

中图法分类号: TN957 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2011)07-1192-07

论文索引信息: 王昕, 朱岱寅, 毛新华, 朱兆达. 双基 PFA 波前弯曲误差分析及校正 [J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(7): 1192-1198

## 双基 PFA 波前弯曲误差分析及校正

王昕, 朱岱寅, 毛新华, 朱兆达

(南京航空航天大学信息科学与技术学院, 南京 210016)

**摘要:** 双基聚束模式合成孔径雷达 (SAR) 成像中的极坐标格式算法 (PFA) 是基于平面波前假设建立的。由于该平面波前假设在聚焦过程中引入了相位误差, 双基 PFA 聚焦图像中会出现空变几何失真和散焦现象。因此, 实际应用 PFA 时其有效场景聚焦范围通常受到严格限制。基于双基合成孔径雷达回波信号相位的泰勒展开式, 推导双基 PFA 中波前弯曲误差的解析表达式。基于此表达式, 分别应用 1 维空变滤波和插值来补偿、校正波前弯曲效应引入的散焦和几何失真现象, 从而有效改善了双基 PFA 的聚焦范围。点目标仿真验证了该方法的有效性。

**关键词:** 双基极坐标格式算法; 波前弯曲补偿; 空变滤波

### Analysis and correction of the wavefront curvature error in bistatic PFA

Wang Xin, Zhu Daiyin, Mao Xinhua, Zhu Zhaoda

(College of Information Science and Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016 China)

**Abstract:** The polar format algorithm (PFA) for the bistatic spotlight-mode synthetic aperture radar (SAR) imaging is based on the planar wavefront assumption. As the unrealistic planar wavefront assumption introduces phase error terms in the focusing process, there will be space-variant geometry distortion and defocusing effect in the image focused via bistatic PFA. Hence, the focused scene size when using bistatic PFA is usually restricted severely to avoid the defocusing effect. Based on the expansion of the received signal's phase term in bistatic SAR, the analytical expression of the wavefront curvature error in bistatic PFA is derived in our study. Based on the expression, the space-variant filtering and interpolation operation are applied to compensate for the defocusing effect and correct the geometry distortion in the image, respectively, which extends the focused scene size of bistatic PFA effectively. Point target simulation validates the algorithm.

**Keywords:** bistatic polar format algorithm; wavefront curvature error; space-variant filtering method

## 0 引言

双基合成孔径雷达 (SAR)<sup>[1-3]</sup> 是指发射机和接收机分置于不同平台的 SAR 系统, 其操作模式可以分为条带、聚束和扫描模式。其中, 双基聚束模式 SAR 成像可以通过双基极坐标格式算法 (PFA) 实现。同单基 PFA<sup>[1]</sup> 一样, 双基 PFA<sup>[4-6]</sup> 也将回波信号视为成像场景复反射率的 2 维傅里叶变换。在将数据进

行极坐标格式转换后, 通过 2 维 IFFT 即可得到图像。

由于双基 PFA 中采用平面波前假设, 在聚焦过程中引入了相位误差, 导致聚焦图像出现空变几何失真和散焦现象。因此, 实际应用双基 PFA 时通常需要严格限制场景范围从而避免散焦。单基 PFA 中的波前弯曲误差在文献[7-9]中进行了分析, 而其校正方法在文献[8-10]中给出。其中, 文献[6]中对二次波前弯曲相位误差进行了分析, 并给出了单基 PFA 的有效聚焦范围。然而, 该论文中的推导

收稿日期: 2010-04-27; 修回日期: 2010-07-28

基金项目: 航空科学基金项目 (20080152004); 中国博士后基金项目 (20090461119); 江苏省博士后科研资助计划项目 (0902014C)。

第一作者简介: 王昕 (1985—), 女。南京航空航天大学信息科学技术学院通信与信息系博士研究生, 主要研究方向为雷达成像。E-mail: whxin1985@163.com。

仅针对正侧视模式下,并未给出几何失真表达式。基于回波信号相位对空间频率的泰勒展开式,文献[7-9]中给出了任意模式下单基 PFA 波前弯曲误差表达式,并依据此表达式研究了空变滤波的校正方法。在双基 PFA 中,波前弯曲误差以及平飞模式下场景有效聚焦范围仅在文献[1]中进行了分析,而误差相位的具体表达形式以及校正方法均未在此文献中进行分析。

基于文献[10]中方法,本文对双基 PFA 中的波前弯曲误差进行了分析及校正。由于双基 SAR 回波信号采集空间较为复杂,并且其空间频率以及差分距离均是由发射机和接收机的航迹共同决定的。这使得双基 SAR 回波信号相位难以表达为空间频率的函数。因此,文献[10]中的推导及其校正方法不能直接推广到双基聚束模式下。将双基 SAR 回波信号相位对空间频率求导,从而得到双基 PFA 波前弯曲误差的解析表达式。基于此展开式,分别应用 1 维空变滤波和插值对聚焦图像中的散焦和几何失真进行补偿和校正,从而有效改善了双基 PFA 的聚焦范围。

