

Journal of Image  
and Graphics

# 中国图象图形学报



ISSN1006-8961  
CN11-3758/TB

2012 8  
Vol.17 No.

中国科学院遥感应用研究所  
中国图象图形学学会主办  
北京应用物理与计算数学研究所

# 中国图象图形学报

Zhongguo Tuxiang Tuxing Xuebao

2012年8月 第17卷 第8期(总第196期)

## 目次

### 综述

可计算图像美学研究进展 ..... 王伟凝, 蚁静斌, 贺前华(893)

### 图像处理和编码

利用混沌 PSO 或分解的 2 维 Tsallis 灰度熵阈值分割 ..... 吴一全, 吴诗嫻, 张晓杰(902)

H. 264 并行编码中负载均衡方法 ..... 侯兴松, 刘大齐, 盛凯, 赖玉洁(911)

提升细节捕捉能力的非下采样轮廓波变换 ..... 郭洪, 李雪军(919)

SVD 域的图像高斯噪声强度估计 ..... 柳薇(923)

图像扩散去噪模型的分析与改进 ..... 傅绪加, 刘峰, 王信松(934)

小波域最小嵌入失真函数设计及其在隐写中的应用 ..... 李军, 潘峰, 杨晓元, 刘镇(946)

### 图像分析和识别

抗压缩的照片图像与真实感计算机图形识别 ..... 张荣, 王让定(953)

云的自适应阈值检测方法 ..... 黄茜, 王少龙, 徐道磊, 廖婷婷(960)

煤矸区分中的间隔灰度压缩扩阶共生矩阵 ..... 于国防(966)

离群样本划分的半监督模糊学习策略 ..... 宋晓宁, 杨静宇, 杨习贝(971)

多相 Chan-Vese 模型的直接对偶方法 ..... 刘存良, 潘振宽, 郑永果, 王国栋, 丁洁玉(979)

利用梯度信息快速提取直线边缘特征 ..... 夏军营, 徐小泉, 熊九龙(987)

2 维双树复小波不确定度加权融合的人脸识别 ..... 王仕民,叶继华,邓涛,王明文(995)

图像理解和计算机视觉

流形学习与非线性回归结合的头面部姿态估计 ..... 范进富,陈锻生(1002)

计算机图形学

角点距离矩阵和同心圆划分的曲线描述与匹配 ..... 曾接贤,刘秀朋,符祥(1011)

弹性二次曲面模型下的 3 维形状表现与平滑 ..... 郝世杰,蒋建国,郭艳蓉,詹曙(1021)

医学图像处理

主动学习的白细胞图像自动分割 ..... 崔凤,潘晨,吴向平,徐军(1029)

遥感图像处理

Bregman 交替迭代遥感图像复原方法 ..... 徐焕宇,孙权森,罗楠,夏德深(1035)

基于各向异性 Markov 随机场的遥感影像亚像元尺度建筑物提取 ..... 李晓冬,凌峰,杜耘(1042)

中国图象图形学报

刊名题字: 宋 健

月刊(1996 年创刊)

第 17 卷 第 8 期

2012 年 8 月 16 日出版

主管单位 中国科学院  
主 办 中国科学院遥感应用研究所  
中国图象图形学学会  
北京应用物理与计算数学研究所  
主 编 李小文  
编辑出版 《中国图象图形学报》编辑出版委员会  
北京 9718 信箱 邮编 100101  
电子信箱:jig@irsa.ac.cn  
电话:010-64807995 010-82614429  
网 址:www.cjig.cn  
印刷装订 北京北林印刷厂  
广告经营许可证 京朝工商广字第 0346 号  
总 发 行 北京报刊发行局  
订 购 全国各地邮局  
国外发行 中国国际图书贸易总公司  
(中国国际书店)  
(北京 399 信箱 邮编 100044)

Superintended by Chinese Academy of Sciences  
Sponsored by Institute of Remote Sensing Application,  
CAS China Society of Image and Graphics  
Institute of Applied Physics and Computational  
Mathematics  
Chief editor LI Xiaowen  
Editor, Publisher Editorial and Publishing Board  
of Journal of Image and Graphics  
(P. O. Box 9718, Beijing 100101, China)  
E-mail:jig@irsa.ac.cn  
Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers  
and Journals  
Domestic All Local Post Offices in China  
Foreign China International Book Trading Corporation  
(P. O. Box 399, Beijing 100044, China)  
Printed by Beijing Beilin Printing House

ISSN 1006-8961 CN11-3758/TB CODE ZTTFXZ 国内邮发代号: 82-831 国外发行代号: M1406 国内定价: 45.00 元

# Journal of Image and Graphics

(Monthly, Started in 1996)

Vol. 17 No. 8 August 2012

## Contents

### Review

Review for computational image aesthetics ..... Wang Weining, Yi Jingjian, He Qianhua (893)

### Image Processing and Coding

Two-dimensional Tsallis gray entropy image thresholding using chaotic particle swarm optimization or decomposition  
..... Wu Yiquan, Wu Shihua, Zhang Xiaojie (902)

Load balancing for H. 264 parallel encoding ..... Hou Xingsong, Liu Daqi, Sheng Kai, Dun Yujie (911)

Non-subsampled contourlet transform algorithm to promote detail information capturing ability ..... Guo Hong, Li Xuejun (919)

Gaussian noise level estimation in SVD domain for images ..... Liu Wei (923)

Analysis and improvement of image diffusion denoising models ..... Fu Xujia, Liu Feng, Wang Xinsong (934)

Design of minimizing embedding impact function in DWT domain and its applications in steganography  
..... Li Jun, Pan Feng, Yang Xiaoyuan, Liu Zhen (946)

### Image Analysis and Recognition

Anti-compression approach to distinguishing photographic images and photorealistic computer graphics  
..... Zhang Rong, Wang Rangding (953)

Adaptive threshold approach for night-sky cloud inspection ..... Huang Qian, Wang Shaolong, Xu Daolei, Liao Tingting (960)

Expanded order co-occurrence matrix to differentiate between coal and gangue based on interval grayscale compression  
..... Yu Guofang (966)

Semi-supervised fuzzy learning strategy by using a way of partitioning the outlier instances  
..... Song Xiaoning, Yang Jingyu, Yang Xibei (971)

Direct dual method of Chan-Vese model for multiphase segmentation  
..... Liu Cunliang, Pan Zhenkuan, Zheng Yongguo, Wang Guodong, Ding Jieyu (979)

Fast line edge feature extraction using image gradients ..... Xia Junying, Xu Xiaoquan, Xiong Jiulong (987)

Two-dimensional dual-tree complex wavelet transform uncertainty weighted fusion in face recognition  
..... Wang Shimin, Ye Jihua, Deng Tao, Wang Mingwen (995)

### Image Understanding and Computer Vision

Combining manifold learning and nonlinear regression for head pose estimation ..... Fan Jinfu, Chen Duansheng (1002)

### Computer Graphics

Representation and matching for planar curve based on corner distance matrix and concentric circles  
..... Zeng Jiexian, Liu Xiupeng, Fu Xiang (1011)

Three-dimensional shape representation and smoothing with elastic quadratic patch model  
..... Hao Shijie, Jiang Jianguo, Guo Yanrong, Zhan Shu (1021)

### Medical Image Processing

White blood cell image segmentation based on active learning ..... Cui Feng, Pan Chen, Wu Xiangping, Xu Jun (1029)

### Remote Sensing Image Processing

Bregman alternating iterative method for remote sensing image restoration ..... Xu Huanyu, Sun Quansen, Luo Nan, Xia Deshen (1035)

Building extraction at the sub-pixel scale from remotely sensed images based on anisotropic Markov random field  
..... Li Xiaodong, Ling Feng, Du Yun (1042)

中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2012)08-0923-11  
论文引用格式: 柳薇. SVD域的图像高斯噪声强度估计[J]. 中国图象图形学报, 2012, 17(8): 923-933.

