域内如果有 3 个或 3 个以上的邻居点,基本上可以判断其是这种类型的点。

1.5 基于约束方程的 3 维血管中轴线的提取算法

输入一幅 3 维血管二值图像,通过细化方法和人工构造方式得到血管初始骨架线 C_{AB} ,如图 4 所示。对于细化方法得到的初始骨架线,由于细化算法本身所固有的缺陷,细化出来的初始骨架线通常存在一些“毛刺”,即细小分支现象,而这些细小分支对最终提取的中轴线并无益处。因此,我们对细

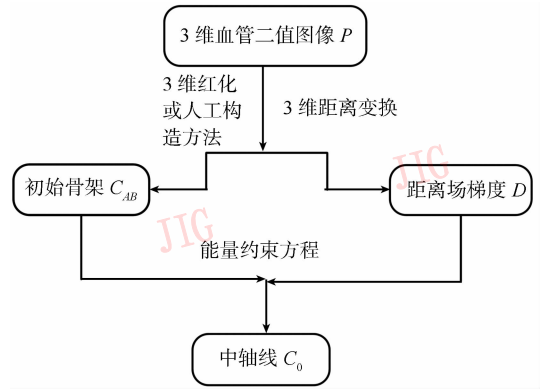


图 4 基于约束能量方程 3 维血管中轴线提取流程图
Fig. 4 The flow chart of extraction axis of three-dimensional blood vessel images based on energy constraint equation

化后的骨架线进行剪枝处理^[14]。通过距离变换而得到血管图像的距离场,而血管中轴线位置的距离值通常又是距离场中局部最大距离值。再由图像距离场而计算其梯度场,距离梯度场中的每一体素的梯度向量都指向了血管中轴线所处的中心位置。因此,我们可以对 C_{AB} 沿着其距离梯度方向产生新的骨架线 C_{AB} ,在能量约束方程的作用下,使其逐步收敛到血管的中轴线 C_0 位置。关于 C_{AB} 上的一点 P_i 沿其梯度方向产生新的骨架点 P'_i ,其计算公式如下:

$$P'_i = \begin{cases} P_i + \theta G(P_i) & P_i \neq P_{i-1} \\ G_{p26}(P_i) & P_i = P_{i-1} \end{cases} \quad (9)$$

式中, θ 是权重, $G_{p26}(P_i)$ 表示在 P_i 梯度方向的 26 邻域内随机产生一个新的骨架点,其主要目的是尽量避免相邻骨架点在进化过程中出现重叠现象。对于 C_{AB} 在能量约束方程下逐步演化成 C_0 ,具体的算法描述如下。

- 1) 设置一个最大的迭代代数 I_M , 迭代次数 $n = 0$, 计算 $F(u, C_{AB})$;
- 2) $n = n + 1$; 对 C_{AB} 上的每一个点 P_i , 按式(9)产生一新的骨架点 P'_i 存入临时骨架线 C_i ; 计算 $F(u, C_i)$, 如果 $F(u, C_i) < F(u, C_{AB})$, 那么 $C_{AB} = C_i$; 否则, 不予替换;
- 3) 如果 $n < I_M$ 或 $F(u, C_i)$ 没有达到一个稳定的值, 返回 2); 否则, 迭代停止, 输出 C_{AB} 。

由于最终输出的 C_{AB} 上的极个别相邻点之间可能存在着不连通现象,因此,我们对其采用线性插值方法,最终提取到的中轴线 C_0 保持了拓扑结构和连通性,而且位置准确。

2 实验结果

我们人工构造了几种典型的 3 维血管模型和来自于医学上已分割好的真实血管数据,然后应用本文提出的方法对其中轴线进行了提取。具体方法实现都是基于医学影像处理与分析算法研究平台——MITK (medical imaging tool kit),所处理的图像显示都是通过 3 维医学图像处理及分析系统——3DMed (medical image processing and analyzing system) 来完成的。

2.1 标准圆柱体中轴线的提取

为了验证本文所提出的中轴线提取方法,我们首先对图 5(a)所显示的标准圆柱体(它可以看做一段真实血管模型)进行了测试。首先在圆柱体的表面上构造了一条初始骨架线,如图 5(b)中黑线所示,显而易见,它距圆柱体的中轴线位置是最远的;图 5(c)则是对圆柱体进行 3 维距离变换而得到的 3 维距离图,从图中可以看出,明亮的部分就是其中轴线所处位置;对图 5(b)中的初始骨架线约束方程的能量进行迭代进化,最终得到如图 5(d)中黑线所示的位置,已经达到了所提取的中轴线的效果。



