

Journal of Image
and Graphics

中国图象图形学报



ISSN1006-8961
CN11-3758/TB

2012 8
Vol.17 No.

中国科学院遥感应用研究所
中国图象图形学学会主办
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

Zhongguo Tuxiang Tuxing Xuebao

2012年8月 第17卷 第8期(总第196期)

目次

综述

可计算图像美学研究进展 王伟凝, 蚁静斌, 贺前华(893)

图像处理和编码

利用混沌 PSO 或分解的 2 维 Tsallis 灰度熵阈值分割 吴一全, 吴诗嫻, 张晓杰(902)

H. 264 并行编码中负载平衡方法 侯兴松, 刘大齐, 盛凯, 赖玉洁(911)

提升细节捕捉能力的非下采样轮廓波变换 郭洪, 李雪军(919)

SVD 域的图像高斯噪声强度估计 柳薇(923)

图像扩散去噪模型的分析与改进 傅绪加, 刘峰, 王信松(934)

小波域最小嵌入失真函数设计及其在隐写中的应用 李军, 潘峰, 杨晓元, 刘镇(946)

图像分析和识别

抗压缩的照片图像与真实感计算机图形识别 张荣, 王让定(953)

云的自适应阈值检测方法 黄茜, 王少龙, 徐道磊, 廖婷婷(960)

煤矸区分中的间隔灰度压缩扩阶共生矩阵 于国防(966)

离群样本划分的半监督模糊学习策略 宋晓宁, 杨静宇, 杨习贝(971)

多相 Chan-Vese 模型的直接对偶方法 刘存良, 潘振宽, 郑永果, 王国栋, 丁洁玉(979)

利用梯度信息快速提取直线边缘特征 夏军营, 徐小泉, 熊九龙(987)

2 维双树复小波不确定度加权融合的人脸识别 王仕民,叶继华,邓涛,王明文(995)

图像理解和计算机视觉

流形学习与非线性回归结合的头部姿态估计 范进富,陈锻生(1002)

计算机图形学

角点距离矩阵和同心圆划分的曲线描述与匹配 曾接贤,刘秀朋,符祥(1011)

弹性二次曲面模型下的 3 维形状表现与平滑 郝世杰,蒋建国,郭艳蓉,詹曙(1021)

医学图像处理

主动学习的白细胞图像自动分割 崔凤,潘晨,吴向平,徐军(1029)

遥感图像处理

Bregman 交替迭代遥感图像复原方法 徐焕宇,孙权森,罗楠,夏德深(1035)

基于各向异性 Markov 随机场的遥感影像亚像元尺度建筑物提取 李晓冬,凌峰,杜耘(1042)

中国图象图形学报

刊名题字: 宋 健

月刊(1996 年创刊)

第 17 卷 第 8 期

2012 年 8 月 16 日出版

主管单位 中国科学院

主 办 中国科学院遥感应用研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

主 编 李小文

编辑出版 《中国图象图形学报》编辑出版委员会
北京 9718 信箱 邮编 100101
电子信箱:jig@irsa.ac.cn
电话:010-64807995 010-82614429
网 址:www.cjig.cn

印刷装订 北京北林印刷厂

广告经营许可证 京朝工商广字第 0346 号

总 发 行 北京报刊发行局

订 购 全国各地邮局

国外发行 中国国际图书贸易总公司
(中国国际书店)
(北京 399 信箱 邮编 100044)

Superintended by

Sponsored by

Chief editor

Editor, Publisher

Distributed by

Domestic

Foreign

Printed by

Chinese Academy of Sciences
Institute of Remote Sensing Application,
CAS China Society of Image and Graphics
Institute of Applied Physics and Computational
Mathematics
LI Xiaowen
Editorial and Publishing Board
of Journal of Image and Graphics
(P. O. Box 9718, Beijing 100101, China)
E-mail:jig@irsa.ac.cn
Beijing Bureau for Distribution of Newspapers
and Journals
All Local Post Offices in China
China International Book Trading Corporation
(P. O. Box 399, Beijing 100044, China)
Beijing Beilin Printing House

ISSN 1006-8961 CN11-3758/TB CODE ZTTFXZ 国内邮发代号: 82-831 国外发行代号: M1406 国内定价: 45.00 元

Journal of Image and Graphics

(Monthly, Started in 1996)

Vol. 17 No. 8 August 2012

Contents

Review

Review for computational image aesthetics Wang Weining, Yi Jingjian, He Qianhua (893)

Image Processing and Coding

Two-dimensional Tsallis gray entropy image thresholding using chaotic particle swarm optimization or decomposition
..... Wu Yiquan, Wu Shihua, Zhang Xiaojie (902)

Load balancing for H. 264 parallel encoding Hou Xingsong, Liu Daqi, Sheng Kai, Dun Yujie (911)

Non-subsampled contourlet transform algorithm to promote detail information capturing ability Guo Hong, Li Xuejun (919)

Gaussian noise level estimation in SVD domain for images Liu Wei (923)

Analysis and improvement of image diffusion denoising models Fu Xujia, Liu Feng, Wang Xinsong (934)

Design of minimizing embedding impact function in DWT domain and its applications in steganography
..... Li Jun, Pan Feng, Yang Xiaoyuan, Liu Zhen (946)

Image Analysis and Recognition

Anti-compression approach to distinguishing photographic images and photorealistic computer graphics
..... Zhang Rong, Wang Rangeding (953)

Adaptive threshold approach for night-sky cloud inspection Huang Qian, Wang Shaolong, Xu Daolei, Liao Tingting (960)

Expanded order co-occurrence matrix to differentiate between coal and gangue based on interval grayscale compression
..... Yu Guofang (966)

Semi-supervised fuzzy learning strategy by using a way of partitioning the outlier instances
..... Song Xiaoning, Yang Jingyu, Yang Xibei (971)

Direct dual method of Chan-Vese model for multiphase segmentation
..... Liu Cunliang, Pan Zhenkuan, Zheng Yongguo, Wang Guodong, Ding Jieyu (979)

Fast line edge feature extraction using image gradients Xia Junying, Xu Xiaoquan, Xiong Jiulong (987)

Two-dimensional dual-tree complex wavelet transform uncertainty weighted fusion in face recognition
..... Wang Shimin, Ye Jihua, Deng Tao, Wang Mingwen (995)

Image Understanding and Computer Vision

Combining manifold learning and nonlinear regression for head pose estimation Fan Jinfu, Chen Duansheng (1002)

Computer Graphics

Representation and matching for planar curve based on corner distance matrix and concentric circles
..... Zeng Jiexian, Liu Xiupeng, Fu Xiang (1011)

Three-dimensional shape representation and smoothing with elastic quadratic patch model
..... Hao Shijie, Jiang Jianguo, Guo Yanrong, Zhan Shu (1021)

Medical Image Processing

White blood cell image segmentation based on active learning Cui Feng, Pan Chen, Wu Xiangping, Xu Jun (1029)

Remote Sensing Image Processing

Bregman alternating iterative method for remote sensing image restoration Xu Huanyu, Sun Quansen, Luo Nan, Xia Deshen (1035)

Building extraction at the sub-pixel scale from remotely sensed images based on anisotropic Markov random field
..... Li Xiaodong, Ling Feng, Du Yun (1042)

中图分类号: TN911.73; TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2012)08-0902-09

论文引用格式: 吴一全, 吴诗嫻, 张晓杰. 利用混沌 PSO 或分解的 2 维 Tsallis 灰度熵阈值分割[J]. 中国图象图形学报, 2012, 17(8): 902-910.