## 1 双基 SAR 数据采集空间几何关系

双基聚束模式 SAR 数据采集空间几何关系如图 1 所示,其中场景中心位于坐标系原点。发射机和接收机沿着不同航迹飞行,二者航迹成角度  $\theta_s$ 。发射机和接收机速度分别为  $v_1$  和  $v_2$ 。

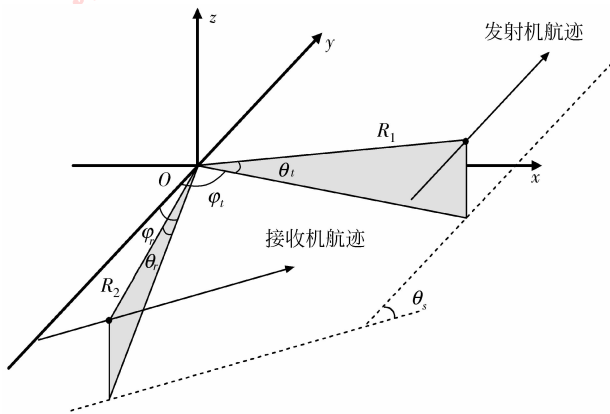


图 1 双基聚束 SAR 数据采集空间

Fig.1 Data collection geometry in bistatic spotlight-mode SAR

雷达发射调频斜率为  $k$ ,载频为  $f_c$  的线性调频信号

$$S(\tau, t) = w_r(\tau) w_a(t - t_c) \exp(j\pi k \tau^2) \cdot \exp(-j2\pi f_c t) \quad (1)$$

式中,  $\tau$  是快时间变量,  $t$  是以  $t_c$  为中心的慢时间变量,  $w_r(\tau)$  为距离向包络,  $w_a(t)$  是由天线方向图决

定的方向向包络。

场景中位于  $(x_m, y_m, 0)$  处,单独散射点的回波信号经过 Dechirp 接收并去除残余视频相位(RVP)后可以记作

$$S_r(k_r, t) = w_r(k_r) w_a(t - t_c) \exp[j\varphi(k_r, t)] \quad (2)$$

式中,相位项为

$$\varphi(k_r, t) = k_r [R_1(t) - R_{1r}(t) + R_2(t) - R_{2r}(t)] = k_r \Delta R(t) \quad (3)$$

式中,  $R_1$  和  $R_2$  ( $R_{1r}$  和  $R_{2r}$ ) 分别表示发射机和接收机到场景中心(散射点)的瞬时距离,  $\Delta R(t) = R_{1r}(t) - R_1(t) + R_2(t) - R_{2r}(t)$  称为双基差分距离,且

$$\begin{cases} k_r = \frac{2\pi}{c} k \left( \frac{f_c}{k} + \tau - \frac{R_1(t) + R_2(t)}{c} \right) \\ R_i(t) = \sqrt{x_i(t)^2 + y_i(t)^2 + z_i(t)^2} \end{cases} \quad (4)$$

式中,坐标  $(x_i, y_i, z_i)$  是发射机和接收机的 3 维空间坐标,其中下标 1 和 2 分别对应发射机和接收机。下文中所有下标为 1 和 2 的符号都分别对应于发射机和接收机,以下不再加以说明。

## 2 双基 PFA

双基 PFA 是单基 PFA 的推广,其处理流程在文献[1]中进行了详细叙述。在双基 PFA 中,通常在重采样之前应用坐标系旋转操作来提高采集数据的利用率。将坐标系旋转角度  $\varphi_b$  后,在平面波前假设下,双基 PFA 将回波信号式(3)近似为

$$S_r(k_r, t) \approx w_r(k_r) w_a(t - t_c) \cdot \exp[jk_x(k_r, t) x'_m + jk_y(k_r, t) y'_m] \quad (5)$$

式中,坐标  $(x'_m, y'_m)$  对应于位于地面  $(x_m, y_m)$  处点目标在旋转后的空间坐标系中的坐标。在式(5)中

$$\begin{cases} \varphi_b = a \tan \left( \frac{\cos \varphi_{10} \sin \theta_{10} + \cos \varphi_{20} \sin \theta_{20}}{\cos \varphi_{10} \cos \theta_{10} + \cos \varphi_{20} \cos \theta_{20}} \right) \\ k_x(k_r, t) = k_r \{ \cos \varphi_1(t) \cos [\theta_1(t) - \varphi_b] + \cos \varphi_2(t) \cos [\theta_2(t) - \varphi_b] \} \\ k_y(k_r, t) = k_r \{ \cos \varphi_1(t) \sin [\theta_1(t) - \varphi_b] + \cos \varphi_2(t) \sin [\theta_2(t) - \varphi_b] \} \end{cases} \quad (6)$$

式中:符号  $k_x$  和  $k_y$  表示空间频率采样点坐标;角度  $\varphi_i$  和  $\theta_i$  ( $i=1, 2$ ) 分别表示平台的俯仰角和斜视角,  $\varphi_{i0} = \varphi_i|_{t=t_c}$ ,  $\theta_{i0} = \theta_i|_{t=t_c}$ 。此时再将信号重采样为矩形栅格而后进行 2 维 IFFT 即可得到聚焦图像。

