

Journal of Image
and Graphics

中国图象图形学报



ISSN1006-8961
CN11-3758/TB

2012 8
Vol.17 No.

中国科学院遥感应用研究所
中国图象图形学学会主办
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

Zhongguo Tuxiang Tuxing Xuebao

2012年8月 第17卷 第8期(总第196期)

目次

综述

可计算图像美学研究进展 王伟凝, 蚁静斌, 贺前华(893)

图像处理和编码

利用混沌 PSO 或分解的 2 维 Tsallis 灰度熵阈值分割 吴一全, 吴诗嫻, 张晓杰(902)

H. 264 并行编码中负载平衡方法 侯兴松, 刘大齐, 盛凯, 赖玉洁(911)

提升细节捕捉能力的非下采样轮廓波变换 郭洪, 李雪军(919)

SVD 域的图像高斯噪声强度估计 柳薇(923)

图像扩散去噪模型的分析与改进 傅绪加, 刘峰, 王信松(934)

小波域最小嵌入失真函数设计及其在隐写中的应用 李军, 潘峰, 杨晓元, 刘镇(946)

图像分析和识别

抗压缩的照片图像与真实感计算机图形识别 张荣, 王让定(953)

云的自适应阈值检测方法 黄茜, 王少龙, 徐道磊, 廖婷婷(960)

煤矸区分中的间隔灰度压缩扩阶共生矩阵 于国防(966)

离群样本划分的半监督模糊学习策略 宋晓宁, 杨静宇, 杨习贝(971)

多相 Chan-Vese 模型的直接对偶方法 刘存良, 潘振宽, 郑永果, 王国栋, 丁洁玉(979)

利用梯度信息快速提取直线边缘特征 夏军营, 徐小泉, 熊九龙(987)

2 维双树复小波不确定度加权融合的人脸识别 王仕民,叶继华,邓涛,王明文(995)

图像理解和计算机视觉

流形学习与非线性回归结合的头部姿态估计 范进富,陈锻生(1002)

计算机图形学

角点距离矩阵和同心圆划分的曲线描述与匹配 曾接贤,刘秀朋,符祥(1011)

弹性二次曲面模型下的 3 维形状表现与平滑 郝世杰,蒋建国,郭艳蓉,詹曙(1021)

医学图像处理

主动学习的白细胞图像自动分割 崔凤,潘晨,吴向平,徐军(1029)

遥感图像处理

Bregman 交替迭代遥感图像复原方法 徐焕宇,孙权森,罗楠,夏德深(1035)

基于各向异性 Markov 随机场的遥感影像亚像元尺度建筑物提取 李晓冬,凌峰,杜耘(1042)

中国图象图形学报

刊名题字: 宋 健

月刊(1996 年创刊)

第 17 卷 第 8 期

2012 年 8 月 16 日出版

主管单位 中国科学院
主 办 中国科学院遥感应用研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所
主 编 李小文
编辑出版 《中国图象图形学报》编辑出版委员会
北京 9718 信箱 邮编 100101
电子信箱:jig@irsa.ac.cn
电话:010-64807995 010-82614429
网 址:www.cjig.cn
印刷装订 北京北林印刷厂
广告经营许可证 京朝工商广字第 0346 号
总 发 行 北京报刊发行局
订 购 全国各地邮局
国外发行 中国国际图书贸易总公司
(中国国际书店)
(北京 399 信箱 邮编 100044)

Superintended by Chinese Academy of Sciences
Sponsored by Institute of Remote Sensing Application,
CAS China Society of Image and Graphics
Institute of Applied Physics and Computational
Mathematics
Chief editor LI Xiaowen
Editor, Publisher Editorial and Publishing Board
of Journal of Image and Graphics
(P. O. Box 9718, Beijing 100101, China)
E-mail:jig@irsa.ac.cn
Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers
and Journals
Domestic All Local Post Offices in China
Foreign China International Book Trading Corporation
(P. O. Box 399, Beijing 100044, China)
Printed by Beijing Beilin Printing House

ISSN 1006-8961 CN11-3758/TB CODE ZTTFXZ 国内邮发代号: 82-831 国外发行代号: M1406 国内定价: 45.00 元

Journal of Image and Graphics

(Monthly, Started in 1996)

Vol. 17 No. 8 August 2012

Contents

Review

Review for computational image aesthetics Wang Weining, Yi Jingjian, He Qianhua (893)

Image Processing and Coding

Two-dimensional Tsallis gray entropy image thresholding using chaotic particle swarm optimization or decomposition
..... Wu Yiquan, Wu Shihua, Zhang Xiaojie (902)

Load balancing for H. 264 parallel encoding Hou Xingsong, Liu Daqi, Sheng Kai, Dun Yujie (911)

Non-subsampled contourlet transform algorithm to promote detail information capturing ability Guo Hong, Li Xuejun (919)

Gaussian noise level estimation in SVD domain for images Liu Wei (923)

Analysis and improvement of image diffusion denoising models Fu Xujia, Liu Feng, Wang Xinsong (934)

Design of minimizing embedding impact function in DWT domain and its applications in steganography
..... Li Jun, Pan Feng, Yang Xiaoyuan, Liu Zhen (946)

Image Analysis and Recognition

Anti-compression approach to distinguishing photographic images and photorealistic computer graphics
..... Zhang Rong, Wang Rangding (953)

Adaptive threshold approach for night-sky cloud inspection Huang Qian, Wang Shaolong, Xu Daolei, Liao Tingting (960)

Expanded order co-occurrence matrix to differentiate between coal and gangue based on interval grayscale compression
..... Yu Guofang (966)

Semi-supervised fuzzy learning strategy by using a way of partitioning the outlier instances
..... Song Xiaoning, Yang Jingyu, Yang Xibei (971)

Direct dual method of Chan-Vese model for multiphase segmentation
..... Liu Cunliang, Pan Zhenkuan, Zheng Yongguo, Wang Guodong, Ding Jieyu (979)

Fast line edge feature extraction using image gradients Xia Junying, Xu Xiaoquan, Xiong Jiulong (987)

Two-dimensional dual-tree complex wavelet transform uncertainty weighted fusion in face recognition
..... Wang Shimin, Ye Jihua, Deng Tao, Wang Mingwen (995)

Image Understanding and Computer Vision

Combining manifold learning and nonlinear regression for head pose estimation Fan Jinfu, Chen Duansheng (1002)

Computer Graphics

Representation and matching for planar curve based on corner distance matrix and concentric circles
..... Zeng Jiexian, Liu Xiupeng, Fu Xiang (1011)

Three-dimensional shape representation and smoothing with elastic quadratic patch model
..... Hao Shijie, Jiang Jianguo, Guo Yanrong, Zhan Shu (1021)

Medical Image Processing

White blood cell image segmentation based on active learning Cui Feng, Pan Chen, Wu Xiangping, Xu Jun (1029)

Remote Sensing Image Processing

Bregman alternating iterative method for remote sensing image restoration Xu Huanyu, Sun Quansen, Luo Nan, Xia Deshen (1035)

Building extraction at the sub-pixel scale from remotely sensed images based on anisotropic Markov random field
..... Li Xiaodong, Ling Feng, Du Yun (1042)

中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2012)08-0934-12

论文引用格式: 傅绪加, 刘峰, 王信松. 图像扩散去噪模型的分析与改进[J]. 中国图象图形学报, 2012, 17(8): 934-945.