## SVD域的图像高斯噪声强度估计

柳薇

华南师范大学计算机学院, 广州 510631

**摘要:** 精确估计图像或视频中的噪声强度对于后续的信号处理是至关重要的先决条件。通过对含噪图像的奇异值特性的研究, 提出一种精确的SVD域的图像噪声强度估计算法。该算法对噪声强度估计提出了创新的解决方法: 1) 利用奇异值的尾部数据进行噪声强度估计, 这样达到尽可能地降低图像信息对噪声估计的干扰; 2) 对含噪图像加入已知强度的高斯白噪声, 以计算噪声估计时需要设置的与图像内容相关的参数, 因此该算法可以自适应图像的结构, 能够广泛地适应各种类型的图片。实验结果表明SVD域噪声强度估计算法适用于各种图片类型, 而且在极大的噪声强度范围内都能够稳定精确地估计噪声强度。

**关键词:** 噪声估计; 高斯白噪声; 奇异值分解; 图像处理

### Gaussian noise level estimation in SVD domain for images

Liu Wei

Computer School, South China Normal University, Guangzhou 510631, China

**Abstract:** Accurate estimation of Gaussian noise level is of fundamental interest in a wide variety of vision and image processing applications as it is critical to the processing techniques that follow. In this paper, a new, effective noise level estimation method is proposed based on the study of singular values of noise-corrupted images. There are two major novel aspects of this work to address the major challenges in noise estimation: 1) the use of the tail of singular values for noise estimation to alleviate the influence of the signal on the data basis for the noise estimation process; 2) the addition of known noise to estimate the content-dependent parameter, so that the proposed scheme is adaptive to visual signal and therefore it enables wider application scope of the proposed scheme. The experiments results demonstrate that the proposed algorithm can reliably infer noise levels and shows robust behavior over a wide range of visual content and noise conditions, in comparison with the relevant existing methods.

**Key words:** noise estimation; Gaussian noise; singular value decomposition; image processing

## 0 引言

在图像的获取、处理和传输过程中, 噪声是不可避免的。噪声的来源包括感光片颗粒, 如扫描仪、数码相机的传感器和电路器件, 数码设备的光子探测器, 图像量化编码器以及通信信道。去噪是大多数

图像处理应用不可缺少的预处理步骤。对于去噪, 目前已有大量的研究成果。虽然通过各种各样的算法, 可以达到很理想的去噪效果, 但大多数算法都有个假设前提, 即噪声强度是预先知道的<sup>[1-3]</sup>。因此实际应用中, 需要先对噪声强度进行估计, 才可以继续进行这些去噪操作。对比图像去噪, 对噪声强度估计的研究较少。除了去噪, 需要对噪声参数进行估

收稿日期: 2012-03-29; 修回日期: 2012-05-11

基金项目: 广东省科技攻关基金项目(2009B010900027)

第一作者简介: 柳薇(1976—), 女, 讲师, 2005年于中山大学信科院获无线电物理专业博士学位, 主要研究方向为多媒体信息处理, 图像处理。E-mail: buzzingbee@163.com

计的应用还有很多,包括运动估计,超分辨率重建,3 维重建、特征提取等。目前对噪声强度进行估计已有一些研究成果<sup>[4-7]</sup>,由单幅图像进行噪声强度估计难度很大,需要区分图像的变化是图像本身的颜色、纹理、光照发生变化,还是由噪声造成。

大多数情况下,噪声可以用高斯分布来建模。例如:图像传感器的放大噪声、光子探测器在低光照情况下产生的噪声、胶片的感光颗粒造成的噪声。在图像噪声的研究中,经常用零均值的加性高斯白噪声(AWGN)来分析图像的噪声。对于含噪的 2 维图像

$$A(i, j) = A_0(i, j) + N(i, j) \quad (1)$$

式中,  $A_0(i, j)$  为原始的图像,  $N(i, j)$  为与图像信息不相关加性噪声。本文算法也是假设图像的噪声是加性高斯白噪声,即噪声幅度的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma / \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2)$$

式中,  $\sigma$  为噪声幅度标准差,  $\mu$  为噪声幅度的均值。对于零均值的高斯噪声(即,  $\mu = 0$ ),唯一待确定的噪声参数就是标准差  $\sigma$ 。

对图像噪声强度进行估计,有两个难点:一是确定使用哪些数据进行噪声强度估计,以尽可能地减小图像信号对噪声估计的影响。在估计噪声强度时要尽量避免把图像信号当成噪声;二是如何使算法自适应图像内容的差别,使算法能适用于各种类型的图片。图像千差万别,内容有简单平滑的,也有复杂多细节的。目前,噪声强度估计算法大致可以分为 3 类:基于平滑滤波处理、基于图像块,以及变化域的噪声估计。

基于平滑滤波处理的噪声估计<sup>[4,8]</sup>先将图像进行低通滤波,然后求滤波前后的图像差值。差值图像是这类算法用于估计噪声强度的数据源。算法的假设前提是平滑滤波后的图像近似于原始的不含噪声的图像,因此差值图像主要由噪声造成。对于细节信息较多,边缘结构复杂的图像,平滑滤波得到的图像和原始图像差别较大,差值图像中除了包含噪声,还包含了图像本身的高频信号。这将导致噪声强度估计偏差较大。为了降低图像本身的高频信号对噪声估计的影响,文献[8]进一步分析了图像的水平 and 垂直边缘信息,试图在差值图中剔除图像自身的边缘细节信息的影响。算法结果优于传统的滤波算法,但该算法计算量很大,而且需要设定大量的参数。

基于图像块的噪声估计<sup>[5,9]</sup>将图像分割成大量的图像块,取其中相对平滑的图像块(方差最小的

一些图像块)的方差来估计噪声方差。这类算法假设选取的图像块是原始不含噪图像对应的单一颜色的图像块,因此,这些图像块的方差完全源自于噪声。但大多数情况下,这些由于估计噪声的数据源——选取的图像块也有颜色变化,这些图像信息会影响噪声强度估计。而且,这类算法的另一个问题是,对于各种类型的图像,如何选择合适的图像块的大小,如何决定所谓的“相对平滑的图像块”。

近期,涌现了很多基于平滑滤波处理的噪声估计改进算法<sup>[8,10]</sup>以及基于图像块的噪声估计的改进算法<sup>[11-12]</sup>。总体而言,基于图像块的估计算法比较简单,但算法的有效性在很大程度上与输入图像的类型以及噪声强度相关。基于平滑滤波处理的估计在高噪声强度情况下效果理想,但算法计算量一般很大,而且需要大量的内存支持。很多文献<sup>[13-14]</sup>进一步提出了一些结合二者的折衷的算法。

变换域的噪声估计算法中,应用最广泛的是在小波变换域进行平均绝对偏差估计(MAD)<sup>[6,15]</sup>。噪声标准差  $\sigma$  为

$$\hat{\sigma}_n = \frac{\text{median}(|y_i|)}{0.6745}, \quad y_i \in \text{subband } HH \quad (3)$$

式中,  $HH$  指的是图像小波分解后得到的高频对角子带,  $y_i$  是  $HH$  子带的小波系数图像,  $\text{median}()$  是求中值运算。MAD 算法假设前提是图像  $HH$  子带的小波系数完全由噪声造成。但实际上  $HH$  子带也含有图像的细节信息,尤其是边缘细节较多的图像,因此 MAD 算法的估计结果通常偏大。为了减少图像细节信息对噪声估计的影响,一些改进算法<sup>[16]</sup>在估计噪声强度前,先估计图像信息对  $HH$  子带小波系数的贡献,减去这一部分数值,使用于噪声估计的数据源—— $HH$  子带的小波系数,更接近纯噪声的结果,然后再用 MAD 方法进行噪声强度估计。

为了解决引言部分提到的噪声估计的两个难点,克服已有工作的缺点,本文对奇异值分解域(SVD)进行噪声强度估计研究。奇异值分解目前已成功地应用于许多图像处理领域,如图像恢复、图像识别。图像进行奇异值分解后,一个重要的特性就是图像的绝大部分能量集中在前面少数奇异值上,而噪声能量则分布在所有的奇异值上(下一段详细讨论)。因此,可以利用奇异值的尾部数据作为噪声估计的数据源。因为这部分数据中包含的图像能量较少,容易分离出图像的影响和噪声的影响。