利用混沌 PSO 或分解的 2 维 Tsallis 灰度熵阈值分割

吴一全^{1,2,3}, 吴诗嫻¹, 张晓杰¹

1. 南京航空航天大学电子信息工程学院, 南京 210016;
2. 中航工业电光设备研究所光电控制技术重点实验室, 洛阳 471009;
3. 南京大学计算机软件新技术国家重点实验室, 南京 210093

摘要: 现有最大 Shannon 熵或 Tsallis 熵阈值选取方法没有从类内灰度均匀性出发, 而仅依据图像灰度直方图, 并且 Tsallis 熵法的分割效果通常优于 Shannon 熵法。为此, 提出了基于混沌粒子群优化 (PSO) 和基于分解的两种 2 维 Tsallis 灰度熵阈值分割方法。首先, 给出了 1 维 Tsallis 灰度熵阈值选取方法并将其推广到 2 维, 导出了相应的 2 维 Tsallis 灰度熵阈值选取公式及其递推算法; 其次, 利用混沌 PSO 算法搜寻 2 维 Tsallis 灰度熵的最佳阈值, 并采用递推方式去除迭代过程中适应度函数的冗余运算, 大大提高了运行速度; 最后, 将 2 维 Tsallis 灰度熵阈值选取方法的运算转化为两个 1 维 Tsallis 灰度熵法的运算, 计算复杂度从 $O(L^2)$ 进一步降低到 $O(L)$ 。实验结果表明, 与 2 维最大 Shannon 熵法、2 维最大 Tsallis 熵法及 2 维 Tsallis 交叉熵法相比, 所提出的两种方法可以大幅提高图像分割质量和算法运行速度。

关键词: 图像分割; 阈值选取; 2 维 Tsallis 灰度熵; 混沌粒子群优化; 分解; 递推算法

Two-dimensional Tsallis gray entropy image thresholding using chaotic particle swarm optimization or decomposition

Wu Yiquan^{1,2,3}, Wu Shihua¹, Zhang Xiaojie¹

1. College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China
2. Science and Technology on Electro-Optic Control Laboratory, Institute of Electro-Optical Equipment of AVIC, Luoyang 471009, China
3. State Key Laboratory for Novel Software Technology, Nanjing University, Nanjing 210093, China

Abstract: The method of threshold selection based on two-dimensional maximal Shannon or Tsallis entropy only depends on the probability information from gray histogram of an image, and does not immediately consider the uniformity of within-cluster gray scale. The segmentation effect of the Tsallis entropy method is superior to that of the Shannon entropy method. Thus, a two-dimensional Tsallis gray entropy thresholding method based on chaotic particle swarm optimization (PSO) or decomposition is proposed. First, a one-dimensional thresholding method based on Tsallis gray entropy is given and extended to the two-dimensional case. The corresponding formulae and its recursive algorithm for threshold selection based on the two-dimensional Tsallis gray entropy are derived. Then a chaotic particle swarm optimization algorithm is used to find the optimal threshold of the two-dimensional Tsallis gray entropy method. The recursive algorithm is adopted to avoid the repetitive computation of the fitness function in an iterative procedure. As a result, the computing speed is improved greatly.

收稿日期: 2011-07-04; 修回日期: 2012-02-28

基金项目: 国家自然科学基金项目 (60872065); 光电控制技术重点实验室与航空科学基金联合资助项目 (20105152026); 南京大学计算机软件新技术国家重点实验室开放基金项目 (KFKT2010B17)

第一作者简介: 吴一全 (1963—), 男, 教授, 博士生导师, 1998 年于南京航空航天大学获信息与通信工程学科博士学位, 主要研究方向为图像处理与分析、目标检测与识别、视频处理与通信等, 已在国内外核心期刊和国际学术会议论文集上发表学术论文 170 余篇。E-mail: gumption_s@yahoo.com.cn

Finally, the computations of threshold selection method based on two-dimensional Tsallis gray entropy are converted into two one-dimensional spaces, which further reduces the computational complexity from $O(L^2)$ to $O(L)$. The experimental results show that, compared with the two-dimensional maximal Shannon entropy method, the two-dimensional maximal Tsallis entropy method and the two-dimensional Tsallis cross entropy method, the two methods proposed in this paper can significantly improve image segmentation performance and algorithmic running speed.

Key words: image segmentation; threshold selection; two-dimensional Tsallis gray entropy; chaotic particle swarm optimization; decomposition; recursive algorithm

0 引言

阈值分割是依据灰度相似性、通过设置阈值把图像灰度划分成不同等级的图像分割方法。它简便有效,广泛应用于红外目标检测、遥感图像中河流与海面溢油区域提取、印章印文和汽车牌照字符分割、指纹识别、焊接缺陷检测等诸多实际领域。图像阈值化的核心是快速计算合适的阈值。目前已提出了大量的阈值选取方法^[1-5],这些方法依据一定的阈值选取准则函数,在不同的直方图或区域划分方式下,利用穷举搜索、快速递推或智能优化方法搜寻最佳阈值。早年,Kapur 等人^[6]提出的 1 维最大 Shannon 熵方法较为常用。Abutaleb^[7]、Brink^[8]先后将其拓展至灰度级-邻域平均灰度级直方图,大大改善了抗噪性能,但同时计算复杂度大幅增加到 $O(L^4)$ (L 为灰度级数)。对此,文献[9]利用递推公式和查找表加快运算速度;文献[10]借助量化直方图减少计算量。而文献[11-12]将 2 维熵的计算复杂度减少到 $O(L^2)$ 则是采用了两种不同的快速递推方式。文献[13-15]先后引入遗传算法和 PSO 算法寻求 2 维最大 Shannon 熵法的最佳阈值,也使得运算时间大幅度减少。与上述 2 维最大 Shannon 熵方法不同,2006 年文献[16]提出了利用 2 维 Tsallis-Havrda-Charvát 熵的图像阈值分割方法,通常可以取得更好的分割效果,但文中提供的是原始算法,其运算过程是一个 4 重循环,计算复杂度为 $O(L^4)$,运算量庞大。文献[17]提出了基于 PSO 的 2 维 Tsallis 交叉熵阈值选取法,其分割性能优于传统的交叉熵阈值法,且采用 PSO 算法提高了实时性。