图 5 圆柱体的中轴线提取

Fig. 5 Extraction axis of the cylinder

2.2 3 种人工构造血管模型中轴线的提取

人工构造的 3 种典型的血管模型如图 6 所示。

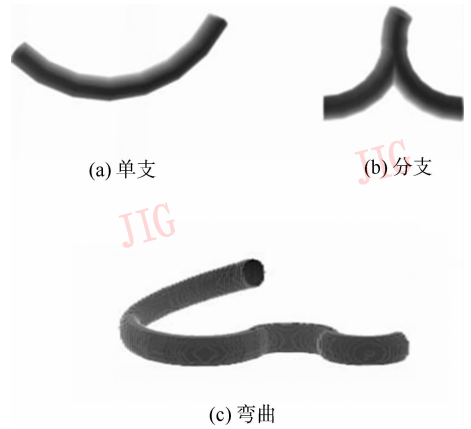


图 6 3 个人工构造的 3 维血管模型

Fig. 6 Three artificial 3D blood vessel constructing models

通过细化算法对图 6 中各人工构造的血管模型进行细化,并对细化后的各血管模型骨架线进行了剪枝,最终得到的各血管模型的初始骨架线如图 7 所示。从图 7 中可看出,各初始骨架线在血管模型中都偏离了中轴线位置。

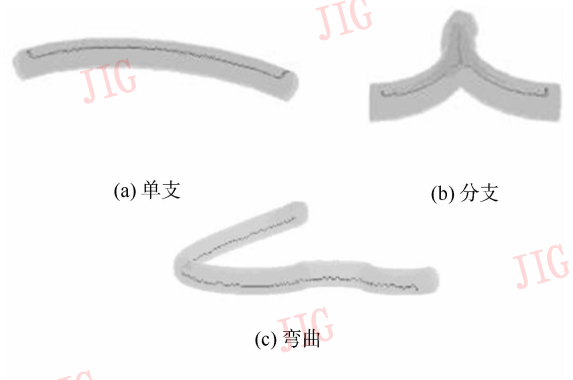


图 7 血管模型的初始骨架线(细化方法)

Fig. 7 The initial skeleton curves of vessel models by thinning algorithm

图 8 则显示了在各血管模型的表面上人工构造的初始骨架线。对于图 6(a),人工选取了 2 个端点;对于图 6(b),人工选取了 4 个端点;对于图 6(c),则人工选取了 5 个端点。从得到的人工初始骨架线来看,它们基本上都落在血管的表面(骨架线上极少数点在血管内部);从形态上来看,图 8(a)(b)所示的初始骨架线比较平滑一些,图 8(c)所示的初始骨架线虽然有点粗糙、不平滑,但是它们都是有序的骨架线段,并不影响对最终中轴线的提取。通过能量约束方程的作用,它们都能收敛到血管中轴线的位置。

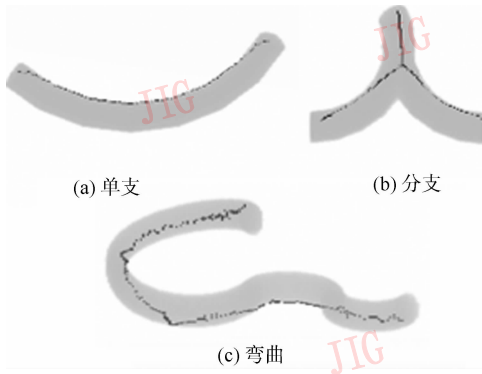


图 8 血管模型的初始骨架线(人工构造方式)
Fig. 8 The initial skeleton curves of vessel models by artificial constructing method