将含噪图像的奇异值分为  $S_s$  和  $S_n$  两部分,其

中  $S_s$  表示图像信息对奇异值的贡献,  $S_n$  表示噪声对奇异值的贡献。图 1 给出了不同噪声强度下, Lena 图像不同尺寸的  $S_s$  与  $S_n$  值。由图 1 可以看出图像信息对奇异值的尾部数据贡献很小 ( $S_s$  的尾部数值很小); 奇异值的尾部数据主要由噪声决定。当噪声强度比较低时, 噪声对奇异值尾部数据的贡献会

减小, 但奇异值的尾部数据还是主要由噪声强度决定。图 1 显示了用于进行噪声估计的最好的数据源是后 80% 的奇异值。因为这部分奇异值主要受噪声控制。值得注意的是, 信号对奇异值的影响主要集中于前面少数奇异值, 因此可以利用充足的数据源——多到 80% 的奇异值对噪声进行估计。

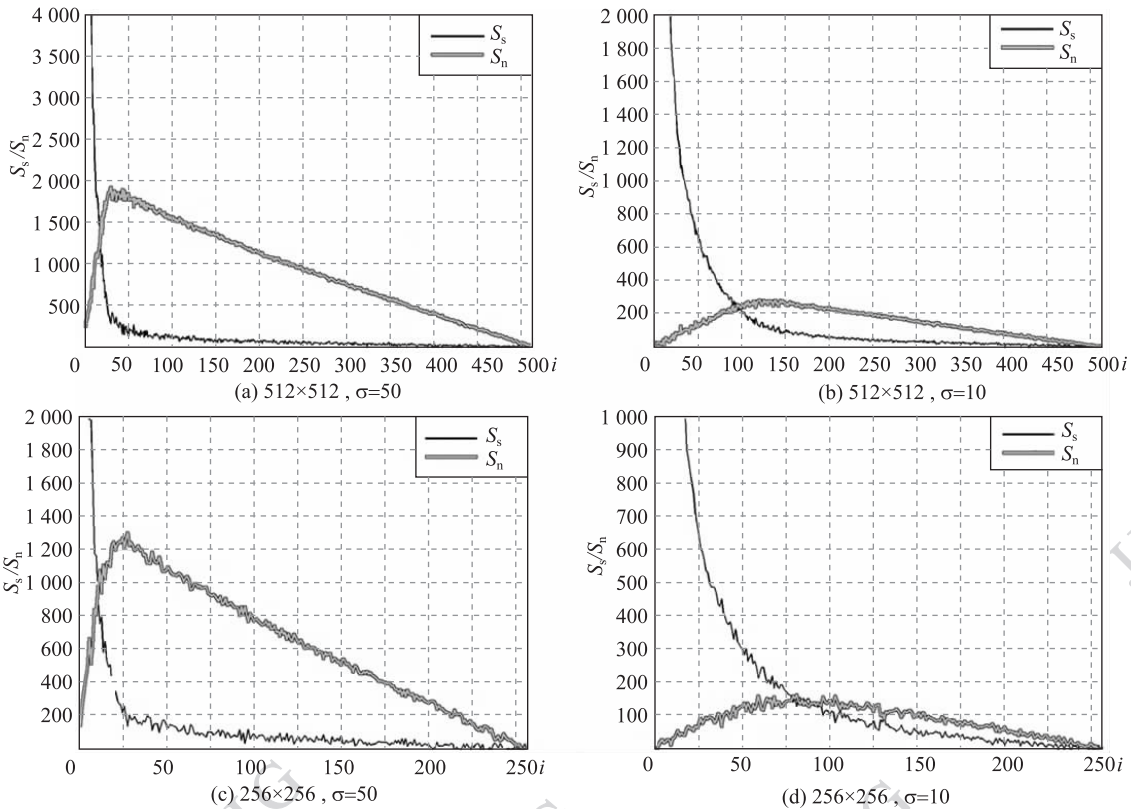


图 1 Lena 图像信号和噪声对奇异值的贡献

Fig. 1 The contribution of signal and noise in singular values(Lena)

### 1 含噪图像的奇异值特性

#### 1.1 图像的奇异值分解

奇异值分解是线性代数中一种重要的矩阵分解。假设  $A$  是一个秩为  $r$  的阶矩阵, 则  $A$  的奇异值分解表达为

$$A = U \times S \times V^T \tag{4}$$

式中,  $U$  为  $m \times m$  的方阵, 且  $U^T U = I_{mm}$ ;  $V$  为  $n \times n$  的方阵, 且  $V^T V = I_{nn}$ 。  $U$  和  $V$  称为  $A$  的奇异向量。而  $S$  是  $A$  的奇异值。  $U$  的列向量由  $AA^T$  的特征向量组成;  $V$  的列向量由  $A^T A$  的特征向量组成。而奇异值矩阵  $S$  是一个对角矩阵, 由矩阵  $AA^T$  或  $A^T A$  特征值的平方根组成, 按降序排列。用  $s_i (i = 0, 1, \dots, r)$

来表示奇异值, 且  $s_1 > s_2 > \dots > s_r$ 。用奇异向量  $U$  和  $V$  分别对原始图像  $I$  和加性噪声  $N$  进行分解, 可以得到上一节中描述的图像信息和噪声对奇异值的贡献  $S_s$  和  $S_n$ 。当图像无噪时,  $S = S_s, s(i) = s_s(i)$ ; 当图像含噪时,  $S = S_s + S_n, s(i) = s_s(i) + s_n(i)$ 。

$$S_s = U^{-1} \times A_0 \times (V^T)^{-1} = U^T \times A_0 \times V \tag{5}$$

$$S_n = U^{-1} \times N \times (V^T)^{-1} = U^T \times N \times V \tag{6}$$

图 2 给出了不同噪声强度下, 不同测试图的奇异值  $s(i)$ 。图 2(a) — (c) 是 3 幅  $512 \times 512$  的标准灰度图; 图 2(d) 是  $256 \times 256$  标准灰度图; 图 2(e) 是  $256 \times 256$  的卡通图; 图 2(f) 是  $533 \times 512$  的卡通图。由图 2 可以看出, 图像所含的噪声强度越大, 奇异值也会变得越大。这与文献 [17] 的结论一致。更加值得注意的是, 奇异值的开头部分 ( $i$  值较小的