然而,上述阈值选取方法中涉及的 Shannon 熵与 Tsallis 熵没有从目标区域内部和背景区域内部的灰度均匀性出发,而仅依据灰度级-邻域平均灰度级直方图的概率,故对部分图像的分割结果尚不够令人满意。另一方面,搜寻最佳阈值的优化方法中,PSO 算法需设定的参数少且易于实现,有其一定的

优势。然而基本 PSO 算法存在后期收敛速度慢、易陷入局部最优解、精度低等不足。此外,现有的算法在每次迭代计算适应度函数过程中都涉及大量的冗余运算。

鉴于上述阈值选取方法中涉及的 Shannon 熵与 Tsallis 熵没有从区域内部灰度均匀性出发这一问题,定义了 Tsallis 灰度熵。该 Tsallis 灰度熵与已有的仅取决于直方图概率信息的最大 Shannon 熵或 Tsallis 熵有本质的区别,它体现了类内灰度级的相似程度。Tsallis 灰度熵越大,类内的像素灰度级越相似。当总 Tsallis 灰度熵取最大值时,目标和背景各区域内部的灰度最为相似,由此得到的阈值可望提高图像分割质量。此外,为降低算法的运算量,提出了分别基于混沌粒子群优化和分解的两种 2 维 Tsallis 灰度熵阈值分割算法。两种算法都是统一在 2 维 Tsallis 灰度熵的框架下,所要达到的目的一致,均是为了降低运行时间。前者利用混沌粒子群优化算法寻找 2 维 Tsallis 灰度熵法的最佳分割阈值,并借助递推公式去除迭代过程中适应度函数的冗余运算,使运算速度大大提高;而后者则将 2 维 Tsallis 灰度熵阈值选取方法的运算转化为两个 1 维 Tsallis 灰度熵法的运算,计算复杂度从 $O(L^2)$ 进一步降低到 $O(L)$ 。文中采用大量灰度图像进行实验,并与文献[14]中基于基本 PSO 的 2 维最大 Shannon 熵法、文献[16]中 2 维最大 Tsallis 熵法、文献[17]中基于基本 PSO 的 2 维 Tsallis 交叉熵法在分割效果和所需运行时间两个方面做了对比。

1 1 维 Tsallis 灰度熵阈值选取

设灰度级阈值 t 将尺寸为 $M \times N$ 图像 $f(m, n)$ 的像素划分成目标类 $C_o = \{(m, n) | f(m, n) = 0, 1, \dots, t\}$ 和背景类 $C_b = \{(m, n) | f(m, n) = t + 1, t + 2, \dots, L - 1\}$, 这里 L 为灰度级的数目。若用 $h(i)$ 表示图像中灰度级 i 的像素数目,令

$$p_{m,n} = \begin{cases} \frac{f(m,n)}{\sum_{(x,y) \in C_o} f(x,y)} & (m,n) \in C_o \\ \frac{f(m,n)}{\sum_{(x,y) \in C_b} f(x,y)} & (m,n) \in C_b \end{cases} \quad (1)$$

则目标类 C_o 的 Tsallis 灰度熵可表示为

$$H_o = \frac{1 - \sum_{(m,n) \in C_o} p_{m,n}^q}{q-1} = \frac{1}{q-1} \left\{ 1 - \sum_{(m,n) \in C_o} \left[\frac{f(m,n)}{\sum_{(x,y) \in C_o} f(x,y)} \right]^q \right\} = \frac{1}{q-1} \left\{ 1 - \sum_{i=0}^t h(i) \left[\frac{i}{\sum_{i'=0}^t h(i')i'} \right]^q \right\} \quad (2)$$

而背景类 C_b 的 Tsallis 灰度熵为

$$H_b = \frac{1 - \sum_{(m,n) \in C_b} p_{m,n}^q}{q-1} = \frac{1}{q-1} \left\{ 1 - \sum_{(m,n) \in C_b} \left[\frac{f(m,n)}{\sum_{(x,y) \in C_b} f(x,y)} \right]^q \right\} = \frac{1}{q-1} \left\{ 1 - \sum_{i=t+1}^{L-1} h(i) \left[\frac{i}{\sum_{i'=t+1}^{L-1} h(i')i'} \right]^q \right\} \quad (3)$$

因此,根据 Tsallis 熵的定义可得目标和背景两类的总 Tsallis 灰度熵为

$$H(t) = H_o + H_b + (1-q)H_oH_b = \frac{1}{q-1} \left\{ 2 - \sum_{i=0}^t h(i) \left[\frac{i}{\sum_{i'=0}^t h(i')i'} \right]^q - \sum_{i=t+1}^{L-1} h(i) \left[\frac{i}{\sum_{i'=t+1}^{L-1} h(i')i'} \right]^q \right\} + \frac{1}{1-q} \left\{ 1 - \sum_{i=0}^t h(i) \left[\frac{i}{\sum_{i'=0}^t h(i')i'} \right]^q \right\} \times \left\{ 1 - \sum_{i=t+1}^{L-1} h(i) \left[\frac{i}{\sum_{i'=t+1}^{L-1} h(i')i'} \right]^q \right\} = \frac{1}{q-1} \left\{ 2 - \frac{v_o(t)}{\mu_o^q(t)} - \frac{v_b(t)}{\mu_b^q(t)} - \left[1 - \frac{v_o(t)}{\mu_o^q(t)} \right] \left[1 - \frac{v_b(t)}{\mu_b^q(t)} \right] \right\} = \frac{1}{q-1} \left[1 - \frac{v_o(t)v_b(t)}{\mu_o^q(t)\mu_b^q(t)} \right] \quad (4)$$