## 3 双基 PFA 波前弯曲误差分析

由第 2 节中分析可以知道,双基 PFA 是建立在

平面波前假设条件下的。由于该平面波前假设在聚焦过程中引入了相位误差,导致聚焦图像会出现波前弯曲效应。为校正该效应,对接收回波信号相位进行泰勒展开,从而推得其波前弯曲误差的解析表达形式。

单基 PFA 中波前弯曲误差推导是将回波信号表示为空间频率的函数而后进行泰勒展开的。而双基情况下,其信号采集空间更为复杂,且空间频率以及差分距离项均是由发射机和接收机的航迹共同决定的。因此,双基 PFA 中波前弯曲误差推导更为复杂。求得平面波前近似引入的误差,将双基相位项式(3)基于空间频率  $k_x$  和  $k_y$  展开为

$$\begin{aligned} \phi(k_r, t) \approx & k_c(R_{10} - R_{100} + R_{20} - R_{200}) + \\ & a_{10}(k_x - k_{xc}) + a_{01}k_y + a_{20}(k_x - k_{xc})^2 + \\ & a_{11}(k_x - k_{xc})k_y + a_{02}k_y^2 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

式中:

$$k_{xc} = k_x |_{k_r = \frac{2\pi f_c}{c}, t = t_c};$$

$$a_{ij} = \left( \frac{1}{i!j!} \right) \frac{\partial^{i+j} \phi(k_r, t)}{\partial k_x^i \partial k_y^j} \Big|_{k_x = k_{xc}, k_y = 0} \quad i, j = 1, 2, \dots;$$

一次项表示几何失真,二次和高次项在聚焦图像中引入了散焦。式(7)中二次相位项是造成图像散焦的主要原因,因此本文主要推导并补偿了式(7)中的相位误差至二次项。在任意双基 SAR 配置下,式(7)中系数的具体推导过程在附录 A 中给出。下面仅给出在平飞正侧视模式下式(7)中各个系数的表达式,分别为

$$a_{10} = \frac{R_{10}R_{20}}{x_{10}R_{20} + x_{20}R_{10}} \cdot (R_{10} - R_{100} + R_{20} - R_{200}) \quad (8)$$

$$a_{01} = \frac{R_{10}R_{20}y_m}{v_2R_{10} + v_1R_{20}} \left( \frac{v_1}{R_{10}} + \frac{v_2}{R_{20}} \right) \quad (9)$$

$$a_{20} = 0 \quad (10)$$

$$a_{11} = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} a_{02} = & \frac{R_{10}R_{20}(R_{10} - R_{100} + R_{20} - R_{200})}{2k_c(x_{10}R_{20} + x_{20}R_{10})^2} \left[ 1 + \right. \\ & \left. \frac{R_{10}^2R_{20}^2}{(v_2R_{10} + v_1R_{20})^3} \left( \frac{z_{10}^2v_1^2}{R_{10}^4} + \frac{z_{20}^2v_2^2}{R_{20}^4} - \frac{v_1^2x_{10}x_{20}}{R_{10}^3R_{20}} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{x_{10}x_{20}v_2^2}{R_{10}R_{20}^3} + 2 \frac{v_1v_2}{R_{10}R_{20}} \right) \right] + \frac{R_{10}^2R_{20}^2}{2k_c(v_2R_{10} + v_1R_{20})^3} \cdot \\ & \left\{ \frac{v_1^2}{R_{10}} - \frac{v_2^2}{R_{20}} - \frac{v_1^2[(x_{10} - x_m)^2 + z_{10}^2]}{R_{10}^3} - \right. \\ & \left. \frac{(x_{20} - x_m)^2 + z_{20}^2}{R_{20}^3} v_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)中,  $k_c = 2\pi \frac{f_c}{c}$ ; 在式(12)~(16)中所有下标包含 0 的符号均表示在孔径中心处的取值,即为

$$R_{i0} = R_i |_{t=t_c}, \quad R_{i00} = R_{i0} |_{t=t_c}$$

$$x_{i0} = x_i |_{t=t_c}, \quad y_{i0} = y_i |_{t=t_c}$$

因此,相位项式(3)的展开式为

$$\begin{aligned} \phi(k_r, t) \approx & k_c(R_{10} - R_{100} + R_{20} - R_{200}) + \\ & a_{10}(k_x - k_{xc}) + a_{01}k_y + a_{02}k_y^2 \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)是双基 PFA 波前弯曲误差的解析表达式,其各项系数的推导过程中没有引入任何近似。其中第 1 项为常数项,不影响点目标聚焦结果。一次项系数  $a_{10}$  和  $a_{01}$  分别决定了坐标为  $(x'_m, y'_m)$  的点目标在聚焦图像中的距离向和方位向位置,  $(a_{10}, a_{01})$  偏离于实际空间位置  $(x'_m, y'_m)$  表现为几何失真。二次项引入图像中的散焦,式(13)的二次项系数中只有  $a_{02}$  非零,表示散焦现象是 1 维的仅存在于方位向。上述式(13)中各项系数都是点目标空间坐标  $(x'_m, y'_m)$  的 2 维函数,因此聚焦图像中的几何失真和散焦现象都是空变的。当推广到任意双基 SAR 配置下时,上述分析结论仍然适用。