$s(i)$  主要由图像内容决定(这部分也存在噪声的影响,但由于图像信号的很强,这一部分的噪声影响几乎可以忽略)。而奇异值的尾部数据( $i$  值较大的

$s(i)$ ) 图像信号的贡献很少,主要受噪声的影响,因此可以利用奇异值尾部数据对噪声强度进行估计,这是本文算法的基础。

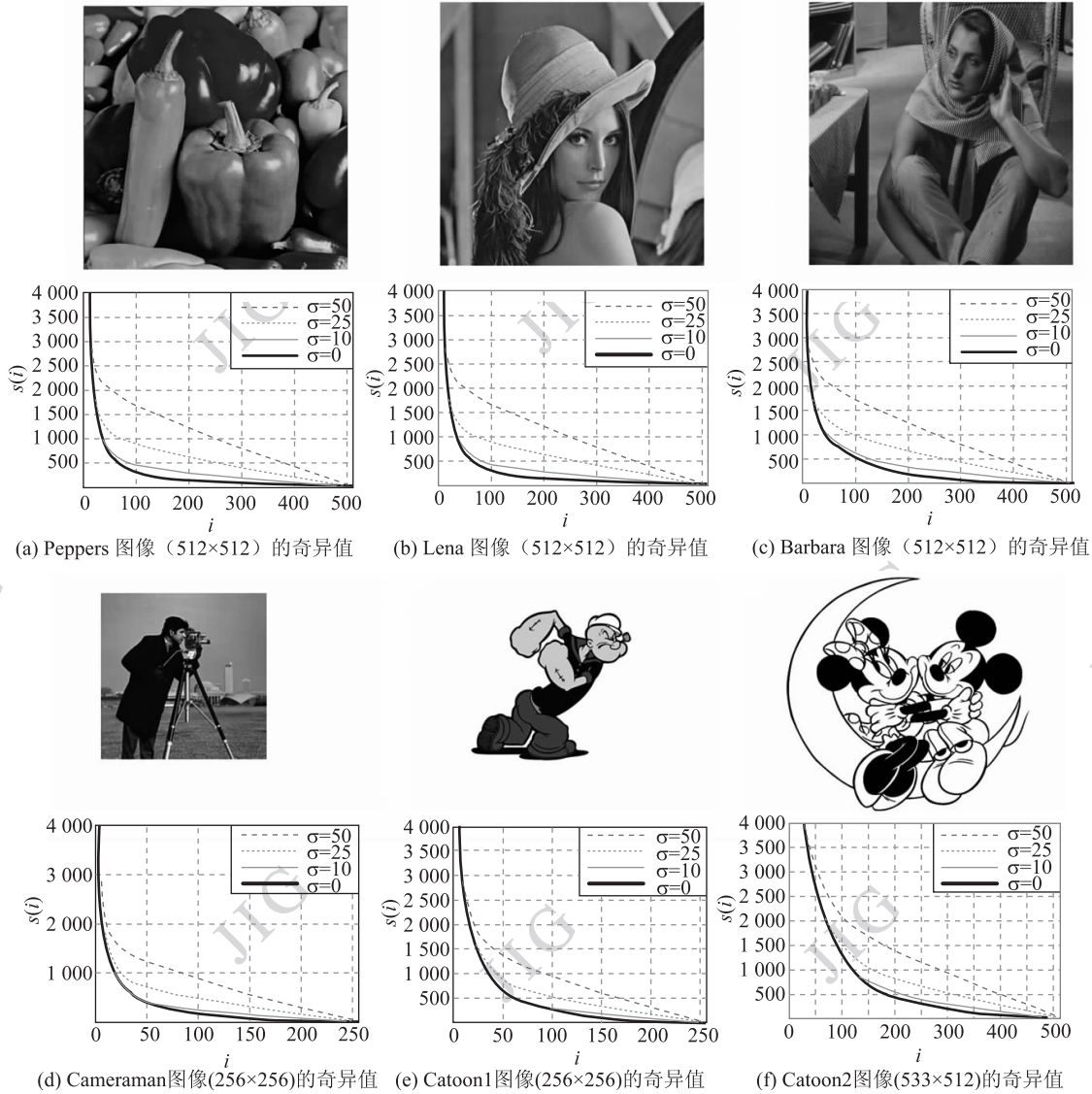


图2 测试图在不同噪声强度下的奇异值

Fig.2 Singular values of different test images with different noise levels

### 1.2 含噪图像的奇异值分析

设  $N$  为分辨率  $m \times n$  (设  $r$  为矩阵的秩)、零均值、标准差为  $\sigma$  的高斯白噪声矩阵,则  $N$  的奇异值分解可以表达为

$$N = U \times S_n \times V^T \tag{7}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^r s_n^2(i)$$

用  $M$  表示采用的尾部奇异值的个数。很明显,最后  $M$  个奇异值的平均值是噪声强度  $\sigma$  的函数,用  $P_M(\sigma)$  表示,即

$$P_M(\sigma) = \frac{1}{M} \sum_{i=r-M+1}^r s_n(i) \tag{8}$$

式中,  $1 \leq M \leq r$  当  $M=1$  时,只选用了最后一个奇异值,即最小的奇异值  $s_n(r)$ ; 当  $M=r$ , 采用了全部的奇异值,即  $s_n(1), \dots, s_n(r)$ 。

如果  $P_M$  与  $\sigma$  线性相关,则充分必要条件为

$$\begin{cases} P_M(k\sigma) = k \times P_M(\sigma) \\ P_M(\sigma + \sigma_1) = P_M(\sigma) + P_M(\sigma_1) \end{cases} \tag{9}$$

式中,  $\sigma$  是高斯白噪声  $N$  的标准差,  $\sigma_1$  是高斯白噪声  $N_1$  的标准差。

先看看式(9)的第 1 个条件。假设  $N_k$  是与噪声  $N$  分布图一致的高斯白噪声,即  $N_k = k \times N$  ( $N_k$  是噪声  $N$  的放大或缩小到  $k$  倍的版本),则  $N_k$  是标准差为  $k\sigma$  的高斯白噪声。

$$N_k = k \times N = k \times U \times S_n \times V^T = U \times kS_n \times V^T = U \times S_{nk} \times V^T \quad (10)$$

$N_k$  的奇异值为  $N$  的  $k$  倍,即

$$S_{nk} = k \times S_n \quad (11)$$

因此

$$P_M(k\sigma) = \frac{1}{M} \sum_{i=r-M+1}^r ks_n(i) = k \times P_M(\sigma) \quad (12)$$

式(12)证明了如果噪声分布图一致,式(9)的第 1 个条件是满足的。

令  $N_1 = (\sigma_1/\sigma) \times N$  是与噪声  $N$  分布图一致的高斯白噪声,则  $N_1$  的标准差为  $\sigma_1$ ,  $N_2 = N_1 + N = \frac{\sigma_1 + \sigma}{\sigma} N$  也是与是噪声  $N$  分布图一致的高斯白噪声,则  $N_2$  的标准差为  $(\sigma + \sigma_1)$ 。可以推导出等式

$$N_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma} N = \frac{\sigma_1}{\sigma} U \times S_n \times V^T = U \times \frac{\sigma_1}{\sigma} S_n \times V^T = U \times S_{n1} \times V^T$$

$$S_{n1} = \frac{\sigma_1}{\sigma} S_n \quad (13)$$

$$P_M(\sigma_1) = \frac{1}{M} \sum_{i=r-M+1}^r s_{n1}(i) = \frac{1}{M} \sum_{i=r-M+1}^r \frac{\sigma_1}{\sigma} s_n(i) \quad (14)$$

$$N_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma}{\sigma} N = \frac{\sigma_1 + \sigma}{\sigma} U \times S_n \times V^T = U \times \frac{\sigma_1 + \sigma}{\sigma} S_n \times V^T = U \times S_{n2} \times V^T \quad (15)$$

因此

$$S_{n2} = \frac{\sigma_1 + \sigma}{\sigma} S_n \quad (16)$$

$$P_M(\sigma + \sigma_1) = \frac{1}{M} \sum_{i=r-M+1}^r \frac{\sigma + \sigma_1}{\sigma} s_n(i) = \frac{1}{M} \sum_{i=r-M+1}^r s_n(i) + \frac{1}{M} \sum_{i=r-M+1}^r \frac{\sigma_1}{\sigma} s_n(i) = P_M(\sigma) + P_M(\sigma_1) \quad (17)$$

式(17)证明了如果噪声分布图一致,式(9)的第 2 个条件也是满足的。因此在噪声分布图一致的情况下  $P_M$  与噪声标准差  $\sigma$  线性相关。

在噪声分布图不一致时,即  $N_1$  与  $N$  不相关时,大量的实验证实了: $P_M$  相对于  $\sigma$  的曲线在  $M$  较小时,随机性比较大,在  $M \gg 1$  时,曲线几乎与噪声分布图一致时的  $P_M$ - $\sigma$  曲线重合。因此,当在  $M \gg 1$  时(一般取  $M \geq r/4$ ), $P_M$  与  $\sigma$  大致线性相关,即

$$P_M(\sigma) = \alpha\sigma, \quad M \gg 1 \quad (18)$$

式中,  $\alpha$  是线性函数的斜率,对于确定尺寸的图像,  $\alpha$  的数值由  $M$  的取值决定。对  $512 \times 512$  的高斯白噪声图,如果取  $M = 384$ ,即  $P_M$  为  $128^{\text{th}} \sim 512^{\text{th}}$  的奇异值的均值。根据实验得到的  $P_M$  和  $\sigma$  的数据(见表 1),可以用曲线拟合的方法求出  $\alpha = 13.87$ 。对大量  $512 \times 512$  的不同分布图的高斯白噪声进行统计,  $\alpha$  变化很小,实验结果是:  $\alpha = 13.85 \pm 0.3$ 。表 1 还给出了一些其他尺寸噪声图像的示例数据。