式中,

$$v_o(t) = \sum_{i=0}^t h(i)i^q, v_b(t) = \sum_{i=t+1}^{L-1} h(i)i^q, \mu_o(t) = \sum_{i=0}^t h(i)i, \mu_b(t) = \sum_{i=t+1}^{L-1} h(i)i. \text{ Tsallis 灰度熵越大, 类内的像素灰度级越相似. 当总 Tsallis 灰度熵 } H(t) \text{ 取最大值时, 目标和背景各区域内部的灰度最为相似, 这时的灰度级阈值 } t \text{ 即为最佳阈值}$$

$$t^* = \text{Arg max}_{0 \leq t < L-1} \{H(t)\} \quad (5)$$

2 2 维 Tsallis 灰度熵阈值选取及其递推算法

设 $g(m,n)$ 表示图像 $f(m,n)$ 中像素 (m,n) 的邻域平均灰度级, 图像中(灰度级 i , 邻域平均灰度级 j) 二元对出现的频数记作 $h(i,j), i, j = 0, 1, \dots, L-1$, 则 2 维直方图 $p(i,j) = h(i,j)/(M \times N)$, $\sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} p(i,j) = 1$. 图 1 给出了 2 维直方图区域划分, 其中 (t,s) 表示 2 维阈值. 若图像中暗像素代表目标, 则区域 0 和 1 分别表示目标和背景, 边界点和噪声点则属于区域 2 和 3, 通常假定 $p(i,j) \approx 0$, 这是由于噪声点和边界点的数目占图像像素总数的比例很小.

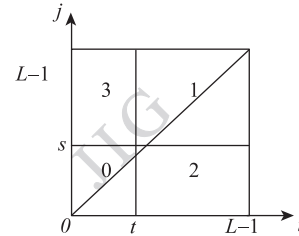


图 1 2 维分割区域
Fig. 1 2D segmentation area

定义目标类和背景类的 Tsallis 灰度熵 $H_o(t,s)$ 和 $H_b(t,s)$ 分别为

$$H_o(t,s) = [H_{oi}(t,s), H_{oj}(t,s)]^T = \left[\frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{(m,n) \in C_o} \left(\frac{f(m,n)}{\sum_{(x,y) \in C_o} f(x,y)} \right)^q \right), \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{(m,n) \in C_o} \left(\frac{g(m,n)}{\sum_{(x,y) \in C_o} g(x,y)} \right)^q \right) \right]^T = \left[\frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s h(i,j) \left(\frac{i}{\sum_{i'=0}^t \sum_{j'=0}^s h(i',j')i'} \right)^q \right), \right.$$

$$\frac{1}{q-1} \left\{ 1 - \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s h(i,j) \left[\frac{j}{\sum_{i'=0}^t \sum_{j'=0}^s h(i',j')j'} \right]^q \right\}^T$$

$$H_b(t,s) = [H_{bi}(t,s), H_{bj}(t,s)]^T =$$

$$\left[\frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{(m,n) \in C_b} \left(\frac{f(m,n)}{\sum_{(x,y) \in C_b} f(x,y)} \right)^q \right), \right.$$

$$\left. \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{(m,n) \in C_b} \left(\frac{g(m,n)}{\sum_{(x,y) \in C_b} g(x,y)} \right)^q \right) \right]^T =$$

$$\left[\frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=t+1j=s+1}^{L-1} \sum_{i'=t+1j'=s+1}^{L-1} h(i,j) \left(\frac{i}{\sum_{i'=t+1j'=s+1}^{L-1} \sum_{j'=s+1}^{L-1} h(i',j')i'} \right)^q \right), \right.$$

$$\left. \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=t+1j=s+1}^{L-1} \sum_{i'=t+1j'=s+1}^{L-1} h(i,j) \left(\frac{j}{\sum_{i'=t+1j'=s+1}^{L-1} \sum_{j'=s+1}^{L-1} h(i',j')j'} \right)^q \right) \right]^T$$

(6)

(7)

若 $v_{oi}(t,s), v_{oj}(t,s), v_{bi}(t,s), v_{bj}(t,s), \mu_{oi}(t,s), \mu_{oj}(t,s), \mu_{bi}(t,s), \mu_{bj}(t,s)$ 分别定义为

$$\begin{cases} v_{oi}(t,s) = \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s h(i,j) i^q \\ v_{oj}(t,s) = \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s h(i,j) j^q \\ v_{bi}(t,s) = \sum_{i=t+1j=s+1}^{L-1} \sum_{i'=t+1j'=s+1}^{L-1} h(i,j) i^q \\ v_{bj}(t,s) = \sum_{i=t+1j=s+1}^{L-1} \sum_{i'=t+1j'=s+1}^{L-1} h(i,j) j^q \\ \mu_{oi}(t,s) = \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s h(i,j) i \\ \mu_{oj}(t,s) = \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s h(i,j) j \\ \mu_{bi}(t,s) = \sum_{i=t+1j=s+1}^{L-1} \sum_{i'=t+1j'=s+1}^{L-1} h(i,j) i \\ \mu_{bj}(t,s) = \sum_{i=t+1j=s+1}^{L-1} \sum_{i'=t+1j'=s+1}^{L-1} h(i,j) j \end{cases}$$

则目标和背景两类的总 Tsallis 灰度熵为

$$H(t,s) = [H_i(t,s), H_j(t,s)]^T =$$

$$[H_{oi}(t,s) + H_{bi}(t,s) + (1-q)H_{oi}(t,s)H_{bi}(t,s),$$

$$H_{oj}(t,s) + H_{bj}(t,s) + (1-q)H_{oj}(t,s)H_{bj}(t,s)]^T =$$

$$\left[\frac{1}{q-1} \left(1 - \frac{v_{oi}(t,s)v_{bi}(t,s)}{\mu_{oi}^q(t,s)\mu_{bi}^q(t,s)} \right), \right.$$

$$\left. \frac{1}{q-1} \left(1 - \frac{v_{oj}(t,s)v_{bj}(t,s)}{\mu_{oj}^q(t,s)\mu_{bj}^q(t,s)} \right) \right]^T$$

令

$$\zeta(t,s) = H_i(t,s) + H_j(t,s) =$$

$$\frac{1}{q-1} \left[2 - \frac{v_{oi}(t,s)v_{bi}(t,s)}{\mu_{oi}^q(t,s)\mu_{bi}^q(t,s)} - \frac{v_{oj}(t,s)v_{bj}(t,s)}{\mu_{oj}^q(t,s)\mu_{bj}^q(t,s)} \right]$$

(9)

若将 $\zeta(t,s)$ 视为 2 维 Tsallis 灰度熵阈值选取的准则函数,则 $\zeta(t,s)$ 达到最大值时所对应的阈值即为最佳阈值

$$(t^*, s^*) = \text{Arg} \max_{0 \leq t, s < L-1} \{ \zeta(t,s) \}$$

(10)