图像扩散去噪模型的分析与改进

傅绪加¹, 刘峰², 王信松¹

1. 淮北师范大学数学科学学院, 淮北 235000; 2. 西安交通大学理学院信息科学系, 西安 710049

摘要: 总结与分析了已有图像扩散去噪模型的优缺点。在理论上明确解释了张量型扩散模型的物理意义, 通过分析 P-M 扩散模型的局部扩散行为, 提出一个新的扩散系数, 进一步给出一个改进的张量型扩散模型。从主观与客观两个方面比较各种扩散去噪模型的效果都不容易, 因为需要合适耦合各个模型的参数及数值离散方法等, 为此给出了扩散模型统一的数值实现算法, 可用来比较各个模型的去噪效果。数值模拟实验的结果表明, 改进的扩散模型在有效去除噪声的同时, 能很好地对图像中的边缘、角点、纹理等特征进行保护, 去噪后的图像有较好的视觉效果。

关键词: 扩散去噪模型; 扩散系数; 角点; 纹理

Analysis and improvement of image diffusion denoising models

Fu Xujia¹, Liu Feng², Wang Xinsong¹

1. School of Mathematical Sciences, Huaibei Normal University, Huaibei 235000, China;

2. Department of Information Science, School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China

Abstract: Advantages and disadvantages of some existing image diffusion denoising models are analyzed and summarized in this paper. In theory, the physical meaning of the tensor-typed diffusion model is interpreted. A new diffusivity is put forward through the analysis of local diffusion behavior of the P-M diffusion model, developing a new improved tensor-typed diffusion model is presented. It is not easy to compare the effects of various denoising models for the subjective and objective aspects, because this needs a coupling of parameters and numerical discretization methods of every model. A unified numerical implementation algorithm of diffusion models is given, which can be employed to compare the denoising effects of every model. The results of the numerical simulation experiments confirm that, the improved diffusion model can effectively remove image noise, and simultaneously protect edge, corners, and texture as well. Furthermore, the denoised image provides a better visual impression.

Key words: diffusion denoising model; diffusivity; corner; texture

0 引言

在数字图像的形成、量化、传输等过程中, 图像质量不可避免地产生退化, 主要表现为图像模糊、混入噪声等。为了改进图像的视觉效果或为了进一步

分析、理解图像的内容, 需要对此类图像进行恢复(如去模糊、去噪)或增强。噪声的去除与图像中有用结构特征(如边缘、纹理)的保护(或增强)是一对矛盾, 尽可能权衡好这二者之间的“度”是图像去噪处理中要解决的核心问题。已经有很多方法和技术从不同角度来处理这一矛盾, 从大的方向可以划分

收稿日期: 2011-09-26; 修回日期: 2012-03-27

基金项目: 安徽高等学校省级自然科学基金项目(KJ2011Z336); 淮北师范大学教研项目(jy10227); 陕西省自然科学基金项目(2009JM1015)

第一作者简介: 傅绪加(1978—), 男, 讲师, 2008年于西安交通大学理学院获数学专业硕士学位, 主要研究方向为数字图像处理、数值计算等。E-mail: fxjmsy@yahoo.cn

成三大类:偏微分方程类^[1-4]、小波变换类^[5-7]、统计模型类^[8]。

本文主要讨论图像扩散去噪模型,它们是基于偏微分方程(PDE)的图像处理方法,其基本思想是建立一个适当的关于时间与空间变量的 PDE 模型,把待处理的图像作为初始条件,而把 PDE 的解作为处理后的图像。在图像去噪领域,已先后出现很多扩散模型,如 W-K 扩散模型^[9-10]、P-M 扩散模型^[11]、CLMC 扩散模型^[12]、Weickert 扩散模型^[1,13]。

W-K 扩散模型实际上是将原始图像与高斯函数作卷积,在去除噪声的同时,不能对边缘、纹理等重要结构特征进行有效保护。P-M 扩散模型在扩散过程中引入了边缘保护机制,但是模型本身不是适定的。在空域内引入正则化的 P-M 扩散模型就是 CLMC 扩散模型,CLMC 扩散模型是适定的。P-M 扩散模型与 CLMC 扩散模型的扩散方式均属于边缘停止型扩散,不能有效去除边缘两侧的噪声。Weickert 扩散模型属于张量型扩散模型,边缘点处的梯度方向与切线方向在扩散过程中被利用,能有效去除边缘两侧的噪声,但是如果在图像平缓区域内含有强噪声,Weickert 扩散模型会产生一些虚假的条纹现象,它还不能很好保护图像中的角点和纹理区域。基于保护(甚至是增强)边缘、角点与纹理等特征的图像去噪算法仍值得进一步研究。

1 图像的扩散去噪模型

设含噪图像可表示为 $u^{(0)}(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x}) + n(\mathbf{x})$, 其中 $\bar{u}(\mathbf{x})$ 表示理想的不含噪图像, $n(\mathbf{x})$ 表示加性零均值高斯白噪声。去噪要考虑的就是:如何从含噪图像 $u^{(0)}(\mathbf{x})$ 中恢复出理想图像 $\bar{u}(\mathbf{x})$ 。在文献[1,13]中,Weickert 给出了扩散去噪模型的一般形式,即

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = \text{div}(\mathbf{D}\nabla u), \\ (t, \mathbf{x}) \in (0, +\infty) \times \Omega \\ \langle \mathbf{D}\nabla u, \mathbf{n} \rangle = 0 \\ u(0, \mathbf{x}) = u^{(0)}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1)$$

式中,矩阵 \mathbf{D} 称为扩散张量或扩散矩阵, ∇u 表示图像梯度, $\mathbf{D}\nabla u$ 可视为由图像亮度值差引发的数值扩散流, \mathbf{n} 是 $\partial((0, +\infty) \times \Omega)$ 上的单位外法向量, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积运算, $\Omega = [0, 1]^2 \subset \mathbf{R}^2$ 为 $u^{(0)}(\mathbf{x})$ 的定义域。在图像扩散去噪模型中,关键是选取合

适的扩散矩阵 \mathbf{D} ,使得在扩散去噪过程中能有效保护图像中的边缘、角点与纹理区域,本文采用文献[1,4]中的术语。

1.1 W-K 扩散模型

Witkin 等人观察到以 $u^{(0)}(\mathbf{x})$ 为初始值的扩散过程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = \Delta u(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{x}) \in (0, +\infty) \times \mathbf{R}^2 \\ u(0, \mathbf{x}) = u^{(0)}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2)$$

等价于把初始图像 $u^{(0)}(\mathbf{x})$ 与(方差递增的)高斯函数作卷积^[10-11]:

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^2} G_{\sqrt{t}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u^{(0)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = (G_{\sqrt{t}} * u^{(0)}) (\mathbf{x}) \quad (3)$$

式中, $G_{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2}\right)$, σ 与 t 之间的关系为 $\sigma = \sqrt{2t}$ 。

称式(2)为 W-K 扩散模型,这相当于在式(1)中取 $\mathbf{D} = \mathbf{I}$, \mathbf{I} 为二阶单位矩阵。W-K 扩散模型是线性各向同性扩散模型,在理论上是适定的^[4]。

对式(3)两边关于空间变量 \mathbf{x} 作傅里叶变换 F , 由傅里叶变换的性质得

$$F[u(t, \cdot)](\boldsymbol{\omega}) = \exp\left(\frac{-\|\boldsymbol{\omega}\|^2}{2\sigma^2}\right) \cdot F[u^{(0)}](\boldsymbol{\omega}) \quad (4)$$

可见 W-K 扩散模型相当于对原始图像作低通滤波,有很强的去噪能力,但是它不能很好保留属于原图像高频率域中的重要结构细节,如边缘、纹理等。因为当 t 很大时,由 σ 与 t 之间的关系及式(4)可知,W-K 扩散模型能很好抑制高频信息,表现为严重模糊与丢失图像中的边缘、纹理等特征,去噪后的图像 $u(t, \mathbf{x})$ 很模糊。

1.2 P-M 扩散模型

降低边缘点处的扩散速度可缓解 W-K 扩散模型模糊边缘与角点等缺点。如在式(1)中取 $\mathbf{D}\nabla u = g(\|\nabla u\|, K) \nabla u$ 时,就是 Perona 和 Malik^[11] 提出的扩散模型,称之为 P-M 扩散模型,其中单调不减函数 $g(\cdot, K)$ 称为扩散系数,满足 $\lim_{s \rightarrow 0} g(s, K) = 1$, $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s, K) = 0$, $s = \|\nabla u\|$ 表示图像梯度模, K 是正的阈值参数。在边缘点处, $s = \|\nabla u\|$ 的值较大,从而扩散系数的值 $g(s, K)$ 较小,接近于 0 或等于 0;相反,在图像平坦区域内部, $g(s, K)$ 的值接近 1 或

等于 1。

扩散系数 $g(\cdot, K)$ 与阈值 K 的选择非常重要, 例如在文献[11]中取为

$$g_1(s, K) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{c_1 K}\right)^2}$$

$$g_2(s, K) = \exp\left(\frac{-s^2}{c_2 K^2}\right)$$
(5)