表 1 不同尺寸及分布图的 AWGN 的  $P_M$  与  $\sigma$  ( $M = 3r/4$ ) 关系

Table 1 Relationship of  $P_M$  and  $\sigma$  for AWGN with different image sizes of the different processes ( $M = 3r/4$ )

	$\sigma = 10$	$\sigma = 20$	$\sigma = 30$	$\sigma = 40$	$\sigma = 50$	$\alpha$
$P_M(512 \times 512)$	138.40	276.41	416.16	553.71	693.38	13.87
$P_M(256 \times 256)$	98.26	196.56	294.55	393.11	489.75	9.83
$P_M(128 \times 128)$	70.05	140.17	211.35	281.03	348.99	7.02

接下来,对各种标准灰度图和卡通图片进行实验,发现  $P_M$  与  $\sigma$  的关系变为

$$P_M = \frac{1}{M} \sum_{i=r-M+1}^r s(i) = \alpha\sigma + \beta \quad (19)$$

对比式(18)(19),可以看出  $\beta$  是与图像内容相关的参数。进一步将  $P_M$  分成  $P_{Ms}$  和  $P_{Mn}$  两部分,分别表示图像和噪声对  $P_M$  的贡献,其定义为

$$P_{Ms} = \frac{1}{M} \sum_{i=r-M+1}^r s_s(i) \quad (20)$$

$$P_{Mn} = \frac{1}{M} \sum_{i=r-M+1}^r s_n(i) \quad (21)$$

图 3 和图 4 是  $512 \times 512$  含噪 Lena 图的实验结果。图 3 中,  $M = 384$ 。可以看出 Lena 图中的加性高斯白噪声对  $P_M$  的贡献  $P_{Mn}$  与纯噪声图像的  $P_M$  数值几乎完全一样。 $P_{Ms}$  对应的曲线几乎是完全水平的直线,即  $P_{Ms}$  接近于常数。这与式(19)的描述是一致的: $P_M$  是  $\alpha\sigma$  与  $\beta$  二者之和,  $\alpha\sigma$  是加性高斯白噪声对  $P_M$  的贡献,  $\beta$  是图像结构信息对  $P_M$  的贡献。图 4 显示了不同噪声强度下,  $P_{Mn}$  与  $M$  的关系。

由图 1 也可以看出来,奇异值  $S_n$  的尾部数值根据噪声的强度而变化:当噪声强度低时,由噪声控制的“尾巴”较短;反之,噪声强度大时,噪声控制的奇异值“尾巴”就比较长。因此,确定  $M$  的取值时,要确保所选择的奇异值是噪声控制的奇异值尾部数据。为了使算法适用于各种噪声环境(尤其是低噪环境), $M$  不能太大,因为奇异值的“头部”部分主要受图像内容控制。计算  $P_M$  时不能包括这一部分数据。通过对大量各种类型的图像的实验,一般取  $M \leq \frac{4r}{5}$ 。而同时,根据 1.2 节的结论  $M$  取值不能太小。太小的  $M$  会导致用于估计噪声的数据源太少,影响估计的稳定性和精确性。结合 1.2 节的结论  $M \geq \frac{r}{4}$ ,得到  $M$  的取值范围:  $M \in [\frac{r}{4}, \frac{4r}{5}]$ 。因此  $M$  的取值并不苛刻,其取值范围很广(一般图像矩阵的秩  $r$  都很大)。

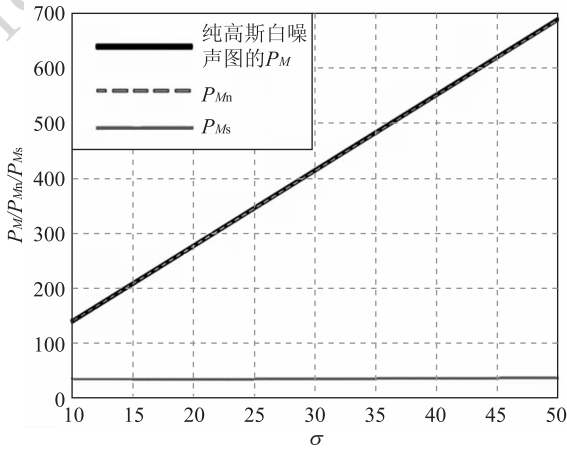


图 3 图像信号和噪声对  $P_M$  的贡献  
Fig. 3 The contribution of signal and noise to  $P_M$

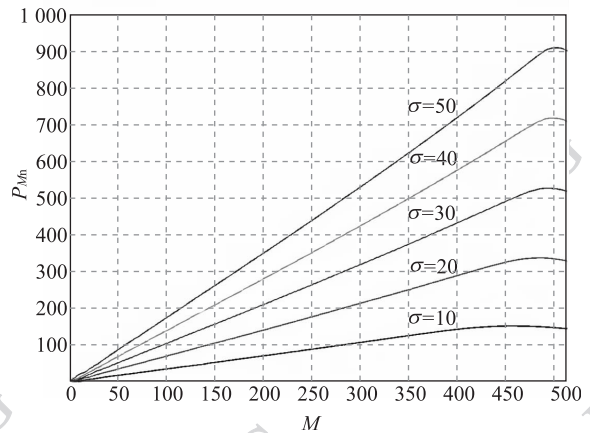


图 4  $P_M$  与  $M$  的关系  
Fig. 4 The relationship of  $P_M$  and  $M$

图 5 给出了不同尺寸图像的实验结果,实验中  $M = \frac{3r}{4}$ 。从上至下,曲线依次对应 Barbara、Peppers、Lena 和空白图的  $P_M$  数值(Lena 图和 Peppers 图对应的曲线几乎重合)。实验中,用空白图做参考,主要是为了显示在没有图像信息的影响下, $P_M$  与噪声强度的关系。图 5(b)显示的是图 2(d)(e),两幅尺寸为  $256 \times 256$  的图像的实验结果,图 5(c)是  $533 \times 512$  的卡通图(图 2(f))和参照空白图的实验结果。由图 5 可以看出,相同尺寸的图像的  $P_M$ - $\sigma$  曲线几乎是平行的直线。各种尺寸,各种类型的图像,其  $P_M$  与噪声标准差  $\sigma$  都是成一次关系。图像信息对曲线的斜率  $\alpha$  几乎没有影响,它主要影响参数  $\beta$ 。换句话说,图像信息对  $P_M$  的贡献主要体现于参数  $\beta$ 。一般来说,图像细节信息越多,参数  $\beta$  越大。由图 5(a)可以看出,测试的 3 幅  $512 \times 512$  的标准灰度图,Barbara 最复杂,其对

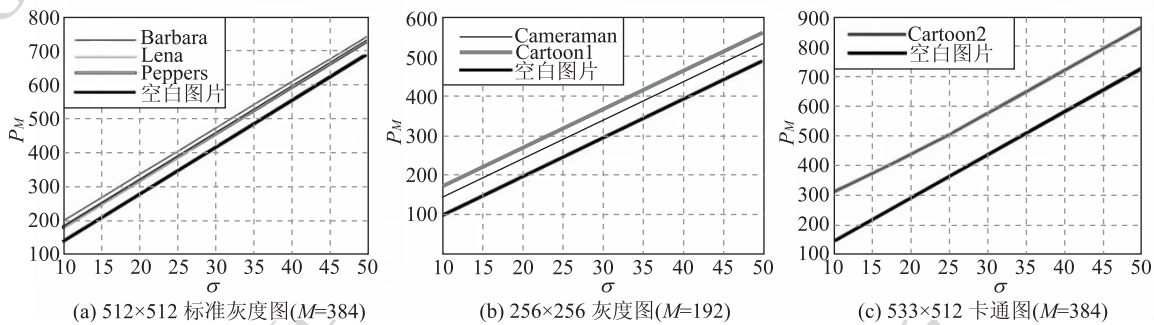


图 5  $P_M$  和  $\sigma$  的关系  
Fig. 5 The relationship of  $P_M$  and  $\sigma$

应的参数  $\beta$  也最大。

通过实验,来寻求  $M$  和  $\alpha$  的关系。图 6 显示了  $512 \times 512$  图像的实验结果。可以看出,  $\alpha$  的数值随着  $M$  的增大而增大。但  $P_M$  始终与噪声标准差  $\sigma$  成一次关系,斜率为  $\alpha$ 。正如图 6 所示,若  $M$  取值太