为了加快 2 维 Tsallis 灰度熵法的运行速度,可以递推的方式求得准则函所涉及的量,无需每次都从 (0,0) 开始计算,由此使计算复杂度由 $O(L^4)$ 下降到 $O(L^2)$ 。现以 $v_{oi}(t,s)$ 为例,导出其递推公式

$$v_{oi}(t,s) = \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s h(i,j) i^q =$$

$$\sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{s-1} h(i,j) i^q + \sum_{i=0}^t h(i,s) i^q =$$

$$v_{oi}(t,s-1) + \sum_{i=0}^{t-1} h(i,s) i^q + h(t,s) t^q =$$

$$v_{oi}(t,s-1) + \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^s h(i,j) i^q -$$

$$\sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{s-1} h(i,j) i^q + h(t,s) t^q =$$

$$v_{oi}(t,s-1) + v_{oi}(t-1,s) -$$

$$v_{oi}(t-1,s-1) + h(t,s) t^q$$

具体递推算法如下:

$$\begin{cases} v_{oi}(0,0) = 0 \\ v_{oj}(0,0) = 0 \\ \mu_{oi}(0,0) = 0 \\ \mu_{oj}(0,0) = 0 \end{cases}$$

(11)

$$\begin{cases} v_{oi}(t,s) = v_{oi}(t,s-1) + v_{oi}(t-1,s) - \\ v_{oi}(t-1,s-1) + h(t,s) t^q \\ v_{oj}(t,s) = v_{oj}(t,s-1) + v_{oj}(t-1,s) - \\ v_{oj}(t-1,s-1) + h(t,s) s^q \end{cases}$$

(12)

$$\begin{cases} \mu_{oi}(t,s) = \mu_{oi}(t,s-1) + \mu_{oi}(t-1,s) - \\ \mu_{oi}(t-1,s-1) + h(t,s) t \\ \mu_{oj}(t,s) = \mu_{oj}(t,s-1) + \mu_{oj}(t-1,s) - \\ \mu_{oj}(t-1,s-1) + h(t,s) s \end{cases}$$

(13)

3 基于混沌 PSO 的 2 维 Tsallis 灰度熵阈值选取

3.1 基本 PSO 算法

设 n 维解空间中粒子 i 的位置 $\mathbf{X}_i = (X_{i1},$

X_{i2}, \dots, X_{in}), 移动速度 $V_i = (V_{i1}, V_{i2}, \dots, V_{in})$, X_i 的目标函数值 F_i 作为评价粒子 i 优劣程度的适应度。首先初始化粒子群的位置和速度, 然后通过迭代方式搜寻解空间中的最优解。设第 k 次迭代时, 粒子 i 的最优解(即个体极值)为 $B_i(k)$, 整个粒子群的最优解(即全局极值)为 $G_b(k)$, 则第 $k+1$ 次迭代时, 先后更新速度和位置为

$$V_i(k+1) = wV_i(k) + c_1r_1[B_i(k) - X_i(k)] + c_2r_2[G_b(k) - X_i(k)] \quad (14)$$

$$X_i(k+1) = X_i(k) + V_i(k+1) \quad (15)$$

式中, 学习因子 $c_1 = c_2 = 2$; r_1, r_2 为 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机数; 惯性因子 $w = w_{\max} - k(w_{\max} - w_{\min})/k_{\max}$, k_{\max} 代表总迭代次数, w_{\max}, w_{\min} 分别表示最大和最小惯性因子, $w_{\max} = 0.95, w_{\min} = 0.4$ 。迭代中, 粒子速率限制在 $[V_{\min}, V_{\max}]$, $V_{\min} = -V_{\max} = -8$, 位置则在允许范围内。迭代结束时输出的 G_b 即为全局最优解。

3.2 2 维 Tsallis 灰度熵阈值选取的混沌 PSO 算法

上述基本 PSO 算法的运算机理简单且易于实现, 需设定的参数少, 但存在后期收敛速度慢、易陷入局部最优解、精度低等不足。如果将混沌变异与基本 PSO 相结合, 利用由此得到的混沌 PSO 算法搜寻最佳阈值, 在寻优过程中通过混沌扰动使停滞进化的粒子摆脱局部极值区, 可以加快收敛、提高精度。考虑到 Tent 映射的遍历性优于 Logistic 映射, 且 Tent 映射混沌优化方法具有更高的寻优效率, 因此利用 Tent 映射混沌 PSO 算法。为弥补 Tent 映射迭代序列中出现小周期、不稳周期点等弱点, 通过随机扰动方程, 当达到小周期点或不动点时再次进入混沌状态。另外, 最优粒子可衡量整个粒子群趋向全局最优解的程度, 混沌映射仅仅针对最优粒子位置, 可以逃离局部最优解并加快寻优速度。

Tent 映射方程为

$$\beta_j^{k+1} = \begin{cases} 2\beta_j^k & 0 \leq \beta_j^k \leq 0.5 \\ 2(1 - \beta_j^k) & 0.5 < \beta_j^k \leq 1 \end{cases} \quad (16)$$

当达到小周期点 $(0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ 或不动点 $(0, 0.25, 0.5, 0.75)$ 时, 引入扰动方程

$$\beta_j^{k+1} = \begin{cases} 2[\beta_j^k + 0.1\text{rand}(0,1)] & 0 \leq \beta_j^k \leq 0.5 \\ 2[1 - (\beta_j^k + 0.1\text{rand}(0,1))] & 0.5 < \beta_j^k \leq 1 \end{cases} \quad (17)$$

迭代中, 对粒子群的最优粒子 $G_b(k) = [X_1^k,$

$X_2^k, \dots, X_n^k]$ 进行混沌变异

$$\begin{cases} P_c = X_{j,\min} + \beta_j^k(X_{j,\max} - X_{j,\min}) \\ X_j^{k+1} = (1 - \lambda_e)X_j^k + \lambda_e P_c \end{cases} \quad (18)$$

$$\lambda_e = 1 - [(e - 1)/e]^u \quad (19)$$

式中, 收缩因子 λ_e 决定了 X_j 的变异空间, e 为粒子群进化代数, u 控制收缩速度, $u = 2$ 。

采用 Tent 映射混沌 PSO 算法搜寻 2 维 Tsallis 灰度熵法最佳阈值的具体步骤如下:

1) 对混沌粒子群进行初始化。用改进的 Tent 序列产生 α 个粒子, 粒子的位置是由像素灰度级和邻域平均灰度级组成的向量, 在 $[V_{\min}, V_{\max}]$ 上随机产生粒子速率。