在文献[1]中取为

$$g_3(s, K) = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ 1 - \exp\left(\frac{-c_3}{\left(\frac{s}{K}\right)^4}\right) & s > 0 \end{cases}$$
(6)

提出一个新的扩散系数

$$g_4(s, K) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi s}{c_4 K} + 1 \right] & 0 \leq s \leq c_4 K \\ 0 & s > c_4 K \end{cases}$$
(7)

式中, $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 2.3367, c_4 = 2.4046$ 。扩散系数性质及常数选择原理在第 2 节中讨论。

梯度模 $\|\nabla u\|$ 的值极易受噪声的影响, 因为具有较大梯度模值的像素点可能是边缘点、角点或噪声点。另外, 如果采用式(5)中的扩散系数, P-M 扩散模型在理论上不适定, 即其解可能不唯一, 或对于初始值不具有连续依赖性^[4,14]。在实践中不适定性主要表现为: 可能保留甚至“放大”平坦区域内的强噪声点, 也可能将较宽的斜坡型边缘演变成几个阶跃型边缘, 即产生“阶梯现象”^[15-16]。为克服 P-M 扩散模型的不适定性, 近年来, 利用正则化技巧已提出很多改进模型^[1]。例如 CLMC 扩散模型^[12]、小波扩散模型^[17-18]均属于在空间域中引入正则化的改进模型。

1.3 CLMC 扩散模型

Catté 等人把 P-M 扩散模型中的 $g(\|\nabla u\|)$ 换成 $g(\|\nabla u_\sigma\|)$, 从而得到 CLMC 扩散模型^[12], 其中 $\nabla u_\sigma = \nabla(G_\sigma(x) * u) = G_\sigma \otimes \nabla u$, $G_\sigma(x)$ 为高斯核函数, \otimes 表示函数与向量函数各分量卷积。显然, 当 $\sigma \rightarrow 0$ 时, CLMC 扩散模型就是 P-M 扩散模型。当 $\sigma > 0$ 时, CLMC 扩散模型中的扩散系数通过在空间域中引入正则化项, 不仅克服了 P-M 扩散模型中梯度易受噪声影响的缺点, 而且是适定的^[12]。但是在 $g(\|\nabla u_\sigma\|)$ 中引入了模糊边缘的因素, 这与精确估计边缘的目标相矛盾, 故在实际运用中, σ 的

选择也很关键。在具体计算时, 若采用显式差分离散格式, 相对于 P-M 扩散模型, CLMC 模型增加了计算量。合适选取阈值 K, σ 及扩散停止时间, CLMC 扩散模型去噪效果很好。

1.4 张量型扩散模型的物理意义与 Weickert 扩散模型

P-M 扩散模型、CLMC 扩散模型都具有局部自适应特点, 在图像平缓区域内作较快速扩散, 以达到去噪的目的, 在强边缘处降低扩散速度, 以达到保护(甚至是增强)边缘的目的。这两个模型实际上都属于边缘停止型扩散, 它们都不能有效去除边缘两侧的噪声。如果能利用图像在边缘点处的梯度方向 $N = \frac{1}{\|\nabla u\|} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ 与切线方向 $T = \frac{1}{\|\nabla u\|} \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$ 等信息, 构造出合适的扩散张量 D 并代入式(1), 则在扩散时就能更有效地控制扩散方向与扩散速度。扩散张量可通过修改结构张量的特征值得到。

结构张量 $J_\rho(\nabla u_\sigma)$ 可如此得到: 首先将图像 $u(x)$ 与高斯核 $G_\sigma(x)$ 作卷积, 得到 $u_\sigma(x) = (G_\sigma * u)(x)$, 这在一定程度上可以对噪声起到抑制; 然后, 用高斯核函数 $G_\rho(x)$ 与 $\nabla u_\sigma \nabla u_\sigma^T$ 各项作卷积可综合图像局部邻域信息, 局部邻域的大小可用参数 ρ 控制, 即

$$J_\rho(\nabla u_\sigma) = G_\rho \otimes (\nabla u_\sigma \nabla u_\sigma^T)$$
(8)

易见, $J_\rho(\nabla u_\sigma) = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix}$ 在 $\nabla u_\sigma \neq 0$ 处为对称正定的矩阵, 有两个特征值

$$\mu_1 = \frac{1}{2} [j_{11} + j_{22} + \sqrt{\Delta}]$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2} [j_{11} + j_{22} - \sqrt{\Delta}]$$

式中, $\Delta = (j_{11} - j_{22})^2 + 4j_{12}^2$ 。记 $J_\rho(\nabla u_\sigma)$ 相应于 μ_1, μ_2 的单位正交特征向量为 v_1, v_2 , 若记 $\theta = \arctan \frac{j_{22} - j_{11} + \sqrt{\Delta}}{2j_{12}}$, 则 $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 且 v_1, v_2 可分别表示为

$$v_1 = [\cos \theta, \sin \theta]^T$$

$$v_2 = [\cos \omega, \sin \omega]^T = [-\sin \theta, \cos \theta]^T$$

式中, θ 表示 v_1 与 x 轴正向的夹角, $\omega = \theta + \frac{\pi}{2}$, 并有分解式 $J_\rho(\nabla u_\sigma) = \sum_{k=1}^2 \mu_k v_k v_k^T$ 。结构张量的特征向量 v_1, v_2 分别近似平行于梯度方向 N (图像灰度

变化最快方向)、边缘切线方向 T (图像灰度变化最慢方向), 近似程度由参数 σ 、 ρ 共同决定。进一步, 特征值 μ_1 、 μ_2 的相对大小刻划了图像局部结构的类型: 平缓区域内部 $\Leftrightarrow \mu_1 \approx \mu_2 \approx 0$; 线性边缘点处 $\Leftrightarrow \mu_1 \gg \mu_2 \approx 0$; 角点处 $\Leftrightarrow \mu_1 \approx \mu_2 \gg 0$; 值 $\mu_1 + \mu_2$ 的大小度量了图像局部变化程度的大小, 而值 $\mu_1 - \mu_2$ 的大小度量了图像局部相干程度的大小。特别地, 当 $\rho = 0$ 且 $\sigma = 0$ 时, 结构张量即为 $\nabla u \nabla u^T = \begin{bmatrix} u_x^2 & u_x u_y \\ u_y u_x & u_y^2 \end{bmatrix}$, 此时有 $\mathbf{v}_1 \parallel N$ 、 $\mathbf{v}_2 \parallel T$ 、 $\mu_1 = \|\nabla u\|^2$ 、 $\mu_2 = 0$ 。

扩散张量 $D(J_\rho(\nabla u_\sigma))$ 是通过修改结构张量 $J_\rho(\nabla u_\sigma)$ 中特征值 μ_1 、 μ_2 的值而得到的, 即取 $D(J_\rho(\nabla u_\sigma)) = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T$, 其中 λ_1 、 λ_2 为扩散张量的特征值。

定理 1 设 $u(t, x) \in C^1$, 若记扩散张量 $D(J_\rho(\nabla u_\sigma)) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, 则有关系式

$$a = \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta$$

$$b = (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \theta \cos \theta$$

$$c = \lambda_2 \cos^2 \theta + \lambda_1 \sin^2 \theta$$

证明 由分解式 $D(J_\rho(\nabla u_\sigma)) = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^T$

可知结论成立。证毕。

定理 2 设 $u(t, x) \in C^2$, 式(1)中模型的扩散张量 $D = D(t, x)$ 是如上述构造的二阶对称矩阵, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1(t, x)$ 、 $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2(t, x)$ 是其标准正交的特征向量, $\lambda_1 = \lambda_1(t, x)$ 、 $\lambda_2 = \lambda_2(t, x)$ 为相应的特征值, 则在时刻 t , 此模型相当于对图像 u 在像素点 x 处沿方向 \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 作 1 维定向 P-M 扩散, 且分别以 λ_1 、 λ_2 作为相应的扩散系数。

证明 在点 (t, x) 处用 $\mathbf{v}_1 = [\cos \theta, \sin \theta]^T$, $\mathbf{v}_2 = [-\sin \theta, \cos \theta]^T$ 表示结构张量 D 的单位正交特征向量, 相应的特征值为 λ_1 、 λ_2 。直接计算有, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_k} = \mathbf{v}_k^T \nabla u$, 从而有 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_k} \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \nabla u, k=1, 2$,