## 4 波前弯曲校正

第 3 节推导了双基 PFA 聚焦图像中波前弯曲误差的解析表达式,基于式(13),本节将分别应用空变滤波和几何失真校正来校正图像中波前弯曲误差。考虑到先进行几何失真校正会改变图像中散焦现象的 1 维特性,并导致后续空变滤波操作困难。因此,选择先进行空变滤波操作而后进行几何失真校正。首先构造一个 1 维的空变滤波器来补偿图像中散焦现象,由第 3 节中分析可以知道,双基 PFA 聚焦图像中散焦现象主要是由式(13)中的二次相位误差引入的。为补偿其散焦现象,构造该滤波器为二次相位误差的共轭,记为

$$H(k_y) = \exp(-ja_{02}k_y^2) \quad (14)$$

双基 PFA 聚焦图像变换到方位向空间频率域,乘以该滤波器而后转换回图像域,即可以实现图像重新聚焦。由第 3 节中的推导可知,式(14)中滤波器参数  $a_{02}$  是点目标空间位置  $(x'_m, y'_m)$  的函数,正确计算该滤波器需要知道图像中每个像素单元聚焦点目标的实际空间位置。由于双基 PFA 聚焦图像中存在几何失真,点目标在图像中聚焦位置  $(a_{10}, a_{01})$  偏离其实际空间位置  $(x'_m, y'_m)$ , 给滤波器参数的计算带来困难。实际应用中选择通过递归方法求得图像中每个像素单元聚焦点目标的实际空间位置  $(x'_m, y'_m)$ ,

而后计算滤波器参数。除此之外,滤波器参数的计算需要随着图像中每个像素单元的位置而变化,计算量很大。为降低计算量,将聚焦图像在图像域分割成几幅子图像,对每幅子图像分别补偿散焦现象。整个波前弯曲误差补偿流程分为以下几个步骤进行:

1) 首先将双基 PFA 聚焦图像划分为  $N$  个图像子块,而后通过递归计算的方法求得第  $i$  幅子图像中心像素单元聚焦点目标对应的空间位置  $(x'_{mi}, y'_{mi})$ 。

2) 将各幅子图像转换到方位向空间频率域,利用所求得的空间位置  $(x'_{mi}, y'_{mi})$  计算滤波器参数  $a_{02}$ , 并将滤波器应用到相应的第  $i$  幅子图像。

3) 空变滤波补偿后的子图像随后转换回图像域实现重聚焦。

4) 将  $N$  幅子图像拼接为原始图像,最后再通过插值实现几何失真校正。

由于双基 PFA 中通常存在一个坐标系旋转操作,因此重聚焦图像也需要进行坐标系逆旋转来得到与实际空间几何关系对应的图像。在实际操作时,可以将坐标系逆旋转操作和几何失真校正结合起来一起通过插值在步骤 4) 中实现。该校正方法作为一种图像后处理方法,可以独立于双基 PFA 操作流程,而且计算量由于子图像分割操作得到大幅度降低,是波前弯曲校正的一种较好方法。虽然子图像中边缘点目标只实现了近似补偿,但是限制残余相位误差的参数设计策略保证了重聚焦后图像质量满足系统要求,因此可以实现大范围场景的 PFA 聚焦图像补偿。

### 5 点目标仿真

基于第 4 节中空变滤波方法,本节对双基 SAR 中等斜视情况进行了仿真,并利用附录 A 中校正系数对双基 PFA 聚焦图像进行了波前弯曲校正。仿真采用一个 63 个点组成的矩形点阵,其相邻点之间的距离和方位间隔均为 100 m。点阵在距离向排列为 9 行,在方位向排列为 7 列。仿真参数在表 1 中给出,其中发射机和接收机斜视角度均为  $10^\circ$ ,速度分别为 170 m/s 和 177.2 m/s。仿真发射机航迹和接收机航迹成  $16.38^\circ$  夹角,其数据采集空间几何关系如图 1 所示。该仿真参数下,根据文献[3]中分析可以计算得到双基 PFA 有效场景聚焦范围为 117 m,实验中所设置场景已经远超出该聚焦范围。对于仿真点目标中取 (0,400) m 处点目标进行分析,

其双基 PFA 聚焦和重聚焦后点目标相应分析结果在图 2—3 中给出。双基 PFA 聚焦场景和波前弯曲误差校正后图像在图 4(a)—(c) 中给出。对 (a)(b) 中矩形框中场景边缘处图像进行局部放大,并在 (d)(e) 中给出。比较校正前后图像可以看出,文中所示方法有效补偿了双基 PFA 中波前弯曲误差,重新聚焦了散焦图像并几何失真校正了聚焦点目标位置。