2) 依据式(9)(11)——(13)递推计算每个粒子的适应度, 更新个体和全局极值位置。

3) 依据式(16)——(19)对最优粒子的位置进行混沌变异, 重新计算其适应度, 如果大于原适应度, 则对当前最优粒子的位置进行更新。直至其迭代次数为 γ ($\gamma = 10$)。

4) 依据式(14)(15)分别对粒子的速度和位置进行更新。

5) 若达到总迭代次数, 往下执行步骤 6), 否则返回步骤 2)。

6) 输出最佳阈值 (t^*, s^*) , 并据此进行图像阈值分割。

4 基于分解的 2 维 Tsallis 灰度熵阈值选取

文献[18]提出了基于分解的 2 维 Otsu 阈值法, 将求解 2 维最佳阈值转化成计算两个 1 维最佳阈值。在图 1 中区域 2 和 3 处 $p(i, j) \approx 0$ 的假设下, 能够得到等价的阈值, 而计算复杂度却可减少到 $O(L)$ 。借助这一思路, 提出 2 维 Tsallis 灰度熵阈值选取的分解算法, 以进一步加快运行速度。

设 V_i 和 H_j 分别表示像素灰度级和邻域平均灰度级的边缘分布, 则由图像中二元对 (i, j) 的频数

$$h(i, j) \text{ 可得 } V_i = \sum_{j=0}^{L-1} h(i, j), H_j = \sum_{i=0}^{L-1} h(i, j)。V_i \text{ 即为原始灰度级图像的直方图, 而 } H_j \text{ 则是邻域平均灰度级图像的直方图。}$$

若令 $v_{o(t)} = \sum_{i=0}^t V_i i^q, v_{b(t)} = \sum_{i=t+1}^{L-1} V_i i^q, \mu_{o(t)} =$

$$\sum_{i=0}^t V_i i, \mu_{b(t)} = \sum_{i=t+1}^{L-1} V_i i, v_{o(s)} = \sum_{j=0}^s H_j j^q, v_b(s) =$$

$$\sum_{j=s+1}^{L-1} H_j j^q, \mu_{o(s)} = \sum_{j=0}^s H_j j, \mu_{b(s)} = \sum_{j=s+1}^{L-1} H_j j, \eta_i(t) \text{ 和}$$

$$\eta_j(s) \text{ 分别表示原始灰度级图像和邻域平均灰度级}$$

$$\text{图像的 1 维 Tsallis 灰度熵阈值分割方法的准则函数,则}$$

$$\eta_i(t) = \frac{1}{q-1} \left[1 - \frac{v_{o(t)} v_{b(t)}}{\mu_{o(t)}^q \mu_{b(t)}^q} \right] \quad (20)$$

$$\eta_j(s) = \frac{1}{q-1} \left[1 - \frac{v_{o(s)} v_{b(s)}}{\mu_{o(s)}^q \mu_{b(s)}^q} \right] \quad (21)$$

$\eta_i(t)$ 和 $\eta_j(s)$ 各自达到最大值时分别对应最佳阈值 t^* 和 s^* , 即

$$\eta_i(t^*) = \max_{0 \leq t < L-1} \{ \eta_i(t) \} \quad (22)$$

$$\eta_j(s^*) = \max_{0 \leq s < L-1} \{ \eta_j(s) \} \quad (23)$$

在图 1 中区域 2 和 3 处概率 $p(i, j) \approx 0$ 的假设下, 得

$$v_{oi}(t, s) = \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s h(i, j) i^q =$$

$$\sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^{L-1} h(i, j) i^q = \sum_{i=0}^t V_i i^q = v_{o(t)}$$

$$u_{oi}(t, s) = \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s h(i, j) i =$$

$$\sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^{L-1} h(i, j) i = \sum_{i=0}^t V_i i = \mu_{o(t)}$$

与此类似, 有

$$v_{bi}(t, s) = v_{b(t)}, u_{bi}(t, s) = \mu_{b(t)}, v_{oj}(t, s) = v_{o(s)},$$

$$v_{bj}(t, s) = v_{b(s)}, u_{oj}(t, s) = \mu_{o(s)}, u_{bj}(t, s) = \mu_{b(s)}$$

故式(9)的 2 维 Tsallis 灰度熵准则函数 $\zeta(t, s)$ 变成

$$\zeta(t, s) = \frac{1}{q-1} \left[2 - \frac{v_{oi}(t, s) v_{bi}(t, s)}{\mu_{oi}^q(t, s) \mu_{bi}^q(t, s)} - \right.$$

$$\left. \frac{v_{oj}(t, s) v_{bj}(t, s)}{\mu_{oj}^q(t, s) \mu_{bj}^q(t, s)} \right] = \frac{1}{q-1} \left[1 - \frac{v_{o(t)} v_{b(t)}}{\mu_{o(t)}^q \mu_{b(t)}^q} \right] +$$

$$\frac{1}{q-1} \left[1 - \frac{v_{o(s)} v_{b(s)}}{\mu_{o(s)}^q \mu_{b(s)}^q} \right] = \eta_i(t) + \eta_j(s) \quad (24)$$

$\eta_i(t)$ 和 $\eta_j(s)$ 同时取最大值时 $\zeta(t, s)$ 达到最大, 即

$$\zeta(t^*, s^*) = \max_{0 \leq t, s < L-1} \{ \eta_i(t) + \eta_j(s) \} =$$

$$\max_{0 \leq t < L-1} \{ \eta_i(t) \} + \max_{0 \leq s < L-1} \{ \eta_j(s) \} =$$

$$\eta_i(t^*) + \eta_j(s^*) \quad (25)$$

由上式可知, 2 维 Tsallis 灰度熵阈值选取方法的运算可转化为求解原始灰度级图像和邻域平均灰度级图像两个 1 维 Tsallis 灰度熵法的最佳阈值, 由此构成 2 维最佳阈值。于是搜寻最佳阈值只需在长

度为 L 的两个 1 维空间内进行, 无需涉及大得多的 $L \times L$ 2 维搜索空间, 计算复杂度下降到 $O(L+L) = O(L)$ 。该方法实质上一方面由原始灰度级图像计算 1 维 Tsallis 灰度熵最佳阈值 t^* , 对目标和背景进行分割; 另一方面经邻域平均灰度级图像选取阈值 s^* 时具有一定的抗噪性, 因此能达到 2 维阈值分割同样的效果。然而, 实际应用中遇到的大都为有噪图像, 无法完全满足上述假设, 此时分解法与原始 2 维 Tsallis 灰度熵法所得阈值并非完全一致, 其原因在于顾及了 2 维直方图中的噪声与边界区域, 更为全面地考虑了 2 维 Tsallis 灰度熵法所忽视的部分灰度级及邻域平均灰度级信息, 所以对实际图像特别是有噪图像能达到更优越的分割效果。