两式相加得 $\nabla u = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_k} \mathbf{v}_k$; 又 $D = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T$, 故 $D \nabla u = \left(\sum_{k=1}^2 \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \right) \left(\sum_{k=1}^2 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_k} \mathbf{v}_k \right) = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_k} \mathbf{v}_k$,

再由散度性质得:

$$\operatorname{div}(D \nabla u) = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_k} \left(\lambda_k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_k} \right) \quad (9)$$

式中, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1}$ 、 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2}$ 分别表示沿方向 \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 的一阶方向导数, 结论成立。证毕。

定理 2 明确解释了张量型扩散模型式(1)的物理意义。在扩散过程中, 考虑到图像局部沿特定方向的扩散速度, 扩散张量 D 的两个特征向量应当取 $J_\rho(\nabla u_\sigma)$ 的两个特征向量 \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 , 而对应的特征值 λ_1 、 λ_2 的选择取决于对图像处理的预期目标, 从而可构造出合适的扩散张量。例如, 预期在去噪的同时实现边缘增强, Weickert^[1]取

$$\lambda_1 = g(\sqrt{\mu_1 + \mu_2}, K), \lambda_2 \equiv 1 \quad (10)$$

构造扩散张量 $D(J_\rho(\nabla u_\sigma)) = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T$, 将此扩散张量代入式(1)后便得到一个张量型扩散模型, 本文称之为 Weickert 扩散模型, 其中 $g(\cdot, K)$ 为单调不增函数, Weickert 取式(6)。

在图像平缓区域内, 由于 $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx 1$, Weickert 扩散模型能快速扩散而实现去噪; 在图像边缘处, 由于 $\lambda_1 \ll \lambda_2 = 1$, Weickert 扩散模型能沿边缘方向快速扩散, 而沿边缘垂直方向低速扩散, 从而实现沿边缘两侧去噪, 边缘也能在视觉效果上被感知增强。Weickert 扩散模型式(1)(6)(10)在最优耦合参数 ρ, σ, K 及扩散停止时间 T 后, 去噪效果很好, 但最优耦合参数并不容易。特别值得注意的是, 若在图像平缓区域内含有强噪声, Weickert 扩散模型会产生虚假的条纹现象, 它还不能很好保护图像中的角点与纹理等特征^[1]。为了克服这两个缺点, 下文给出改进的张量型扩散模型。

2 改进的张量型扩散去噪模型

2.1 扩散系数与阈值 K 的性质与选择

在给出改进扩散模型之前, 首先解释新的扩散系数即式(7)的性质, 以及其中常数 c_4 的选择原理, 为此分析 P-M 扩散模型的局部扩散方式。记图像边缘点处梯度方向为 N , 边缘处的切线方向 T , 二者相互垂直。对于 P-M 扩散模型有分解式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(\|\nabla u\|, K) \nabla u) = g(s, K) u_{TT} + \phi'(s) u_{NN} \quad (11)$$

式中, $s = \|\nabla u\|$, $\phi(s) = sg(s, K)$ 为流函数, 而 u_{NN} 、 u_{TT} 分别表示 u 沿 N, T 方向的二阶方向导数。由式(11)可以看出, 在扩散过程中, 如果沿着方向 T , N 作前向型扩散(灰度值从高向低流动), 即 u_{NN}, u_{TT} 前的系数函数取正值时, 则有利于去除噪声或小尺度波动; 如果沿着方向 N 作后向型扩散(灰度值从低向高流动), 即 u_{NN} 前的系数函数取负值时, 则有利于增强边缘特征。

对于式(5)–(7)中扩散系数 $g_i(s, K)$, 其中常数 c_i 的取值是使得 $s = K$ 时流函数 $\phi_i(s)$ 均取最大值, 即均使得 $\phi'_i(K) = 0$, 即这四个扩散系数相应的流函数 $\phi_i(s) = sg_i(s, K)$ 在 $s = K$ 时均取得最大值, 如图 1 所示。为了更好地比较各个扩散系数的特点, 各个扩散系数均相对于 g_1 在幅度上也作规一化, 即各乘以适当的常数 A_i , 使得规一化后相应的流函数 $\phi_i(s)$ 在 $s = K$ 时取得相同的值。如图 1(d) 所示, $\phi'_i(s)$ 可正可负可为零, 即有: $s < K$ 时, $\phi'_i(s) > 0$;

$s = K$ 时, $\phi'_i(s) = 0$; $s > K$ 时, $\phi'_i(s) < 0$ 。这导致 P-M 扩散模型有潜在的不适定性。由于其中 $g(\cdot, K)$ 非负单调不减, 模型在平滑平缓区域($\|\nabla u\| \ll K$) 内噪声的同时, 对强边缘($\|\nabla u\| > K$) 还可以起到“增强作用”^[11] (实际上, 在边缘点局部邻域内, 潜在的后向型扩散只是增大了边缘点处沿梯度方向的对比度, 而在视觉上感知边缘被增强, 整幅图像梯度模的最大值并没有被增大)。注意到 P-M 扩散模型中的扩散系数 $g(\cdot, K)$ 非负, 图像整体的扩散行为是一个前向型的(灰度值从高向低流动), 如果扩散时间足够长, 最终的图像为常值图像或为分块常值图像。

由于实际图像灰度值取值范围的有限性, 从而 $s = \|\nabla u\|$ 的取值范围也是有限的, 故对于式(5)(6)中的扩散系数, $g(\|\nabla u\|, K)$ 在 $\|\nabla u\| \gg K$ 的边缘点处取接近于零的正值, 如图 1(c), 这使得图像的灰度值始终从高值向低值扩散, 降低了边缘点处图像