表 1 仿真实验参数

Tab.1 Simulation parameters

	发射机	接收机
x 方向速度/(m/s)	0	50
y 方向速度/(m/s)	170	170
斜视角/( $^\circ$ )	10	10
载频/GHz	10	10
距离向带宽/MHz	300	300
距离向分辨率/m	0.41	0.41
方位向分辨率/m	0.23	0.23

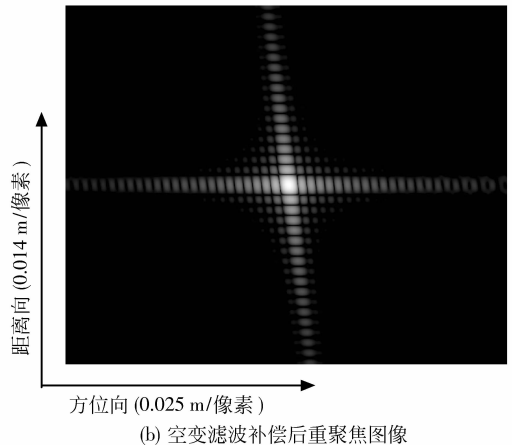
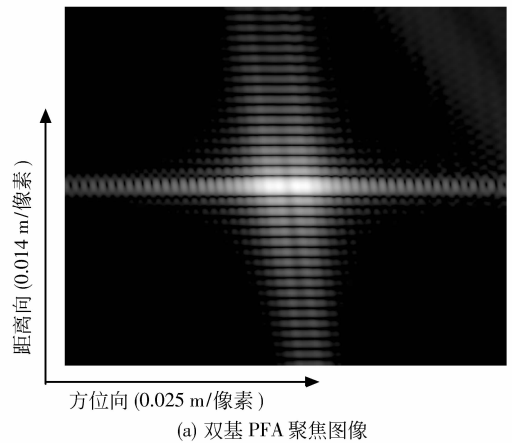


图 2 双基 PFA 聚焦场景边缘 (0,400) m 处点目标和空变滤波重聚焦图像 (16 倍插值)

Fig.2 The bistatic PFA focused image and the refocused image with the filtering operation

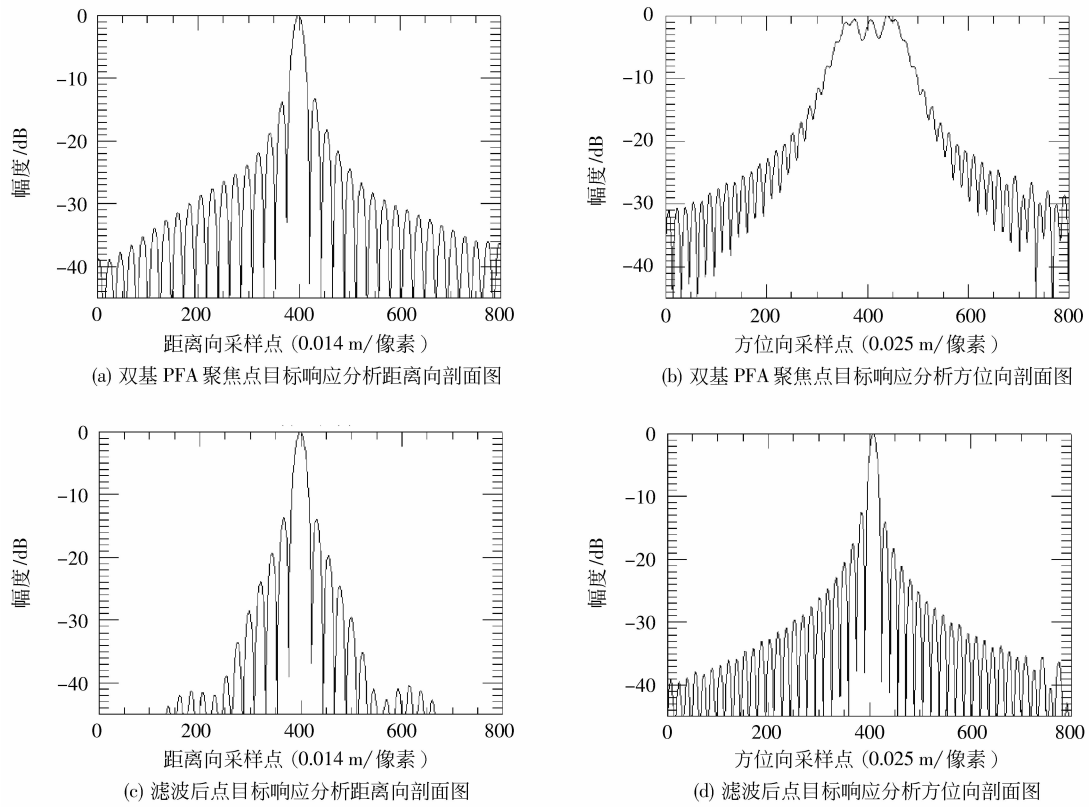


图 3 双基 PFA 聚焦场景边缘(0,400) m 处点目标和重聚焦点目标响应分析结果(16 倍插值)