5 实验结果与分析

针对各种类型的灰度级图像, 对提出的基于混沌 PSO 和基于分解的 2 维 Tsallis 灰度熵法进行了大量的阈值分割实验, 并与最近报道的基本 PSO 的 2 维最大 Shannon 熵法^[14]、2 维最大 Tsallis 熵法^[16]、基本 PSO 的 2 维 Tsallis 交叉熵法^[17]在分割质量及运行速度方面进行了对比, 结果表明本文方法优势明显, 表 1 列出了上述 5 种分割算法的最佳阈值及运行时间比较。现以车牌、House 及遥感图像(图 2—图 4)为例予以说明。测试环境为 Intel Celeron ® 2.93 GHz CPU/512 MB 内存/Matlab7.1。

由图 2—图 4 可见, 最大 Shannon 熵、最大 Tsallis 熵方法的分割结果尚不够令人满意。这是由于它们没有从目标区域内部和背景区域内部的灰度均匀性出发, 而仅依据灰度级-邻域平均灰度级直方图的概率信息。对于图 2 车牌中的“苏 A”两个字符、图 3 House 砖墙的纹理细节以及图 4 遥感图像中交错弯曲的河流, 基本 PSO 的 2 维最大 Shannon 熵法^[14]和 2 维最大 Tsallis 熵法^[16]都无法将其提取出来, 2 维 Tsallis 交叉熵法^[17]在一定程度上改善了分割效果, 但并非十分理想。而基于混沌 PSO 和基于分解的 2 维 Tsallis 灰度熵法均能较为准确地分割出上述部分, 优势明显。其原因在于 Tsallis 灰度熵与上述仅取决于直方图概率信息的最大 Shannon 熵或 Tsallis 熵有本质的区别, 既用到了直方图中概率信息, 又直接体现了类内灰度级的相似程度。Tsallis 灰度熵越大, 类内的像素



图 2 车牌图像及其分割结果

Fig. 2 Plate image and its segmentation results

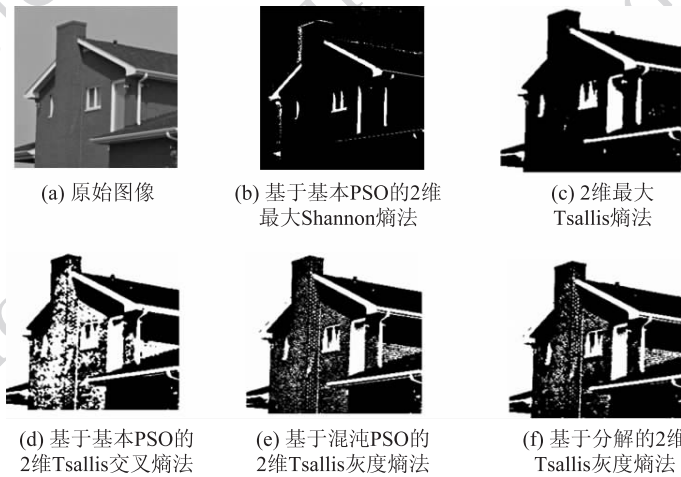


图 3 House 图像及其分割结果

Fig. 3 House image and its segmentation results

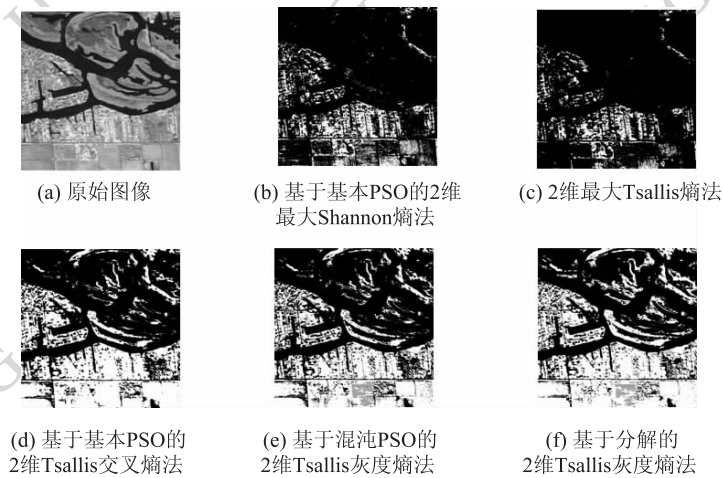


图 4 遥感图像及其分割结果

Fig. 4 Remote sensing image and its segmentation results

灰度级越相似。当总 Tsallis 灰度熵取最大值时,目标和背景各区域内部的灰度最为相似,由此求得的阈值使图像中区域内部的均匀性得到改善,边界形

状的准确性得以提高。

由表 1 可见,与基本 PSO 的 2 维最大 Shannon 熵法^[14]、2 维最大 Tsallis 熵法^[16]及基本 PSO 的 2

表 1 几种分割算法的阈值及运行时间比较

Table 1 Comparison of several segmentation algorithms in threshold and running time

方法	图像	阈值	时间/s
文献[14]中基本 PSO 的 2 维最大 Shannon 熵法	图 2	(129,128)	1.11
	图 3	(193,166)	0.77
	图 4	(193,185)	1.99
文献[16]中 2 维最大 Tsallis 熵法	图 2	(127,127)	8.27
	图 3	(99,134)	7.81
	图 4	(200,199)	9.97
文献[17]中基本 PSO 的 2 维 Tsallis 交叉熵法	图 2	(111,124)	1.25
	图 3	(159,186)	0.77
	图 4	(249,170)	1.96
基于混沌 PSO 的 2 维 Tsallis 交叉熵法	图 2	(110,123)	0.81
	图 3	(157,187)	0.59
	图 4	(247,173)	1.08
基于基本 PSO 的 2 维 Tsallis 灰度熵法	图 2	(66,68)	1.23
	图 3	(128,127)	0.69
	图 4	(168,169)	1.92
基于混沌 PSO 的 2 维 Tsallis 灰度熵法	图 2	(67,69)	0.75
	图 3	(128,129)	0.57
	图 4	(167,168)	1.02
基于分解的 2 维 Tsallis 灰度熵法	图 2	(67,67)	0.33
	图 3	(127,125)	0.25
	图 4	(162,163)	0.56