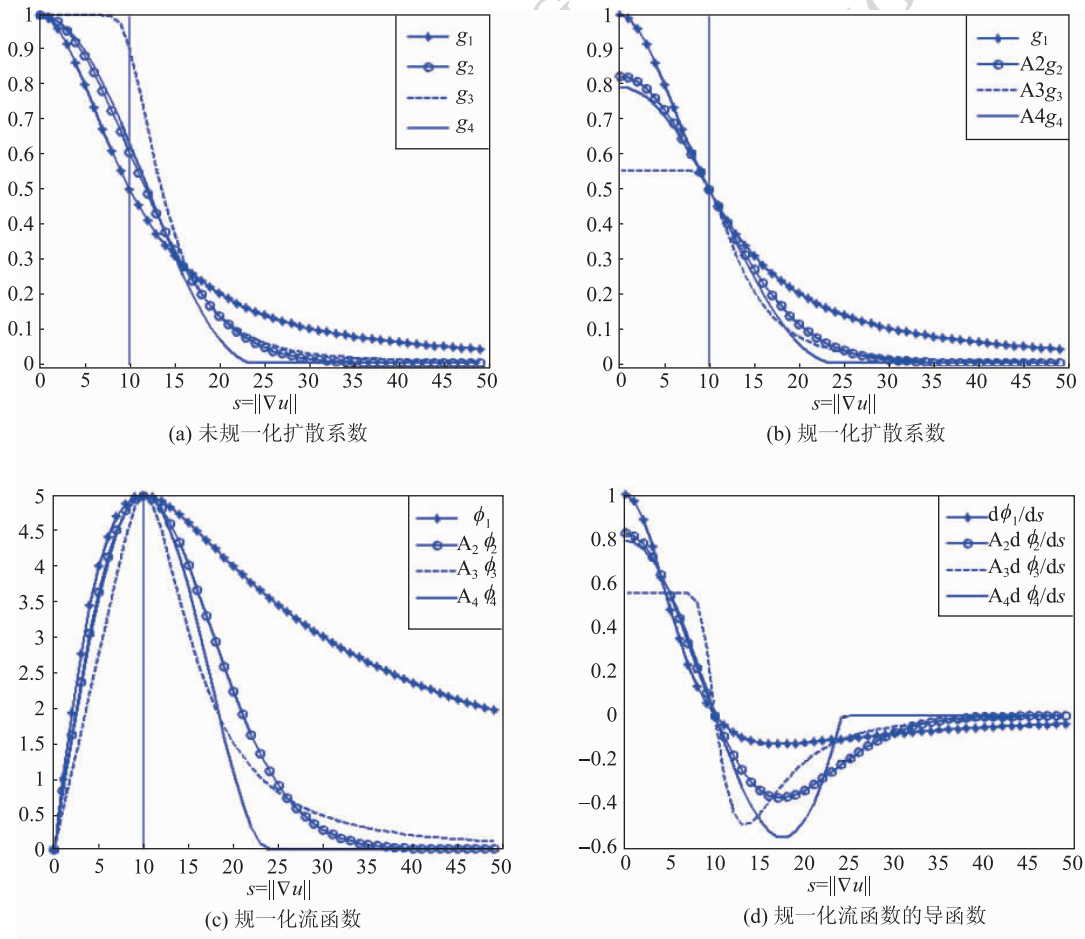


图 1 扩散系数及其相应的流函数

Fig. 1 Diffusivities and corresponding flux functions

的灰度对比度,使得图像变模糊。基于这个考虑,本文提出式(7)中的扩散系数 g_4 。当 $\|\nabla u\| > c_4 K$ 时, $g_4(\|\nabla u\|) = 0$,即此时扩散速度为零,这有利于保护图像中 $\|\nabla u\| > c_4 K$ 时的强边缘点或角点。另外,如图 1(d)所示,当 $s \in (1.5K, 2.2K)$ 时, $\phi'_i(s)$ ($i=1, 2, 3, 4$)均取负值,但 $\phi'_4(s)$ 值最小,结合(11)式中 u_{NN} 项的系数可见,扩散系数 g_4 更有助于锐化 $\|\nabla u\| \in (1.5K, 2.2K)$ 时的强边缘。

从式(11)及上述关于 $\phi'_i(s)$ 取值的分析过程可知,阈值 K 正是要滤除的边缘幅度与要保留(或增强)的边缘幅度的分界点。阈值 K 的选择对于扩散模型的去噪效果也至关重要:对同一个扩散系数,大阈值 K 有利于去除噪声但也不利于保护图像中的细节特征;小阈值 K 有利于保护图像中的角点、纹理等细节但不利于去除噪声,而且更容易产生“阶梯现象”。对于自然场景的图像,文献[11]中取 K 为图像梯度幅度累积直方图约 90% 处的值,而在文献[19]中,取

$$K = 1.4826 \text{median}_u[\|\nabla u\| - \text{median}_u(\|\nabla u\|)] \quad (12)$$

式中, $\text{median}_u[\cdot]$ 表示对整幅图像 u 关于变量 $[\cdot]$ 求中值。阈值 K 的最佳选择不仅要考虑到噪声的强度,而且应该具有局部自适应性,但这需要大的计算量作为代价。据作者所知,阈值 K 的最优选择仍是一个未解的难题。本文数值实验中,如不作特殊强调时, K (见数值实现算法) 取为实验时所加噪声的标准差,这与由式(12)计算含噪图像所得的值接近。关于扩散系数进一步的性质与阈值 K 的最优选择,将另文研究。

2.2 改进的扩散模型

由于结构张量 $J_\rho(\nabla u_\sigma)$ 特征值 μ_1, μ_2 的相对大小可刻划图像局部结构的特点,记

$$r = \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2}, 1 - r = \frac{4\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2}$$

则 $r \in [0, 1], 1 - r \in [0, 1]$ 。在线性边缘点处有: $r \approx 1, 1 - r \approx 0$; 在平缓区域内或角点处, 因为有 $\mu_1 \approx \mu_2$, 故有: $r \approx 0, 1 - r \approx 1$; 而在纹理区域内: r 与 $1 - r$ 的值均介于 0 与 1 之间。由此可见, $(1 - r) \sqrt{\mu_1 + \mu_2}$ 的值可以刻划平缓区域或角点处的灰度变化强度,在纹理区域内,此值也较大。

由定理 2 可知,要保护纹理区域与角点,只要降低或停止其相应的扩散速度就可以,这只要在

Weickert 扩散模型式(1)(6)(10)中将 λ_1, λ_2 的定义式改成

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= g(\sqrt{\mu_1 + \mu_2}, K) \\ \lambda_2 &= g((1 - r) \sqrt{\mu_1 + \mu_2}, K) \end{aligned} \quad (13)$$

式中, $g(\cdot, K)$ 为形如式(5)–(7)中的单调不增函数。

由式(7)(13)可知,在角点处, λ_1, λ_2 的值均充分小甚至为 0,故改进的扩散模型式(1)(7)(13)能有效降低角点处的扩散速度,从而达到保护角点的目的(这里的式(7)也可以换成式(5)或式(6),但采用式(7)的改进模型更能有效降低角点处的扩散速度)。基于同样的理由,在纹理区域有 $0 < 1 - r < 1$, 从而有: $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$, 故改进的扩散模型比 Weickert 扩散模型更能有效保护图像中的纹理区域。

另外,在平缓区域内强噪声点处,结构张量 $J_\rho(\nabla u_\sigma)$ 的特征值近似相等,对于改进的扩散模型来说有 $\lambda_1 \approx \lambda_2$, 从而在强噪声点邻域内近似作 W-K 扩散,有利于去除噪声点;而在 Weickert 扩散模型中,由于 $\lambda_2 \equiv 1 > \lambda_1$, 即沿着特征方向 \mathbf{v}_2 的扩散速度大于沿着特征方向 \mathbf{v}_1 的,从而易产生虚假的条纹现象,这在文献[1]中并没有被合理解释。上述分析表明,本文改进的扩散模型比 Weickert 扩散模型更能有效保护角点与纹理区域,且能有效避免虚假条纹的产生。

2.3 扩散模型数值实现的算法

扩散模型的去噪效果,不仅与模型本身固有的属性有关,而且与其数值实现的离散逼近方法有关,不同的数值实现方法对模型的逼近能力不同,效果也不相同^[20]。

若记扩散张量为 $D(J_\rho(\nabla u_\sigma)) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \text{div}(D \nabla u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ &\frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

用 $u^{(n)}$ 表示 $t = n\tau$ 时的图像, 而用 $u_{i,j}^{(n)}$ 表示 $t = n\tau$ 时图像在像素点 (i, j) 处的灰度值, 采用有限差分方法(推导过程见附录), 对式(14)作数值离散, 可得

$$u_{i,j}^{(n+1)} = u_{i,j}^{(n)} + \tau \sum_{p=-1}^{+1} \sum_{q=-1}^{+1} h_{i+p,j+q}^{(n)} u_{i+p,j+q}^{(n)} \quad (15)$$

式中, $h_{i+p,j+q}^{(n)}$ ($p, q = 0, \pm 1$) 的取值见附录。简单计

算知 $\sum_{p=-1}^{+1} \sum_{q=-1}^{+1} h_{i+p,j+q}^{(n)} = 0$, 而式(15)又可改写成

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \sum_{p=-1}^{+1} \sum_{q=-1}^{+1} l_{i+p,j+q}^{(n)} u_{i+p,j+q}^{(n)} \quad (16)$$

$$l_{i+p,j+q}^{(n)} = \delta_{i+p,j+q}^{(n)} + \tau h_{i+p,j+q}^{(n)} \quad (17)$$

$p, q = 0, \pm 1$

其中当且仅当 $p = q = 0$ 时 $\delta_{i+p,j+q}^{(n)} = 1$, 否则取 $\delta_{i+p,j+q}^{(n)} = 0$ 。

由关系式(17)及 $a, c \in [0, 1]$, $|b| \in [0, 0.5]$ (见算法的步骤 4)) 可知, 当 $\tau \in (0, 0.25]$ 时,

$l_{i,j}^{(n)} \geq 0$, 且 $\sum_{p=-1}^{+1} \sum_{q=-1}^{+1} l_{i+p,j+q}^{(n)} = 1$, 从而式(16)或式(15)表示 $u^{(n+1)}$ 是由 $u^{(n)}$ 经过一次局部自适应加权或低通滤波的结果。数值实验表明, 当 $\tau \in (0, 0.25]$ 时, 用式(15)或式(16)迭代计算没有表现出不稳定性, 尽管在理论上其稳定性的证明较为繁琐。

扩散模型数值迭代算法步骤如下:

输入: 含噪图像 $u^{(0)}$; 阈值 K (取为所加噪声的标准差); 扩散系数 $g_i(\cdot, K)$ ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$); 时域步长 $\tau = 0.1$; 迭代终止条件;

迭代: 对 $n = 0, 1, 2, \dots$

1) 对图像 $u^{(n)}$ 作一次平滑处理, 得到 $u_{\sigma}^{(n)} = G_{\sigma} * u^{(n)}$; (注: 取 $\sigma = 0.5$, 在实现 W-K 扩散模型、P-M 扩散模型时, 省略此平滑处理步骤。)

2) 计算 $\left(\frac{\partial u_{\sigma}^{(n)}}{\partial x}\right)^2$ 、 $\left(\frac{\partial u_{\sigma}^{(n)}}{\partial x}, \frac{\partial u_{\sigma}^{(n)}}{\partial y}\right)$ 、 $\left(\frac{\partial u_{\sigma}^{(n)}}{\partial y}\right)^2$, 并

分别对它们作一次平滑处理, 得到结构矩阵 $J_{\rho}(\nabla u_{\sigma}^{(n)}) = G_{\sigma} \otimes (\nabla u_{\sigma}^{(n)} \nabla u_{\sigma}^{(n)T})$; (注: 取 $\rho = 2$, 在实现 W-K 扩散模型、P-M 扩散模型、CLMC 扩散模型时, 省略此平滑处理步骤。)

3) 计算 $J_{\rho}(\nabla u_{\sigma}^{(n)})$ 的特征方向 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ (即 θ 值), 以及它们相对应的特征值 μ_1, μ_2 ; 并计算 λ_1, λ_2 ; (注: (1) 实现 Weickert 扩散模型时, 取 $\lambda_1 = g_i(\sqrt{\mu_1 + \mu_2}, K)$, $\lambda_2 \equiv 1$; (2) 实现本文扩散模型时, 取 $\lambda_1 = g_i(\sqrt{\mu_1 + \mu_2}, K)$, $\lambda_2 = g_i((1 - r)\sqrt{\mu_1 + \mu_2}, K)$; (3) 在实现 W-K 扩散模型、P-M 扩散模型、CLMC 扩散模型时, 省略此步骤。)

4) 计算 $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$; 易见这里 $a, c \in [0, 1]$, $|b| \in [0, 0.5]$ 。(注: (1) 实现 W-K 扩散模型时, 取 $a \equiv 1, c \equiv 1, b \equiv 0$; (2) 实现 P-M 扩散模型时, 取 $a = g_i(\|\nabla u^{(n)}\|, K), c = a, b \equiv 0$; (3) 实现 CLMC 扩

散模型时, 取 $a = g_i(\|\nabla u_{\sigma}^{(n)}\|, K), c = a, b \equiv 0$; (4) 实现 Weickert 扩散模型或本文扩散模型时, 利用步骤 3) 算出的 λ_1, λ_2 值, 根据定理 1 的结果取 $a = \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta$, $b = (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \theta \cos \theta$, $c = \lambda_2 \cos^2 \theta + \lambda_1 \sin^2 \theta$ 。)

5) 根据式(15)或(16)计算 $u^{(n+1)}$, 停止迭代或置 $n := n + 1$ 转步骤 1)。

输出: 去噪图像 $u^{(n+1)}$ 。

3 数值模拟实验

实验中选取了多幅测试图像, 但由于篇幅的限制, 仅以标准测试图像 Lena (512 × 512 × 8 bit)、Peppers (512 × 512 × 8 bit)、House (256 × 256 × 8 bit) 作为理想图像 \bar{u} 为例, 并加入不同强度 (标准方差 $std = 10, 15, 20$) 的零均值高斯白噪声, 得到含噪图像 $u^{(0)}$ 。

比较不同扩散模型的去噪效果并不容易, 本文涉及 5 个扩散模型: W-K 扩散模型、P-M 扩散模型、CLMC 扩散模型、Weickert 扩散模型、本文扩散模型。为了更好地比较它们的去噪效果, 它们的参数选择、扩散系数选择、数值离散方法应尽量统一, 上节中的算法可以方便实现这种统一。

分别从主观、客观两个方面比较各个扩散模型的去噪效果。客观上的对比, 采取比较不同扩散模型所能取得的最大峰值信噪比 PSNR, 峰值信噪比 PSNR 定义为

$$PSNR/dB = 10 \lg \left[\frac{MN \cdot 255^2}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (u_{i,j} - \bar{u}_{i,j})^2} \right]$$

式中, MN 表示图像中的像素数, \mathbf{u} 表示去噪后的图像, \bar{u} 表示未加入噪声的测试图像, 即理想图像。直觉上, 峰值信噪比 PSNR 的值越大, 恢复后的图像越接近不受噪声污染的理想图像。但峰值信噪比 PSNR 值在相同的情况下, 图像内容可能存在很大差异 (甚至完全不同), 给人的视觉感受也可能大不相同。

视觉判断去噪后图像的质量是常用的主观对比法, 图 2 给出了各扩散模型去噪后的图像, 可用于视觉观察比较。另外, 主观上的对比, 也可采取比较差图像 $u^{(0)} - \mathbf{u}$ 的视觉效果, 其中 $u^{(0)}$ 为初始含噪图像, \mathbf{u} 为扩散模型去噪后图像, 如图 3 所示。



图 2 标准测试图像与去噪结果图像

Fig. 2 Standard test images and denoised images

表 1—表 4 分别对应模型中采用扩散系数 g_1 至 g_4 (见式(5)—(7)), 其中 K 取实验时所加噪声的标准方差。从表 1—表 4 可以看出, 对于含不同强度噪声的测试图像, 本文提出的扩散模型几乎均取得了最大 PSNR 值。

图 2(e) 到图 2(i) 分别是 W-K 扩散模型, 采用扩散系数 $g_4(\cdot, K=10)$ 的 P-M 扩散模型、CLMC 扩散模型、Weickert 扩散模型、本文扩散模型迭代 70 次后 (基于前述数值迭代算法) 的图像, 此时的去噪图像便于视觉观察、分析与比较。可见:

图 2(e) 中的边缘被模糊的最严重; 图 2(f) 中分布着稠密的白点与黑点, 这是因为噪声强度较大 (标准差 $std = 20$), 而采用的阈值较小 ($K = 10$) 时, P-M 扩散模型能在很大程度上保留 (甚至是放大) 强噪声点, 另外, 沿着图 2(f) 左侧白色柱子的两边, 可观察到较为清晰的“阶梯现象”; 由于 $\sigma = 0.5$, 上述缺点在图 2(g) 中得到较有效的改善, 这正是 CLMC 扩散模型在 P-M 扩散模型中引入空间域正则项后的表现; P-M 扩散模型与 CLMC 扩散模型属于边缘停止性扩散, 因而在图 2(f) (g) 中, 沿

