

Journal of Image
and Graphics

中国图象图形学报



ISSN1006-8961
CN11-3758/TB

2012 **11**
Vol.17 No.

中国科学院遥感应用研究所
中国图象图形学学会主办
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

Zhongguo Tuxiang Tuxing Xuebao

2012 年 11 月 第 17 卷 第 11 期(总第 199 期)

目 次

综述

数字图像合成技术综述 吴昊, 徐丹(1333)

图像处理和编码

基于群稀疏的结构化字典学习 郭景峰, 李贤(1347)

SSIM 度量虚拟视点绘制失真的深度图帧内编码 喻莉, 张军涛, 邓慧萍, 向森, 周鹏, 左雯, 王宁(1353)

统计量移位的鲁棒无损图像信息隐藏 李晓博, 周詮(1359)

伪造图像典型篡改操作的检测 左菊仙, 刘本永(1367)

图像分析和识别

融合灰度和 SURF 特征的红外目标跟踪 范新南, 丁朋华, 刘俊定, 张学武(1376)

海面温度栅格图的锋面提取与矢量化 崔雪森, 周为峰, 王栋, 张胜茂(1384)

交通场景中车辆的运动检测与阴影消除 王彬, 冯远静, 郭海峰, 张贵军(1391)

基于随机点积图的图像标注改善算法 孙登第, 罗斌, 郭玉堂(1400)

图像理解和计算机视觉

有监督子空间建模和稀疏表示的场景分类 段菲, 章毓晋(1409)

对立色 LBP 模型的目标跟踪 张炯, 宁纪锋, 颜永丰, 于伟(1418)

计算机图形学

联合骨架与边界特征的平面形状分解..... 蒋建国, 周丹凤, 郝世杰, 郭艳蓉, 詹曙(1425)

屏幕空间自适应的地形 Tessellation 绘制 张兵强, 张立民, 艾祖亮, 张建廷(1431)

遥感图像处理

SAR 图像稀疏优化滤波 杨萌, 张弓(1439)

分段线性动态矩匹配条带去除..... 秦雁, 邓孺孺, 何颖清, 陈蕾, 陈启东(1444)

基于 Harris 角点和 SIFT 描述符的高分辨率遥感影像匹配算法 陈梦婷, 闫冬梅, 王刚(1453)

第八届图像图形技术与应用学术会议征文通知 (1460)

中国图象图形学报

刊名题字: 宋 健 月刊(1996 年创刊) 第 17 卷 第 11 期 2012 年 11 月 16 日出版

主管单位	中国科学院	Superintended by	Chinese Academy of Sciences
主 办	中国科学院遥感应用研究所 中国图象图形学学会 北京应用物理与计算数学研究所	Sponsored by	Institute of Remote Sensing Application, CAS China Society of Image and Graphics Institute of Applied Physics and Computational Mathematics
主 编	李小文	Chief editor	LI Xiaowen
编辑出版	《中国图象图形学报》编辑出版委员会 北京 9718 信箱 邮编 100101 电子信箱:jig@irsa. ac. cn 电话:010-64807995 010-82614429 网 址:www. cjig. cn	Editor , Publisher	Editorial and Publishing Board of Journal of Image and Graphics (P. O. Box 9718 ,Beijing 100101 ,China) E-mail:jig@irsa. ac. cn
印刷装订	北京北林印刷厂	Distributed by	Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals
广告经营许可证	京朝工商广字第 0346 号	Domestic	All Local Post Offices in China
总 发 行	北京报刊发行局	Foreign	China International Book Trading Corporation (P. O. Box 399 ,Beijing 100044 ,China)
订 购	全国各地邮局	Printed by	Beijing Beilin Printing House
国外发行	中国国际图书贸易总公司 (中国国际书店) (北京 399 信箱 邮编 100044)		

ISSN 1006-8961 CN11-3758/TB CODE ZTTFXZ 国内邮发代号: 82-831 国外发行代号: M1406 国内定价: 45.00 元

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2012)11-1347-06

论文引用格式: 郭景峰, 李贤. 基于群稀疏的结构化字典学习[J]. 中国图象图形学报, 2012, 17(11): 1347-1352.

基于群稀疏的结构化字典学习

郭景峰, 李贤

燕山大学信息科学与工程学院, 秦皇岛 066004

摘要: 随着稀疏表示在机器学习和图像处理领域中的广泛应用, 字典学习的算法受到越来越多的关注。传统意义上训练出来的字典只是一些原子的集合, 没有结构。考虑到稀疏表示信号中群结构的稀疏性, 建立了基于群稀疏的结构化字典学习的数学模型, 并结合凸分析和单调算子理论提出了一个结构化字典学习的有效算法。实验结果表明, 该算法具有更快的收敛速度, 新模型训练出来的字典能够更好地适应数据, 提高表示数据的精度, 进而提高图像增强的效果。

关键词: 稀疏表示; 字典学习; 群稀疏; 凸优化; 单调算子

Structured dictionary learning based on group sparsity

Guo Jingfeng, Li Xian

College of Information Science and engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China

Abstract: Sparse representation of signals is an evolving field in many machine learning and image processing tasks. Nowadays, more and more attention is paid on the algorithm for learning dictionaries. Traditionally, the dictionary is an unstructured set of atoms. Considering the sparsity of the group of the sparse representation signal, a mathematical model of the dictionary learning based on the group sparsity is constructed. We propose an efficient algorithm for learning structured dictionary according to the convex analysis and monotone operator theory. The experiments show that the algorithm converges faster, the dictionary trained from the new model adapts better to the data and the data is better represented, which overall improves the image enhancement effect.