大(图 6(d),  $M = 480$  的情况),由于图像信息的影响,  $P_M - \sigma$  的曲线发生弯曲,  $P_M$  与  $\sigma$  不再是一次关系。反之,若  $M$  取值太小(图 6(a)(b),  $M < 128$  的情况),  $P_M$  数值会发生不稳定的波动。幸运的是,  $M$  的取值范围足够大。

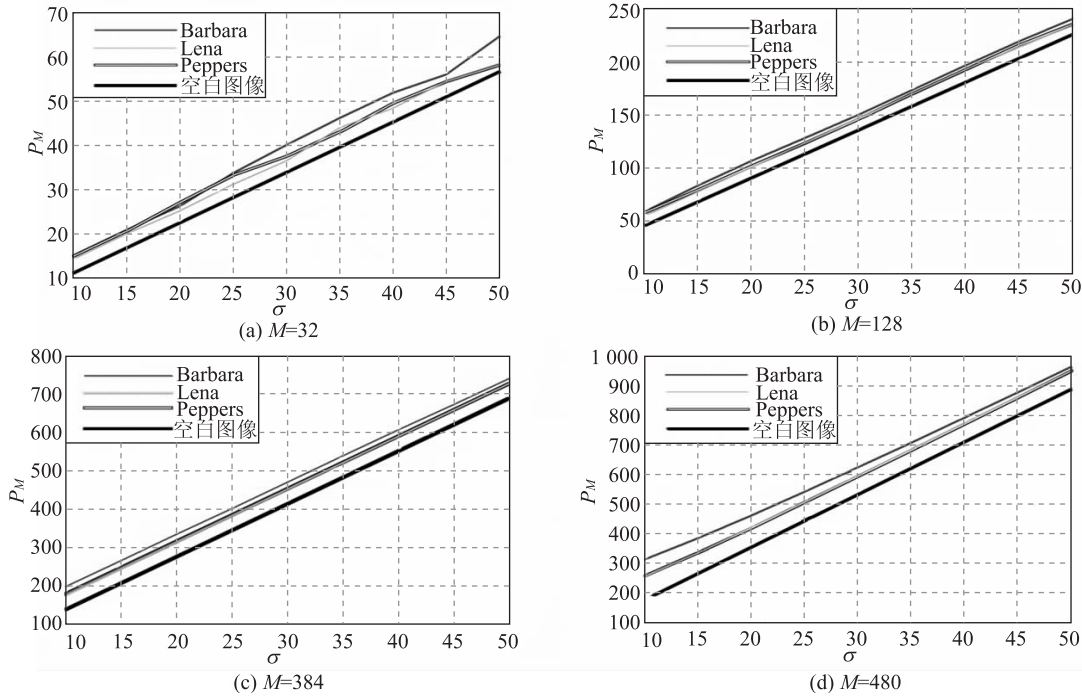


图 6  $M$  和  $\alpha$  的关系(图像尺寸  $512 \times 512$ )

Fig. 6 The relationship between  $M$  and  $\alpha$ (图像尺寸  $512 \times 512$ )

## 2 SVD 域的图像噪声强度估计算法

第 1.2 节证明了含噪图像奇异值分解后,其尾部  $M$  个奇异值的平均值(即  $P_M$ )与加性高斯白噪声的标准差(即  $\sigma$ )大致成一次关系。即  $P_M$  与  $\sigma$  满足式(19)。此结论是进行噪声估计的基础。

用式(19)来估计噪声,需要确定参数  $\alpha$  和  $\beta$ 。对于各种类型的图像,  $M$  的取值是参数  $\alpha$  的唯一决定因素;由第 1.2 节分析得出,  $\beta$  与图像的结构信息相关。不同图像对应于不同的  $\beta$  数值。为了精确求得  $\alpha$  与  $\beta$  的数值,对含噪图像再加入已知强度的高斯白噪声,根据图像  $P_M$  数值对新加入噪声的反应来确定参数  $\alpha$  与  $\beta$  的数值。

假设图像中含有加性高斯白噪声  $N$ , 噪声标准差是  $\sigma$ 。如果对含噪图像再加入强度为  $\sigma_1$  的高斯白噪声  $N_1$ , 由于  $N$  与  $N_1$  不相关,很容易证明,综合

噪声  $N_{\text{sum}}$  仍然是高斯白噪声,标准差  $\sigma_{\text{sum}} = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_1^2}$ 。

这里讨论的都是零均值的高斯白噪声,因此  $E(N) = 0, E(N_1) = 0$ , 噪声方差为

$$\sigma^2 = E[N - E(N)]^2 = E(N^2) \quad (22)$$

$$\sigma_1^2 = E[N_1 - E(N_1)]^2 = E(N_1^2) \quad (23)$$

综合噪声  $N_{\text{sum}}$  的均方差为

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{sum}}^2 &= E[(N + N_1) - E(N + N_1)]^2 = \\ &E(N^2) + E(N_1^2) + 2E(NN_1) = \\ &E(N^2) + E(N_1^2) = \\ &\sigma^2 + \sigma_1^2 \end{aligned} \quad (24)$$

注意,  $N$  与  $N_1$  不相关,因此  $E(NN_1) = E(N)E(N_1) = 0$ 。因此可以得到  $N_{\text{sum}}$  的标准差

$$\sigma_{\text{sum}} = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_1^2} \quad (25)$$

现在,通过式(19),可以得到

$$P_M = \alpha\sigma + \beta \quad (26)$$

$$P_{1M} = \alpha \sqrt{\sigma^2 + \sigma_1^2} + \beta \quad (27)$$

同理,对含噪图像再加入强度为  $\sigma_2$  的高斯白噪声  $N_2$ ,可以得到

$$P_{2M} = \alpha \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \beta \quad (28)$$

解方程组式(26)—(28),可以得到参数  $\alpha, \beta$  和噪声的估计值

$$\hat{\sigma} = \frac{\sqrt{\frac{P_{1M} - P_{2M}}{\sigma_1^2} - \frac{P_{2M} - P_M}{\sigma_2^2}}}{2 \times \frac{P_{1M} - P_M}{(P_{1M} - P_M) \sigma_1^2} - \frac{P_{1M} - P_{2M}}{\frac{P_{1M} - P_{2M}}{\sigma_1^2} - \frac{P_{2M} - P_M}{\sigma_2^2}}} \quad (29)$$

理论上而言,新加入的已知噪声  $N_1$  和  $N_2$  可以取任意强度。但实际中,  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  的取值会影响噪声估计的精度。例如,如果  $\sigma_1$  取得太小,根据式(25),综合噪声  $N_{sum}$  的标准差  $\sigma_{sum}$  将与  $\sigma$  很接近,在  $P_M-\sigma$  曲线上,  $(\sigma, P)$  与  $(\sigma_{sum}, P_{sum})$  两点靠得太近,如图 7 中的 B 点,与目标点 A 靠得太近。这将影响估计的准确性和稳定性。因此,  $\sigma_1$  应该取值较大,这样得到的综合噪声  $N_{sum}$  的标准差  $\sigma_{sum}$  将与  $\sigma$  相差较大,在  $P_M-\sigma$  曲线上,  $(\sigma, P)$  与  $(\sigma_{sum}, P_{sum})$  两点拉开距离。如图 7 中的点 C。同样,  $\sigma_2$  的取值也应该尽可能大,同时与  $\sigma_1$  的差值也要尽可能大。在接下来的实验中,取  $\sigma_1 = 25$ ,  $\sigma_2 = 50$ 。

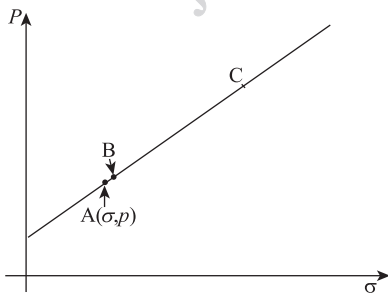


图 7  $\sigma_1$  的选择

Fig. 7. The influence of  $\sigma_1$

含噪图像  $A$  在 SVD 域的噪声估计主要包括以下步骤:

- 1) 对图像  $A$  进行奇异值分解;
- 2) 选择合适的  $M$  数值(实验中,  $M$  取值为  $3r/4$ ),计算奇异值矩阵尾部  $M$  个奇异值的平均值  $P_M$ ;

3) 对图像  $A$  加入标准差  $\sigma_1 = 25$  的零均值高斯白噪声,得到图像  $A_1$ ;

4) 对  $A_1$  进行奇异值分解;

5) 计算  $A_1$  奇异值矩阵尾部  $M$  个奇异值的平均值  $P_{1M}$ ;

6) 对图像  $A$  加入标准差  $\sigma_2 = 50$  的零均值高斯白噪声,得到图像  $A_2$ ;

7) 对  $A_2$  进行奇异值分解;

8) 计算  $A_2$  奇异值矩阵尾部  $M$  个奇异值的平均值  $P_{2M}$ ;

9) 由式(29)求出噪声标准差的估计值。

### 3 实验结果与分析

用各种类型的图片测试本文算法。实验中,主要用到的是标准灰度图和卡通图。计算  $P_M, P_{1M}$  和  $P_{2M}$  时,取的是奇异值尾部 75% (即  $M = 3r/4$ )。

表 2 给出了对图 1 中测试图的实验结果,图 1 中的测试图是不同分辨率、不同类型图像的代表。在图 1 中,图(a)—(c)是  $512 \times 512$  的标准灰度图;其中图 1(a)纹理比较简单,图像细节信息不多,而图 1(c)则相对复杂,图像包含大量的细节信息多;图 1(d)是  $256 \times 256$  的标准灰度图;图 1(e)(f)分别是分辨率为  $256 \times 256$  和  $533 \times 512$  的卡通图。当艺术家的手绘卡通图扫描输入电脑时,噪声是不可避免的,因此研究中把卡通图也考虑进来。

表 2 和表 3 是实验的统计结果:表 2 是在各种测试的噪声强度下,对每幅测试图进行 100 次实验的估计结果的均值;表 3 是相应的实验结果的方差。对每幅图、每种噪声强度的实验做 100 次,是为了检验本文的噪声估计方法是否工作稳定。实验结果表明了该方法能精确稳定地估计出卡通图和标准灰度图中的噪声强度,在 SVD 域可以很好地对高斯白噪声进行估计。

表 2 100 次实验结果的均值

Table 2 The mean  $\hat{\sigma}$  for 100 tests

图像	$\sigma = 5$	$\sigma = 10$	$\sigma = 20$	$\sigma = 30$	$\sigma = 40$	$\sigma = 50$
Peppers	5.05	10.14	20.19	30.02	39.80	50.02
Lena	5.06	9.91	19.97	30.02	39.90	50.23
Barbara	5.11	9.47	19.95	30.38	40.43	50.45
Cameraman	5.07	10.50	20.13	30.12	40.00	50.15
Cartoon1	5.10	9.43	19.29	29.69	39.62	49.69
Cartoon2	5.09	10.83	19.55	29.62	39.63	49.98

表 3 100 次实验结果的方差

Table 3 The standard deviation of  $\hat{\sigma}$  for 100 tests

图像	$\sigma=5$	$\sigma=10$	$\sigma=20$	$\sigma=30$	$\sigma=40$	$\sigma=50$
Peppers	0.14	0.15	0.29	0.44	0.58	0.67
Lena	0.17	0.17	0.30	0.41	0.52	0.64
Cameraman	0.17	0.19	0.26	0.36	0.67	0.81
Barbara	0.14	0.14	0.28	0.42	0.60	0.66
Cartoon1	0.11	0.14	0.27	0.47	0.55	0.65
Cartoon2	0.16	0.19	0.34	0.40	0.52	0.62

改变  $M$  的取值进行实验,发现只要  $M$  的取值符合前面讨论的合理取值范围,即  $M \in [r/4, 4r/5]$ , 则实验结果不受  $M$  的取值影响。表 4 是对标准灰度图 Lena ( $512 \times 512$ ), 取不同  $M$  ( $M \in [r/4, 4r/5]$ ) 的实验结果。

表 4 改变  $M$  取值得到的实验结果

Table 4 The estimation results with different  $M$

$M$	$\sigma=5$	$\sigma=10$	$\sigma=20$	$\sigma=30$	$\sigma=40$	$\sigma=50$
128	5.09	9.92	20.10	30.11	40.14	50.21
192	5.07	9.97	19.95	30.13	40.22	50.16
256	5.10	9.90	19.96	30.06	39.91	50.24
320	5.07	9.87	20.16	30.07	39.87	50.13

进一步将本文算法与 5 种现存的噪声估计方法进行比较,结果如图 8 所示。噪声估计的误差定义为  $\delta(\sigma) = \hat{\sigma} - \sigma$ 。

图 8(a)是本文算法与两种传统方法的比较结果。其中方法 A 是 Lee 和 Mastin 提出的基于图像块的经典噪声强度估计方法<sup>[5, 8]</sup>。该方法将图像划分为小的图像块,计算各图像块的标准差,取其中的最小值作为加性高斯白噪声的标准差的估计结果。这种算法很简单,但从图 8(a)可以看出,该方法在低噪环境下倾向于高估噪声;在高噪声环境下,会低估噪声强度。基于图像块的算法的估计结果受图像内容和噪声强度影响很大<sup>[18]</sup>。方法 B 是由 Olsen 提出的经典的基于平滑滤波的噪声估计方法<sup>[4]</sup>。在 Olsen 推荐的平滑滤波器中,选取其中鲁棒性最强的均值滤波器作为代表来进行对比实验。可以看出,该方法在高噪声环境下估计结果较好。但对于纹理结构复杂的图像,该方法会高估噪声强度。图 8(a)中,方法 A 和 B 的估计结果取自于文献[4]的实验数据。图 8(a)本文算

法的实验数据,源自于与文献[4]几乎完全一样的实验环境:采用同样的实验方式;9 幅测试图中,5 幅完全一致,剩下 4 幅由于无法获取,取相似的测试图。

图 8(b)是本文算法与方法 C<sup>[13]</sup> 的比较结果。方法 C 是 Shin 和 Park 于 2010 年提出的结合图像块与高斯平滑滤波的改进算法。该方法先将图像划

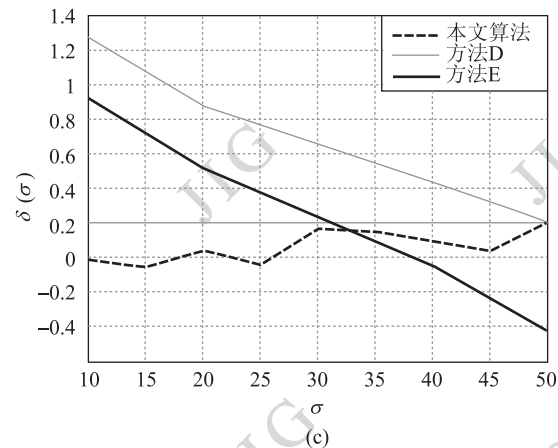
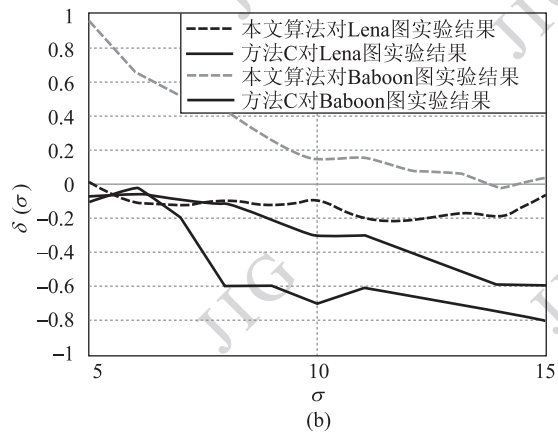
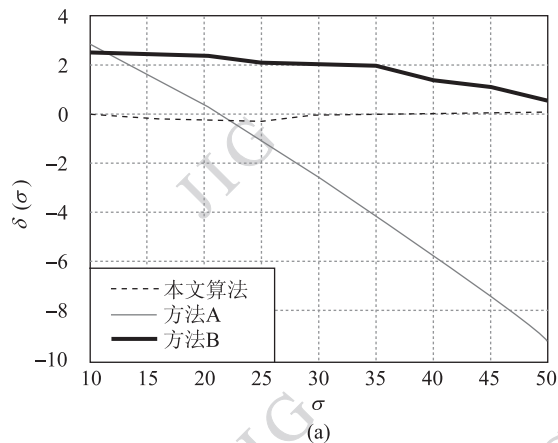