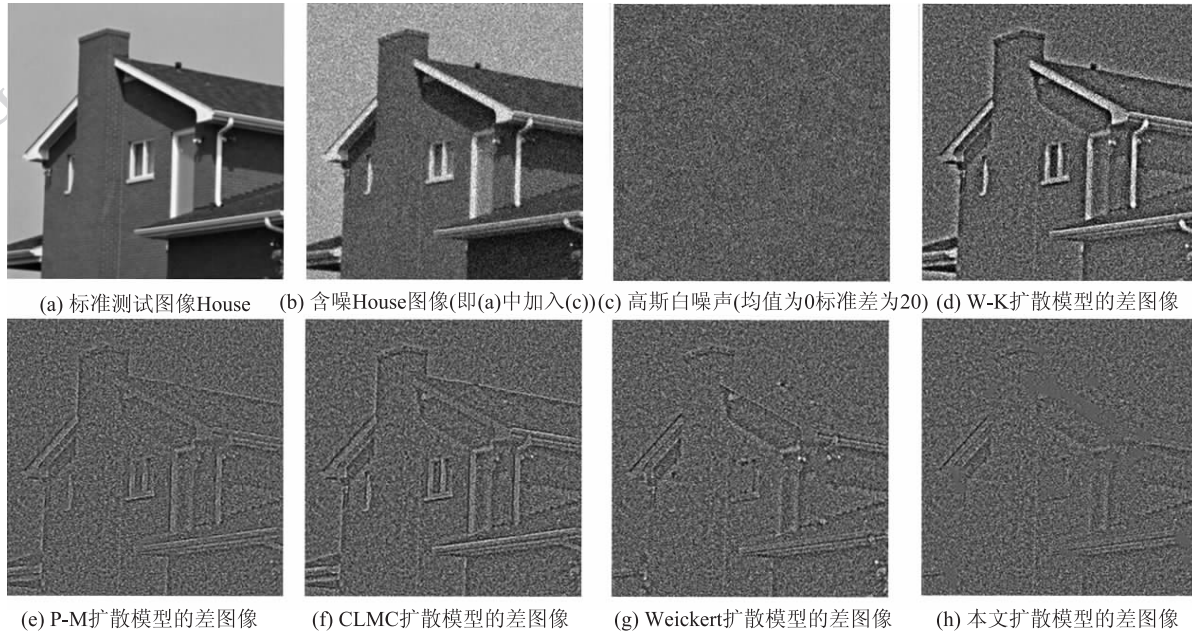


图 3 标准测试图像与差图像

Fig. 3 Standard test images and differenced images

表 1 采用扩散系数 g_1 所得最大峰值信噪比 PSNR

Table 1 Obtained maximum PSNR based on diffusivity g_1

模型	含噪图像 Lena(σ , PSNR)			含噪图像 Peppers(σ , PSNR)			含噪图像 House(σ , PSNR)		
	(10, 28.115 0)	(15, 24.599 2)	(20, 22.147 3)	(10, 28.256 2)	(15, 24.770 6)	(20, 22.326 3)	(10, 28.153 2)	(15, 24.597 9)	(20, 22.132 7)
W-K	33.113 9	31.313 3	30.130 5	32.474 2	30.706 3	29.471 0	32.802 6	30.925 2	29.703 4
P-M	34.077 2	32.171 0	30.925 9	33.551 7	31.812 4	30.464 5	33.726 3	31.865 7	30.515 8
CLMC	34.264 8	32.322 3	31.038 4	33.880 1	32.102 6	30.664 1	33.954 0	32.022 8	30.663 0
Weickert	34.587 7	32.593 9	31.201 4	34.059 9	32.400 8	30.938 8	34.638 1	32.624 7	31.053 8
本文	34.789 3	32.673 0	31.223 8	34.359 8	32.553 8	30.994 5	34.729 0	32.645 7	31.010 2

表 2 采用扩散系数 g_2 所得最大峰值信噪比 PSNR

Table 2 Obtained maximum PSNR based on diffusivity g_2

模型	含噪图像 Lena(σ , PSNR)			含噪图像 Peppers(σ , PSNR)			含噪图像 House(σ , PSNR)		
	(10, 28.115 0)	(15, 24.599 2)	(20, 22.147 3)	(10, 28.256 2)	(15, 24.770 6)	(20, 22.326 3)	(10, 28.153 2)	(15, 24.597 9)	(20, 22.132 7)
W-K	33.113 9	31.313 3	30.130 5	32.474 2	30.706 3	29.471 0	32.802 6	30.925 2	29.703 4
P-M	33.568 9	31.744 1	30.601 0	33.120 5	31.406 2	30.164 4	33.179 6	31.406 1	30.126 0
CLMC	34.068 4	32.191 7	30.967 7	33.762 4	31.999 7	30.609 7	33.748 1	31.848 6	30.532 9
Weickert	34.745 6	32.683 0	31.207 7	34.187 7	32.555 3	31.052 3	34.776 1	32.766 7	31.065 9
本文	34.858 8	32.778 4	31.262 0	34.445 9	32.730 9	31.147 2	34.850 3	32.829 9	31.047 5

表 3 采用扩散系数 g_3 所得最大峰值信噪比 PSNRTable 3 Obtained maximum PSNR based on diffusivity g_3

/dB

模型	含噪图像 Lena(σ , PSNR)			含噪图像 Peppers(σ , PSNR)			含噪图像 House(σ , PSNR)		
	(10, 28.115 0)	(15, 24.599 2)	(20, 22.147 3)	(10, 28.256 2)	(15, 24.770 6)	(20, 22.326 3)	(10, 28.153 2)	(15, 24.597 9)	(20, 22.132 7)
W-K	33.113 9	31.313 3	30.130 5	32.474 2	30.706 3	29.471 0	32.802 6	30.925 2	29.703 4
P-M	33.559 0	31.699 4	30.530 4	33.120 2	31.341 9	30.061 1	33.163 7	31.350 2	30.050 4
CLMC	34.039 9	32.117 6	30.859 2	33.735 7	31.912 1	30.474 4	33.712 9	31.764 2	30.423 5
Weickert	34.747 0	32.615 3	31.074 3	34.213 2	32.510 7	30.961 8	34.766 7	32.678 0	30.909 5
本文	34.824 4	32.695 9	31.128 3	34.420 5	32.653 4	31.049 5	34.824 8	32.743 4	30.920 1

表 4 采用扩散系数 g_4 所得最大峰值信噪比 PSNRTable 4 Obtained maximum PSNR based on diffusivity g_4

/dB

模型	含噪图像 Lena(σ , PSNR)			含噪图像 Peppers(σ , PSNR)			含噪图像 House(σ , PSNR)		
	(10, 28.115 0)	(15, 24.599 2)	(20, 22.147 3)	(10, 28.256 2)	(15, 24.770 6)	(20, 22.326 3)	(10, 28.153 2)	(15, 24.597 9)	(20, 22.132 7)
W-K	33.113 9	31.313 3	30.130 5	32.474 2	30.706 3	29.471 0	32.802 6	30.925 2	29.703 4
P-M	33.313 2	31.495 9	30.386 3	32.914 1	31.165 7	29.948 1	32.930 1	31.146 9	29.873 5
CLMC	33.972 6	32.115 8	30.928 1	33.704 4	31.931 5	30.569 0	33.659 9	31.761 1	30.462 5
Weickert	34.781 8	32.743 8	31.246 1	34.205 9	32.610 6	31.123 7	34.795 1	32.820 0	31.115 8
本文	34.791 7	32.785 2	31.302 9	34.412 1	32.748 4	31.225 2	34.822 5	32.866 9	31.086 1

着强边缘两侧并不太光滑;在图 2(h)中,强边缘两侧更光滑一些,但图 2(h)也更模糊些,这是因为结构算子中引入平滑步骤,从而相对于 P-M 扩散模型与 CLMC 扩散模型来说,Weickert 扩散模型虽可沿着边缘方向扩散,但在边缘点邻域也有更强的正则化效应;本文扩散模型去噪后的图像,即图 2(i),在视觉保真度上优于图 2(e)~(h),这是因为本文扩散模型具有更好的角点与纹理区域的保护能力。但是本文扩散模型(特别是采用扩散系数式(7))在强角点或纹理邻域,仍有少量的噪声不能有效去除,这是因为在此处扩散速度几乎为 0,因而有噪声残留。对于 Peppers 图像,也有类似的实验结果,限于篇幅,只在图 2(a)中给出原标准测试图像。

差图像所含边缘、角点信息越明显的图像,其对应的扩散模型在去噪过程中保护边缘、角点等特征的能力就越小。在图 3 中,图 3(d)~(h)分别是初始含噪图像(即图 3(b))与 W-K 扩散模型、采用扩散系数 $g_4(\cdot, K=10)$ 的 P-M 扩散模型、CLMC 扩散模型、Weickert 扩散模型、本文扩散模

型(基于前述数值迭代算法)迭代 70 次后的图像的差图像。从图 3 可见:图 3(d)中含有最多的边缘信息,这表明 W-K 扩散模型保护图像边缘的能力最小;相对于图 3(d),图 3(e)~(f)中边缘与角点的信息明显较少,这表明 P-M 扩散模型去噪时有很强的边缘停止性特点;图 3(f)中的边缘、角点信息多于图 3(e),这表明经过同样的扩散时间,CLMC 扩散模型比 P-M 扩散模型有更强的平滑作用;图 3(g)中的边缘信息进一步减少,但是在强角点处有明显的黑白点,这表明 Weickert 扩散模型不能很好保护图像中的角点。图 3(h)中边缘与角点信息最少,这正表明本文扩散模型有很好的保护边缘、角点的能力。