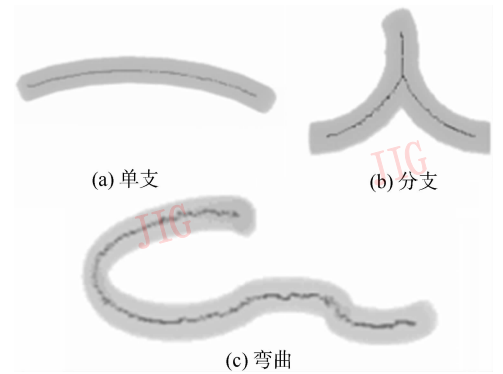


图 9 血管模型的中轴线(细化方法初始骨架线)
Fig. 9 The axis of vessel models by thinning algorithm

对于上述各血管模型的中轴线提取实验,均在硬件配置相同的情况下进行: Intel® Pentium® Dual T2390@1.86 GHz, 1 GB 内存, 显卡 NVIDIA GeForce 8 400 M, 显存 512 MB。关于能量约束方程中权值的确定, 通过多次实验, 设置为 $\alpha = 1.0, \beta = 0.5, \gamma = 1.5, \mu = 0.2$, 最大迭代次数为 500。图 9 显示的是利用细化算法得到的初始骨架线而最终对各血管模型提取的中轴线, 图 10 则显示的是通过人工构造方式而最终对各血管模型提取的中轴线。从图 9 和图 10 上可以直观地看出, 两种方式提取的各血管模型的中轴线位置基本一致, 且都保持平滑和连通性, 进一步说明了本文所提出的中轴线提取方法的有效性。从表 1 可以看出, 所处理的血管前景体素越多, 提取的过程的耗时就越长, 两种方式各血管模型的中轴线提取过程运行时间都说明了这一点。从最终提取到的中轴线的体素个数来看, 细化方式要比人工构造方式少, 这与细化算法的本身特性有关。在对血管细化的过程中, 血管部分特征也被腐蚀掉了; 同时, 细化方式的耗时性也比人工构造方式要长(不考虑人工方式在血管表面上选取点时的耗时)。从数据对比可以知道, 人工构造方式得到的中轴线

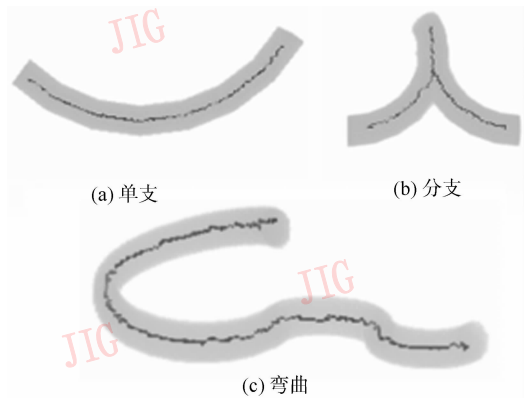


图 10 血管模型的中轴线(人工构造方式初始骨架线)
Fig. 10 The axis of vessel models by artificial constructing method

比细化方式较多地保留了血管的特征, 而且在中轴线提取的过程速度要远快于细化方式。但对于有分支这样的血管情况, 如果交叉点人工选取的位置不准确, 那么提取出来的中轴线的效果要比细化方法差些, 从图 9(b) 和图 10(b) 可以对比看出。但是, 在整个中轴线提取过程中, 细化方式不需要任何人工参与, 完全自动化。在这一点上, 正是人工方式所欠缺的。

表 1 两种方式血管模型中轴线提取数据

Tab. 1 The axis data of extracting vessel models by two methods

3 维血管模型	图像尺寸 × 切片数	前景体素个数	细化算法得到的初始骨架线		人工构造得到的初始骨架线	
			中轴线体素个数	运行时间/s	中轴线体素个数	运行时间/s
单支	680 × 480 × 25	88 661	243	5.719	284	2.243
分支	680 × 480 × 24	66 058	171	4.484	206	2.016
弯曲	320 × 240 × 46	33 202	306	2.250	379	1.437

2.3 一段真实血管中轴线的提取

最后,将本文提出的方法应用到一段真实的医学 3 维血管图像上。如图 11(a)所示,真实血管表面粗糙不平,噪声现象严重。从图 9(b)可以看出,所提取的中轴线(细化方式得到的初始骨架线)位置准确,外形平滑,保持拓扑结构和连通性。