图 8 实验结果对比

Fig. 8 Performance comparison of estimation methods

分为子图像块,选取其中标准差较小的图像子块,再对这些子图像块进行高斯平滑滤波,最后通过计算滤波前后的差值来估计噪声强度。方法 C 只适用于低噪环境。因此仅在  $\sigma < 15$  的情况下比较本文算法和方法 C 的实验结果。图 8(b) 中方法 C 的实验数据直接取自于文献 [13]。当噪声强度小于 10 dB 时,大部分图像噪声算法的有效性都会降低。但方法 C 是例外。方法 C 仅在低噪环境下(噪声强度低于 15 dB)工作稳定可靠。对比方法 C,在低噪环境下,本文算法的噪声强度估计结果对细节较少的图片更为精确(见图 8(b), Lena 图的实验结果)。但图片细节较多时,本文方法略显劣势(见图 8(b), Baboon 图的实验结果)。出现这种情况的原因是:当噪声强度很低时,用来估计噪声强度的奇异值的尾部数据可能被噪声和图像信号共同控制,尤其是细节较多的图片。这将影响噪声估计的精确度。一种可能的解决方法是自适应确定奇异值尾部长度,即自适应确定  $M$  的取值,保证用来估计噪声强度的奇异值数据仅由噪声控制。当图像细节较少时,取较长的奇异值尾部数据,即  $M$  取值较大。反之, $M$  取值较小。这些将是进一步研究工作。本文将重点放在证明 SVD 估计噪声强度的有效性。

图 8(c) 是本文算法与两种小波域估计方法的比较结果。方法 D 是目前广为应用的噪声估计方法<sup>[6]</sup>,由 Donoho 和 Johnstone 提出:在小波变换的 HH 子带,应用式(3)对噪声标准差进行估计。由图 8(c) 可以看出,在高噪声环境下,该方法估计效果很好,但在低噪环境下,该方法会高估噪声强度。方法 E 是近期提出的改进的小波域噪声强度估计法<sup>[16]</sup>,与方法 D 比较,方法 E 改进了低噪环境下的估计精度。图 8(c) 中的方法 D 和 E 的实验结果取自于文献 [16]。文献 [16] 的实验中共测试了 1 200 自然景物图(包括花、草、风景,肖像、水果、建筑)。由于文献 [16] 中,作者并没有给出实验采用的具体图像,实验取类似的 1 200 幅图,得到了图 8(c) 中本文算法的实验数据。

实验结果表明本文提出的 SVD 域的加性高斯白噪声强度估计方法优于各种其他算法。而且该方法对各种类型的图像,在各种噪声强度下,都能稳定有效地工作。

## 4 结 论

提出了一种利用奇异值进行图像噪声强度估计

的算法。为了精确设置噪声估计时需要用到的与图像内容相关的参数,而不是简单用经验值,实验中再次对含噪图像加入强度已知的高斯白噪声,根据奇异值的变化来计算噪声估计公式中的参数。这样,提出的噪声强度估计算法可以自适应图像的结构变化,因而,可以应用于各种类型图片的噪声估计。实验结果表明了,无论是在低噪声还是高噪声环境下,无论是对简单平滑的图片还是细节丰富的图片,提出的算法都能够稳定有效的估计噪声强度。对比目前已有的算法,SVD 域噪声强度估计算法有更为广泛的应用范围和更为理想的估计结果。

噪声的产生是不可避免的,许多计算机视觉和图像处理算法,例如,运动估计、去噪、超分辨率重建、特征提取、三维重建,计算过程中需要已知噪声强度,因此在有噪环境下,提出的噪声估计算法可以作为这些算法的先前步骤。

为了估计噪声强度,本文的算法需要对含噪图像进行 3 次全图的 SVD 分解,这是本文算法最复杂的计算部分。对于  $m \times n$  的矩阵,SVD 的计算数量级为  $O(m \times n \times \min\{m, n\})$ 。因此,如果将图像划分为一系列图像块,基于若干图像块进行 SVD 域的噪声估计,则计算复杂度可以在保证算法精度的前提下大大降低。对图像进行分块,选择若干图像块,进行基于块的 SVD 域噪声估计,这将是进一步的工作。

## 参考文献 (References)

- [1] Wen Y, Ng M K, Huang Y. Efficient total variation minimization methods for color image restoration [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2008, 17(11): 2081-2088.
- [2] Tang Q X, Jiao L C. Image denoising with geometrical thresholds [J]. Electronics Letters, 2009, 45(8): 405-406.
- [3] Portilla J, Strela V, Wainwright M J. Image denoising using scale mixtures of Gaussians in the wavelet domain [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(11): 1338-1351.
- [4] Olsen S I. Estimation of noise in images: An evaluation [J]. CVGIP: Graphical Models and Image Processing, 1993, 55(4): 319-323.
- [5] Mastin G A. Adaptive filters for digital noise smoothing, an evaluation [J]. Compute Vision, Graphics, and Image Process, 1985, 31(1): 103-121.
- [6] Donoho D. De-noising by soft-thresholding [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41(3): 613-627.
- [7] Zhang Q, Liang D Q, Fan X. Identifying od noise types and estimating of noise level for a noisy image in the wavelet domain [J]. Journal of Infrared and Millimeter Waves, 2004, 23(4): 281-

285. [张旗,梁德群,樊鑫.基于小波域的图像噪声类型识别与估计[J].红外与毫米波学报,2004,23(4):281-285.]
- [8] Rank K, Lendl M, Unbehauen R. Estimation of image noise variance [C]//Proceedings of IEEE Vis. Image Signal Process, Lehrstuhl für Allgemeine and Theor. Elektrotech: Erlangen-Nürnberg Univ, 1999; 80-84.
- [9] Lee J S. Refined filtering of image noising using local statistics [J]. Computer Graphics and Image Process, 1981, 15(4): 380-389.
- [10] Bilcu R C, Vehvilainen M. A new method for noise estimation in images [C]//Proceedings of IEEE EURASIP International Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing. Sapporo: Hokkaidō Daigaku Graduate School of Information Science and Technology, 2005:25.
- [11] Immerkær J. Fast noise variance estimation [J]. Computer Vision and Image Understanding, 1996, 64(2): 300-302.
- [12] Amer A, Dubois E. Fast and reliable Structure-Oriented video noise estimation [J]. IEEE Trans. On Circuits and Systems for Video Technology, 2005, 15(1): 113-118.
- [13] Shin D, Park R. Block-based noise estimation using adaptive Gaussian filtering [J]. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 2005, 51(1), 218-226.
- [14] Tai S, Yang S. A fast method for image noise estimation using Laplacian operator and adaptive edge detection [C]//Proceedings of ISCCSP 2008. St. Julian's: University of Malta, 2008: 1077-1081.
- [15] Stefano A, White P, Collis W. Training methods for image noise level estimation on wavelet components [J]. EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 2004, 2004(1): 2400-2407.
- [16] Li T, Wang M. Estimating noise parameter based on the wavelet coefficients estimation of original image [C]//Proceedings of 2010 International Conference on Challenges in Environmental Science and Computer Engineering (CESCE). Wuhan: Huazhong Normal University, 2010; 126-129.
- [17] Noble B, Daniel J W. Applied Linear Algebra [M]. California, USA: Prentice Hall, 1988; 325-353.
- [18] Amer A, Mitiche A, Dubois E. Reliable and fast structure oriented video noise estimation [C]// Proceedings of IEEE Int. Conf. on Image Processing. Montreal, Quebec: Univ. du Quebec, 2002; 840-843.