4 结 论

本文系统分析与总结了图像扩散去噪模型,在理论上解释了张量型扩散模型的物理意义,并提出一个新的扩散系数。在此基础上,得到一个基于保护角点与纹理区域的扩散模型。为了更好地比较文

中涉及的五个扩散模型,在参数选择、扩散系数选择、数值离散方法等尽量统一的基础上,利用数值模拟实验,对各种扩散去噪模型的效果在主观上与客观上进行比较。结果表明,本文扩散模型能够在有效去除噪声的同时,对图像中的角点、纹理区域保护效果较好,去噪后的图像在视觉效果上较佳。但是当 $\sigma > 0$, $\rho > 0$ 时,结构张量 $J_\rho(\nabla u_\sigma)$ 的特征向量已不能很好定位图像局部变化的方向,另外,本文扩散模型在强角点与纹理区域处还有少量噪声残留,从而本文扩散模型还有进一步改进的可能,另外,关于自适应阈值 K 的选取、扩散系数进一步的性质,以及扩散最佳停止时间的确定也还值得进一步研究。

参考文献 (References)

- [1] Weickert J. Anisotropic Diffusion in Image Processing [M]. Germany: Teubner-Verlag, Stuttgart, 1998: 3-114.
- [2] Alvarez L, Guichard F, Lions P L, et al. Axioms and fundamental equations in image processing [J]. Arch. Rat. Mech. Anal, 1993, 123: 199-257.
- [3] Sapiro G. Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001: 2-10.
- [4] Aubert G, Kornprobst P. Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and The Calculus of Variations [M]. New York: Springer-Verlag, 2002: 65-128.
- [5] Donoho D L. Denoising by soft thresholding [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41(33): 613-627.
- [6] Mallat S. A wavelet Tour of Signal Processing [M]. 2nd ed. San Diego: Elsevier, 1997: 486-491.
- [7] Chen G Y, Bui T D. Multiwavelets denoising using neighboring coefficients [J]. Signal Processing Letters, IEEE, 2003, 10(7): 211-214.
- [8] Li S Z. Markov Random Field Modeling in Computer Vision [M]. 3rd ed. London: Springer Verlag, 1999: 50-60.
- [9] Witkin A P. Scale space filtering [C]//Proceedings of International Joint Conference on Artificial Intelligence. New York: ACM, 1983: 1019-1021.
- [10] Koenderink J. The structure of images [J]. Biological Cybernetics, 1984, 50(5): 363-370.
- [11] Perona P, Malik J. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629-639.
- [12] Catte F, Lions P L, Morel J M, et al. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion I [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992, 29(1): 182-193.
- [13] Weickert J. A review of nonlinear diffusion filtering [R]. Scale-Space Theory in Computer Vision. Lecture Notes in Computer

Science. Berlin: Springer, 1997, 1252: 3-28.

- [14] You Y L, Xu W, Tannenbaum A, et al. Behavioral analysis of anisotropic diffusion in image processing [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1996, 5(11): 1539-1553.
- [15] Buades A, Coll B, Morel J M. The staircasing effect in neighborhood filters and its solution [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(6): 1499-1505.
- [16] Whitaker R, Pizer T M. A multi-scale approach to nonuniform diffusion [J]. CVGIP: Image Understanding, 1993, 57(1): 99-110.
- [17] Liu F. Diffusion filtering in image processing based on wavelet transform [J]. Science in China, Series F: Information Sciences, 2006, 49(4): 494-503.
- [18] Cao Y, Liu F. Convergence of numerical solution for diffusion filtering model based on wavelet transform [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2009, 43(4): 121-124. [曹毅, 刘峰. 基于小波变换的扩散滤波模型数值解的收敛性 [J]. 西安交通大学学报, 2009, 43(4): 121-124.]
- [19] Rousseeuw P J, Leroy A M. Robust Regression and Outlier Detection [M]. New York: Wiley, 1987: 39-46.
- [20] Weickert J, Schar H. A scheme for coherence enhancing diffusion filtering with optimized rotation invariance [J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2002, 13(1-2): 103-118.

附 录

在图像中像素点 (i, j) 处,对式(14)作如下数值离散逼近(空间域离散步长均取为1):

$$\text{式(14)左端: } \frac{\partial u_{i,j}^{(n)}}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{(n+1)} - u_{i,j}^{(n)}}{\tau};$$

式(14)右端第1项

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j}^{(n)} \approx a_{i+1/2,j}^{(n)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2,j}^{(n)} - a_{i-1/2,j}^{(n)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-1/2,j}^{(n)},$$

$$\text{其中 } \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2,j}^{(n)} \approx (u_{i+1,j}^{(n)} - u_{i,j}^{(n)}),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-1/2,j}^{(n)} \approx (u_{i,j}^{(n)} - u_{i-1,j}^{(n)}), \quad a_{i\pm 1/2,j}^{(n)} \approx \frac{a_{i\pm 1,j}^{(n)} + a_{i,j}^{(n)}}{2};$$

式(14)右端第2项

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j}^{(n)} \approx b_{i+1/2,j}^{(n)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i+1/2,j}^{(n)} - b_{i-1/2,j}^{(n)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i-1/2,j}^{(n)},$$

$$\text{其中 } \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i+1/2,j}^{(n)} \approx (u_{i+1/2,j+1/2}^{(n)} - u_{i+1/2,j-1/2}^{(n)}),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i-1/2,j}^{(n)} \approx (u_{i-1/2,j+1/2}^{(n)} - u_{i-1/2,j-1/2}^{(n)}),$$

$$u_{i\pm 1/2,j+1/2}^{(n)} \approx \frac{(u_{i\pm 1,j+1}^{(n)} + u_{i\pm 1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j}^{(n)})}{4},$$

$$u_{i+1/2,j-1/2}^{(n)} \approx \frac{(u_{i\pm 1,j-1}^{(n)} + u_{i\pm 1,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)} + u_{i,j}^{(n)})}{4},$$

$$b_{i\pm 1/2,j}^{(n)} \approx \frac{b_{i\pm 1,j}^{(n)} + b_{i,j}^{(n)}}{2};$$

类似可离散式(14)右端中第3、4项,故式(14)有离散格式(15),其中

$$h_{i-1,j-1}^{(n)} = \frac{b_{i-1,j}^{(n)} + 2b_{i,j}^{(n)} + b_{i,j-1}^{(n)}}{8},$$

$$h_{i-1,j}^{(n)} = \frac{a_{i-1,j}^{(n)} + a_{i,j}^{(n)} + b_{i,j-1}^{(n)} - b_{i,j+1}^{(n)}}{8},$$

$$h_{i-1,j+1}^{(n)} = -\frac{b_{i-1,j}^{(n)} + 2b_{i,j}^{(n)} + b_{i,j+1}^{(n)}}{8},$$

$$h_{i,j-1}^{(n)} = \frac{c_{i,j-1}^{(n)} + c_{i,j}^{(n)} + b_{i-1,j}^{(n)} - b_{i+1,j}^{(n)}}{8},$$

$$h_{i,j}^{(n)} = -\frac{a_{i-1,j}^{(n)} + 2a_{i,j}^{(n)} + a_{i+1,j}^{(n)} - c_{i,j-1}^{(n)} + 2c_{i,j}^{(n)} + c_{i,j+1}^{(n)}}{8},$$

$$h_{i,j+1}^{(n)} = \frac{c_{i,j}^{(n)} + c_{i,j+1}^{(n)} + b_{i+1,j}^{(n)} - b_{i-1,j}^{(n)}}{8},$$

$$h_{i+1,j-1}^{(n)} = -\frac{b_{i,j-1}^{(n)} + 2b_{i,j}^{(n)} + b_{i+1,j}^{(n)}}{8},$$

$$h_{i+1,j}^{(n)} = \frac{a_{i+1,j}^{(n)} + a_{i,j}^{(n)} + b_{i,j+1}^{(n)} - b_{i,j-1}^{(n)}}{8},$$

$$h_{i+1,j+1}^{(n)} = \frac{b_{i+1,j}^{(n)} + 2b_{i,j}^{(n)} + b_{i,j+1}^{(n)}}{8}.$$