Fig. 3 Azimuth profiles of the IRFs of the bistatic PFA focused and refocused point targets

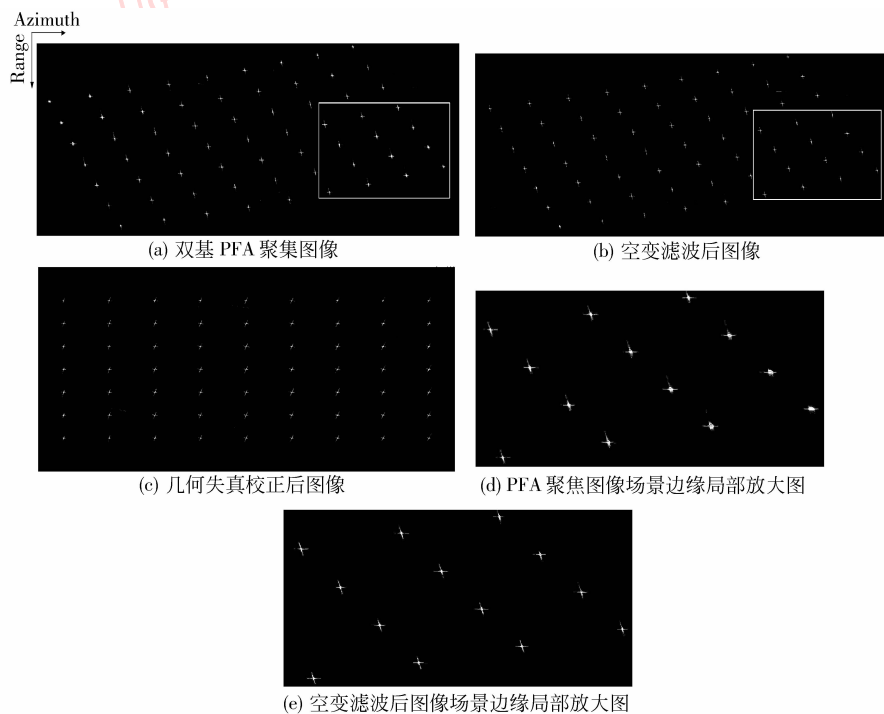


图 4 双基 PFA 聚焦图像和空变滤波后图像比较

Fig. 4 The comparison of the bistatic PFA focused image and refocused image

## 6 结 论

分析了双基 PFA 中的波前弯曲误差,并采用图像后处理的空变滤波方法对其进行校正。双基 PFA 中的平面波前假设引起的波前弯曲效应,在大成像场景、低载频或者高分辨率情况下会导致几何失真和散焦现象,使得聚焦图像质量下降。因此,在实际中应用 PFA 时,通常需要严格限制场景聚焦范围从而避免散焦现象出现。基于双基 SAR 回波信号相位展开表达式,对于波前弯曲引入的几何失真和散焦效应进行分析并予以补偿。该补偿方法作为算法后续处理的一个独立步骤,有效改善了 PFA 场景聚焦范围。点目标仿真验证了该算法的有效性。

### 参考文献 (References)

- [1] Rigling B D, Moses R L. Polar format algorithm for bistatic SAR [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2004, 40(4): 1147-1159.
- [2] Wang R, Loffeld O. Focusing spaceborne/airborne hybrid bistatic SAR data using wavenumber-domain algorithm[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2009, 47(7): 2275-2283.
- [3] Wang R, Loffeld O. Chirp-scaling algorithm for bistatic SAR data in the constant-offset configuration [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2009, 47(3): 952-963.
- [4] Carrara W G, Goodman R S, Majewski R M. Spotlight Synthetic Aperture Radar Signal Processing Algorithm [M]. Boston: Artech House, 1995.
- [5] Walker J L. Range doppler imaging of rotating objects [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1980, 16(1): 23-51.
- [6] Rigling B D, Moses R L. Taylor expansion of the differential range for monostatic SAR [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System, 2005, 41(1): 60-64.
- [7] Jakowatz C V, Wahl D E, Eichel P H, et al. Spotlight-mode Synthetic Aperture Radar: a Signal Processing Approach [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [8] Jakowatz C V Jr, Wahl D E, Thompson P A, et al. Space-variant filtering for correction of wavefront curvature effects in spotlight-mode SAR imagery formed via polar-formatting [C]// Proceedings of the SPIE, Orlando, FL, USA; the international Society of Optical Engineering, 1997(3070): 33-42.
- [9] Doren N E, Jakowatz C V Jr, Wahl D E, et al. General formulation for wavefront curvature correction in polar-formatted spotlight SAR images using space-variant post-filtering [C]// Proceeding of International Conference on Imaging Processing,

Santa Barbara, CA. USA; IEEE Signal Processing Society, 1997(1): 861-864.

- [10] Dorean N E. Space-Variant Post-Filtering for Wave Front Curvature Correction in Polar-Formatted Spotlight-Mode SAR Imagery [D]. PHD Dissertation: The University of New Mexico, 1999.