维 Tsallis 交叉熵法^[17]相比,本文提出的两种方法的运行时间大大缩短。其中,基于混沌 PSO 的 2 维 Tsallis 灰度熵法所需运行时间是文献[14]中基本 PSO 的 2 维最大 Shannon 熵法和文献[17]中基本 PSO 的 2 维 Tsallis 交叉熵法的 60%~70%,而基于分解的 2 维 Tsallis 灰度熵法所需运行时间只有文献[14]中方法和文献[17]中方法的 30%左右。

此外,基于混沌 PSO 的 2 维 Tsallis 灰度熵方法中,混沌 PSO 算法相比基本 PSO 算法具有寻优速度快、收敛精度高的优点,从表 1 中可以看出,同样是采用 Tsallis 交叉熵或 Tsallis 灰度熵的阈值选取准则,混沌 PSO 算法和基本 PSO 算法最终选择的阈值几乎相同,因此二者在分割效果上的差别不大,这是因为二者采用相同的阈值选择函数的缘故,但混沌 PSO 算法所需运行时间要明显少于基本 PSO 算法。

6 结 论

本文定义的 Tsallis 灰度熵与已有的仅取决于直方图概率信息的最大 Shannon 熵或 Tsallis 熵有本质的区别,它既反映了直方图中概率信息,又直接体现了类内灰度级的相似程度。当总 Tsallis 灰度熵取最大值时,目标和背景各区域内部的灰度趋于均匀,据此选取最佳阈值提高了图像分割质量。

本文基于混沌 PSO 的 2 维 Tsallis 灰度熵阈值选取方法,利用混沌 PSO 算法搜寻 2 维 Tsallis 灰度熵法的最佳阈值,并采用递推方式去除了迭代过程中适应度函数的冗余运算,使运算速度大大提高。

基于分解的 2 维 Tsallis 灰度熵法将 2 维 Tsallis 灰度熵阈值选取方法的运算转化为两个 1 维 Tsallis 灰度熵法的运算,计算复杂度从 $O(L^2)$ 进一步降低到 $O(L)$ 。

实验结果表明,相比基本 PSO 的 2 维最大 Shannon 熵法、2 维最大 Tsallis 熵法及基本 PSO 的 2 维 Tsallis 交叉熵法,本文两种 2 维 Tsallis 灰度熵法分割效果优势明显,且运算速度大大加快。

当实际图像中含有灰度明显不同的多类目标时,可将提出的基于混沌 PSO 或分解的 2 维 Tsallis 灰度熵法推广到多阈值分割。

参考文献 (References)

- [1] Sezgin M, Sankur B. Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation[J]. *Journal of Electronic Imaging*, 2004, 13(1): 145-165.
- [2] Bardera A, Boada I, Feixas M, et al. Image segmentation using excess entropy[J]. *Journal of Signal Processing Systems*, 2009, 54(1-3): 205-214.
- [3] Wang S T, Chung F L, Xiong F S. A novel image thresholding method based on Parzen window estimate [J]. *Pattern Recognition*, 2008, 41(1): 117-129.
- [4] Davies E R. Stable bi-level and multi-level thresholding of images using a new global transformation [J]. *IET Computer Vision*, 2008, 2(2): 60-74.
- [5] Hammouche K, Diaf M, Siarry P. A multilevel automatic thresholding method based on a genetic algorithm for a fast image segmentation [J]. *Computer Vision and Image Understanding*, 2008, 109(2): 163-175.
- [6] Kapur J N, Sahoo P K, Wong A K C. A new method for grey-level picture thresholding using the entropy of the histogram[J]. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 1985, 29(3): 273-285.
- [7] Abutaleb A S. Automatic thresholding of gray-level picture using two-dimensional entropies [J]. *Pattern Recognition*, 1989, 47(1): 22-32.
- [8] Brink A D. Thresholding of digital image using two-dimensional entropies[J]. *Pattern Recognition*, 1992, 25(8): 803-808.
- [9] Liu J Z. A fast algorithm for thresholding of gray-level picture using 2D entropy[J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 1991, 4(3): 46-53. [刘健庄. 基于 2 维熵的图像阈值选取快速算法[J]. *模式识别与人工智能*, 1991, 4(3): 46-53.]
- [10] Chen W T, Wen C H, Yang C W. A fast two-dimensional entropic thresholding algorithm [J]. *Pattern Recognition*, 1994, 27(7): 885-893.
- [11] Gong J, Li L Y, Chen W N. A fast two dimensional entropic thresholding method[J]. *Journal of Southeast University*. 1996, 26(4): 31-36. [龚坚, 李立源, 陈维南. 2 维熵阈值分割的快速算法[J]. *东南大学学报*, 1996, 26(4): 31-36.]
- [12] Zhang Y J, Wu X J, Xia L Z. A fast recurring algorithm for two-dimensional entropic thresholding for image segmentation [J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 1997, 10(3): 259-264. [张毅军, 吴雪菁, 夏良正. 2 维熵图像阈值选取的快速递推算法[J]. *模式识别与人工智能*, 1997, 10(3): 259-264.]
- [13] Chen G, Zuo H F. 2-D maximum entropy method of image segmentation based on genetic algorithm [J]. *Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics*, 2002, 14(6): 530-534. [陈果, 左洪福. 图像分割的 2 维最大熵遗传算法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2002, 14(6): 530-534.]
- [14] Du F, Shi W K, Chen L Z, et al. Infrared image segmentation with 2-D maximum entropy method based on particle swarm optimization(PSO)[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2005, 26: 597-603.
- [15] Du F, Shi W K, Deng Y. Fast infrared image segmentation method [J]. *Journal Infrared Millimeter and Waves*, 2005, 24(3): 370-373. [杜峰, 施文康, 邓勇. 一种快速红外图像分割方法[J]. *红外与毫米波学报*, 2005, 24(3): 370-373.]
- [16] Sahoo P K, Arora G. Image thresholding using two-dimensional Tsallis-Havrda-Charvat entropy[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2006, 27(6): 520-528.
- [17] Tang Y G, Di Q Y, Zhao L X, et al. Image thresholding segmentation based on two-dimensional minimum Tsallis-cross entropy[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(1): 9-15. [唐英干, 邸秋艳, 赵立兴, 等. 基于 2 维最小 Tsallis 交叉熵的图像阈值分割方法[J]. *物理学报*, 2009, 58(1): 9-15.]
- [18] Yue F, Zuo W M, Wang K Q. Decomposition based two-dimensional threshold algorithm for gray images [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2009, 35(7): 1022-1027. [岳峰, 左旺孟, 王宽全. 基于分解的灰度图像 2 维阈值选取算法[J]. *自动化学报*, 2009, 35(7): 1022-1027.]