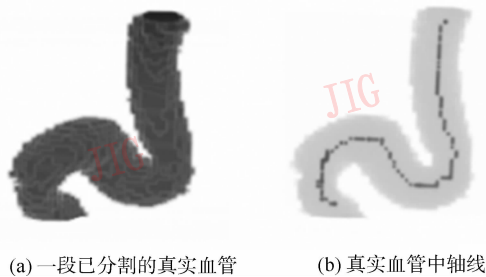


图 11 真实血管中轴线的提取

Fig. 11 Extraction axis of the real blood vessels

3 结 论

对 3 维血管图像利用 3 维细化算法或人工构造方式得到的血管初始骨架线,在血管图像距离场梯度的作用下,通过建立的能量约束方程对其能量最小值不断迭代更新,准确地提取出了血管中轴线。为医学图像处理上需要,本文着重研究了无人参与方式(细化算法)和人工参与方式对血管中轴线的提取。两种方式各有其优缺点,但通过实验验证了它们最终提取出来的中轴线位置准确,且保持拓扑结构和连通性。

由于本文只是对建立的基于能量约束方程 3 维血管图像中轴线提取的一个初步研究,真正将其应用到更加复杂的医学图像上,使它作为医生辅助诊断的一个重要依据,还有待于更进一步的研究。因此,以下两点是下一步将着重解决的问题:1)对已建立的能量约束方程加以改进,通过实验不断确定各最优的权值;2)引入智能优化算对能量约束方程进行优化,进一步提高提取的精度。

参考文献 (References)

[1] Cemil Kirbas, Francis K H Quek. Vessel extraction techniques

and algorithms: a survey [C] // The Third IEEE Symposium on Bioinformatics and BioEngineering. Bethesda Maryland; IEEE Compute Soc, 2003; 238-245.

[2] Kalman Palagyi, Erich Sonratin, Emese Balogh, et al. A sequential 3D thinning algorithm and its medical applications [C] // Proceedings of the 17th International Conference on Information Processing in Medical Imaging. London, UK; Springer-Verlag, 2001; 409-415.

[3] Robert J T Sadleir, Paul F Whelan. Fast colon centreline calculation using optimised 3D topological thinning [J]. Computerized Medical Imaging and Graphics, 2005, 29 (4): 251-258.

[4] Ma Cherngmin, Wan Shuyen, Chang Herkun. Extracting medial curves on 3D images [J]. Pattern Recognition Letters, 2002, 23(8):895-904.

[5] Mark W Wright, Roberto Cipolla, Peter J Giblin. Skeletonization using an extended Euclidean distance transform [J]. Image and Vision Computing, 1995, 13(5):367-375.

[6] Frank Y Shih, Yi Ta Wu. Three-dimensional Euclidean distance transformation and its application to shortest path planning [J]. Pattern Recognition, 2004, 37(1):79-92.

[7] Cuisenaire O. Distance transformations: Fast algorithm and applications to medical image processing [D]. Louvain-la-Neuve, Belgium; Université Catholique de Louvain, 1999.

[8] Deschamps T, Cohen L D. Fast extraction of minimal paths in 3D images and applications to virtual endoscopy [J]. Medical Image Analysis, 2001, 5(4):281-299.

[9] Kalman Palagyi, Attila Kuba. A parallel 3D 12-subiteration thinning algorithm [J]. Graphical Models and Image Processing, 1999, 61(4):199-221.

[10] Eric Remy, Edouard Thiel. Medial axis for chamfer distances: computing look-up tables and neighbourhoods in 2D or 3D [J]. Pattern Recognition Letters, 2002, 23(6):649-661.

[11] Richard Satherley, Mark W Jones. Vector-city vector distance transform [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2001, 82(3):238-254.

[12] Liu Juntao, Liu Wenyu, Wu Caihua, et al. A new method of extracting objects curve-skeleton [J]. Acta Automa Tica Sinica, 2008, 34(6):617-622. [刘俊涛, 刘文予, 吴彩华, 等. 一种提取物体线形骨架的新方法 [J]. 自动化学报, 2008, 34(6): 617-622.]

[13] Maddah M, Soltanian Zadeh H, Afzali Kusha A. Snake modeling and distance transform approach to vascular centerline extraction and quantification [J]. Computerized Medical Imaging and Graphics, 2003, 27(6):503-512.

[14] Doron S, Alfred M B. Pruning medial axes [J]. Computer Vision and Image Understanding, 1998, 69(2):156-169.