## 附录 A 波前弯曲误差推导

为得到式(7)中各项系数,需要将双基相位项式(3)表示为空间频率采样点  $k_x$  和  $k_y$  的解析表示式,然而这个解析表示式是难以直接得到的。可以先将双基相位项式(3)表示为

$$\phi = \frac{k_x^2 + k_y^2}{\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \cdot (R_1 - R_{1r} + R_2 - R_{2r}) = H_1(k_x, k_y) H_2(t) \quad (A1)$$

然后利用  $t$  和  $\frac{k_x}{k_y}$  作为中间变量,借助复合函数求导法则求得展开式中各个系数。推导方法如下:

$$\frac{dz}{dv} = \frac{dz}{du} \frac{du}{dv} \Rightarrow \frac{d\phi}{dk_x} = \frac{dH_1(k_x, k_y)}{dk_x} H_2(t) + H_1(k_x, k_y) \frac{dH_2(t)}{dt} \frac{dt}{d\frac{k_y}{k_x}} \left( -\frac{k_y}{k_x^2} \right) \quad (A2)$$

按照式(A2)的推导方式,式(11)中的其他系数可以推导为

$$a_{10} = \frac{R_{10} - R_{10r} + R_{20} - R_{20r}}{A} \quad (A3)$$

$$a_{01} = \frac{1}{A \cdot D} \left\{ v_1 y_{10} - \frac{v_1 (y_{10} - y_m)}{R_{10r}} + \frac{v_2 (x_{20} \sin \theta_s + y_{20} \cos \theta_s)}{R_{20}} - \frac{v_2 [(x_{20} - x_m) \sin \theta_s + (y_{20} - y_m) \cos \theta_s]}{R_{20r}} \right\} - \frac{B}{A^3 D} (R_{10} - R_{10r} + R_{20} - R_{20r}) \quad (A4)$$

$$a_{20} = 0 \quad (A5)$$

$$a_{11} = 0 \quad (A6)$$

$$a_{02} = \left[ 1 + \frac{1}{A^2 D^2} \left( -\frac{3B^2}{A^3} + C - \frac{B}{D} \right) \right] \cdot \frac{R_{10} - R_{10r} + R_{20} - R_{20r}}{2A k_x} +$$

$$\frac{1}{2A \cdot k_{xc} \cdot D^2} \cdot \left\{ \frac{v_1^2 (x_{10}^2 + z_{10}^2)}{R_{10}^3} + \frac{v_1^2 [(x_{10} - x_m)^2 + (y_{10} - y_m)^2 + z_{10}^2]}{R_{10}^3} + \frac{(\cos \theta_s x_{20} - \sin \theta_s y_{20})^2 + z_{20}^2 v_2^2}{R_{20}^3} - \frac{[\cos \theta_s (x_{20} - x_m) - \sin \theta_s (y_{20} - y_m)]^2 + z_{20}^2 v_2^2}{R_{20}^3} \right\} -$$

$$\left( \frac{2}{A^2} B + \frac{E}{D} \right) \cdot \frac{1}{2A \cdot k_{xc} \cdot D^2} \cdot \left\{ \frac{v_1 y_{10}}{R_{10}} - \frac{v_1 (y_{10} - y_m)}{R_{10}} + \frac{v_2 (x_{20} \sin \theta_s + y_{20} \cos \theta_s)}{R_{20}} - \frac{v_2 [(x_{20} - x_m) \sin \theta_s + (y_{20} - y_m) \cos \theta_s]}{R_{20}} \right\} \quad (A7)$$

式中

$$A = \frac{x'_{10}}{R_{10}} + \frac{x'_{20}}{R_{20}}$$

$$B = \frac{z_{10}^2 y_{10} v_1}{R_{10}^4} + \frac{z_{20}^2 (x_{20} \sin \theta_s + y_{20} \cos \theta_s) v_2}{R_{20}^4} + \frac{v_1 [x_{10} (x_{10} y_{20} - y_{10} x_{20}) + z_{10}^2 y_{20}]}{R_{10}^3 R_{20}} + \frac{v_2 (x_{10} y_{20} - y_{10} x_{20}) (y_{20} \sin \theta_s - x_{20} \cos \theta_s)}{R_{10} R_{20}^3} + \frac{v_2 z_{20}^2 (x_{10} \sin \theta_s + y_{10} \cos \theta_s)}{R_{10} R_{20}^3}$$

$$C = \frac{z_{10}^2 (R_{10}^2 - 4y_{10}^2) v_1^2}{R_{10}^6} + \frac{z_{20}^2 [R_{10}^2 - 4(x_{20} \sin \theta_s + y_{20} \cos \theta_s)^2] v_2^2}{R_{20}^6} - \frac{2 x_{10} y_{10} v_1 v_2 [(y_{20}^2 + z_{20}^2) \sin \theta_s - x_{20} y_{20} \cos \theta_s]}{R_{10}^3 R_{20}^3} - \frac{x_{10} v_1^2 (R_{10}^2 - 3y_{10}^2) x_{20} - 3(x_{10}^2 + z_{10}^2) v_1^2 y_{10} y_{20}}{R_{10}^5 R_{20}} + \frac{x_{10} v_2^2 (y_{20} \sin \theta_s - x_{20} \cos \theta_s) R_{20}^2 \cos \theta_s}{R_{10} R_{20}^5} - \frac{3 x_{10} v_2^2 [(y_{20}^2 + z_{20}^2) \sin \theta_s - x_{20} y_{20} \cos \theta_s] (x_{20} \sin \theta_s + y_{20} \cos \theta_s)}{R_{10} R_{20}^5} + \frac{2 (x_{10}^2 + z_{10}^2) v_1 v_2 [(x_{20}^2 + z_{20}^2) \cos \theta_s - x_{20} y_{20} \sin \theta_s]}{R_{10}^3 R_{20}^3} + \frac{y_{10} v_2^2 (x_{20} \cos \theta_s - y_{20} \sin \theta_s) R_{20}^2 \sin \theta_s}{R_{10} R_{20}^5} -$$

$$3 \frac{y_{10} v_2^2 [(x_{20}^2 + z_{20}^2) \cos \theta_s - x_{20} y_{20} \sin \theta_s] (x_{20} \sin \theta_s + y_{20} \cos \theta_s)}{R_{10} R_{20}^5}$$

$$D = \frac{1}{(x'_{10} R_{20} + x'_{20} R_{10})^2} \left\{ v_2 R_{10} R_{20} (x_{10} \cos \theta_s - y_{10} \sin \theta_s) + v_2 R_{10}^2 (x_{20} \cos \theta_s - y_{20} \sin \theta_s) + v_1 R_{20} (R_{20} x_{10} + R_{10} x_{20}) + (x_{10} y_{20} - x_{20} y_{10}) \left[ v_1 \frac{R_{20}}{R_{10}} y_{10} - v_2 \frac{R_{10}}{R_{20}} (x_{20} \sin \theta_s + y_{20} \cos \theta_s) \right] \right\}$$

$$E = \frac{R_{20} x_{10} + R_{10} x_{20}}{(x'_{10} R_{20} + x'_{20} R_{10})^2} \frac{2 v_1 v_2 (x_{20} \sin \theta_s + y_{20} \cos \theta_s)}{R_{20}} + \frac{2 v_2 v_1 y_{10}}{(x'_{10} R_{20} + x'_{20} R_{10})^2 R_{10}} \cdot [R_{20} (x_{10} \cos \theta_s - y_{10} \sin \theta_s)] + R_{10} (x_{20} \cos \theta_s - y_{20} \sin \theta_s) + \frac{x_{10} y_{20} - x_{20} y_{10}}{(x'_{10} R_{20} + x'_{20} R_{10})^2} \cdot \left[ \frac{v_1^2 (x_{10}^2 + z_{10}^2)}{R_{10}^3} - \frac{(x_{20} \cos \theta_s - y_{20} \sin \theta_s)^2 + z_{20}^2 v_2^2}{R_{20}^3} \right] - \frac{2 \left[ v_1 \sin \phi_b R_{20} + x'_{10} v_2 \frac{x_{20} \sin \theta_s + y_{20} \cos \theta_s}{R_{20}} \right]}{x'_{10} R_{20} + x'_{20} R_{10}} D - \frac{2 \left[ v_2 \sin (\phi_b + \theta_s) R_{10} + x'_{20} v_1 \frac{y_{10}}{R_{10}} \right]}{x'_{10} R_{20} + x'_{20} R_{10}} D$$

$$\varphi_{i0} = \varphi_i |_{t=t_c}$$

$$\theta_{i0} = \theta_i |_{t=t_c}$$

$$x'_{i0} = x_{i0} \cos \varphi_b + y_{i0} \sin \varphi_b$$

上述推导结果为任意双基 SAR 配置下波前弯曲误差表达式中的各项系数,当双基 SAR 配置为平飞正侧视模式时,其各表达式可以进一步简化。在平飞正侧视模式下,发射机和接收机沿着平行航迹飞行,则有  $\theta_s = 0, y_{10} = y_{20} = 0, \phi_b = 0$ 。因此有

$$A = \frac{x_{10}}{R_{10}} + \frac{x_{20}}{R_{20}}$$

$$B = 0$$

$$C = \frac{z_{10}^2 v_1^2}{R_{10}^4} + \frac{z_{20}^2 v_2^2}{R_{20}^4} - \frac{x_{10} v_1^2 x_{20}}{R_{10}^3 R_{20}} - \frac{x_{10} v_2^2 x_{20}}{R_{10} R_{20}^3} + 2 \frac{v_1 v_2}{R_{10} R_{20}}$$

$$D = \frac{v_2 R_{10} + v_1 R_{20}}{x_{10} R_{20} + x_{20} R_{10}}$$

$$E = 0$$

将上述系数 A—E 代入式 (A3)—(A7),即可得出正文中在平飞正侧视模式下波前弯曲误差解析表达式中各系数式(8)—(12)。