Key words: sparse representation; dictionary learning; group sparsity; convex optimization; monotone operator

0 引言

近几年, 随着计算机视觉和图像处理的快速发展, 已有许多算法来解决图像去噪^[1]、图像重建^[2]、图像的超分辨率重建^[3]等诸如此类的逆问题。信号的稀疏表示^[4]在这些应用中表现出了良好的性能因而受到广泛的关注。信号的稀疏表示是指由一个超完备的字典 $D \in \mathbf{R}^{n \times k}$ 的原子(即字典矩阵 D 的列向量)的稀疏线性组合来近似输入信号 $y \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 。

给定信号 y 和字典 D , 通过下面的稀疏估计问题来找到信号的稀疏表示:

$$\begin{aligned} \min_x & \|x\|_0 \\ \text{s. t. } & \|y - Dx\|_2 \leq t \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $x \in \mathbf{R}^{k \times 1}$ 为 y 关于 D 的稀疏表示向量, t 表示精确性范围内允许的误差($t > 0$), $\|x\|_0$ 计算向量 x 中非零元的个数。求解式(1)的过程通常称为“稀疏编码”^[5]。式(1)是 NP (non-deterministic polynomial) 难问题, 实际应用中的有效解决方法是用松弛化的凸的一范数变体来代替 0 范数。现已证

收稿日期: 2012-05-04; 修回日期: 2012-06-02

基金项目: 河北省重点基础研究项目(10963527D)

第一作者简介: 郭景峰(1962—), 男, 教授, 2002 年于燕山大学获电路与系统专业博士学位, 主要研究方向为数据库理论、数据可视化。

E-mail: jfguo@ysu.edu.cn

明,在解足够稀疏的情况下,上述两个问题等价。

在求解上述问题的过程中,字典 D 的选择尤为重要。获得字典有两种方法:解析法和基于学习的方法。基于学习的方法是从大量的训练样本集合中学习出一个精确地矩阵,比如:最优化方向(MOD)^[6]、K 奇异值分解(K-SVD)^[7]等。这种基于学习的方法在实际的应用中表现出更好的性能,因此字典学习^[8]成为当今图像处理领域一个非常活跃的研究课题。传统的字典学习模型为

$$D = \arg \min_{D, Z} \|X - DZ\|_2^2 + \lambda \|Z\|_1 \quad (2)$$

s. t. $\|D_i\|_2 \leq 1, i = 1, 2, \dots, k$

式中, D 和 Z 为自变量, X 为训练样本集矩阵, X 的每个列向量表示一个训练样本, Z 为训练样本 X 关于字典 D 的稀疏表示矩阵, 其每个列向量表示相应的训练样本关于字典 D 的表示向量, D 为所求字典。式(2)只考虑了表示向量的整体稀疏性, 并没有考虑到稀疏表示向量中任何隐藏的结构, 因此导致了字典的无结构性。

近几年, 结构化稀疏受到广泛关注。许多人开始尝试结构化字典的训练, 反应隐藏在数据中的结构, 提高稀疏表示的精度: Benoit 等人^[9]提出从缩略图或者缩略图集合中学习结构化字典的算法。该算法的核心是通过缩略图引入一个单射的线性算子, 利用向线性算子的成像空间做投影来推广缩略图的结构, 优化字典。Elad 等人^[10]提出了一个基于小波的多尺度字典学习算法。该算法结合了小波变换的多尺度特性和字典学习, 在小波变换的解析域中利用 K-SVD 训练基于块的字典, 通过对这些字典进行逆小波变换生成真正的多尺度的字典。学习到的字典同时表现出多尺度和单尺度的性能。

结构化字典的学习能够提高数据表示的精度, 提高图像增强的效果。借鉴了 Peyre 等人^[11]提出的群稀疏先验, 将它扩展到结构化字典学习的数学模型中。群稀疏旨在对稀疏表示向量进行分群, 分别考虑每个群的稀疏性, 用来反映稀疏表示向量中相邻元素间的局部依赖性, 通过更新字典的过程, 将这种结构反映到字典中。在训练字典的模型中加入群稀疏正则项, 既保证稀疏表示信号的稀疏性, 又考虑相邻表示系数间的局部依赖性, 并根据凸优化理论^[12]中的单调算子的性质给出有效的算法。实验验证此算法比以往算法有更快的收敛速度, 新模型训练出来的字典能够更好地适应数据, 提高表示数据的精度, 将此字典应用到图像超分辨率重建的实

验中比已有算法表现出更好的性能。

1 原理分析与算法实现

1.1 核心理想

字典学习的核心是解决以下问题: 给定 n 个大小为 m 像素的训练图像块 $x_i \in \mathbf{R}^m (i = 1, 2, \dots, n)$, 表示成矩阵 X 的列 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 要找到一个字典 $D = [d_1, d_2, \dots, d_p] \in \mathbf{R}^{m \times p} (p > m)$ 以保证字典的超完备性, 使每一个信号 x_i 都可以表示成关于字典 D 的列的稀疏线性组合即 $x_i \approx D\alpha_i$ 。字典学习公式为

$$\min_{D, A \in \mathbf{R}^{p \times n}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \|x_i - D\alpha_i\|_2^2 + \lambda J(\alpha_i) \right] \quad (3)$$

式中, $A = [\alpha_1, \dots, \alpha_n] \in \mathbf{R}^{p \times n}$ 为表示向量矩阵, α_i 为信号 x_i 关于 D 的稀疏表示向量, 二次项是保真项, 确保信号 x_i 足够的接近信号估计 $D\alpha_i$, $\lambda > 0$ 为正则项参数, $J(\alpha_i)$ 则是反应重建信号先验信息的惩罚函数。

传统的字典学习中, 该惩罚项为 1 范数。1 范数是 0 范数的变体, 只考虑表示向量的整体稀疏性, 导致学习出的字典没有结构。在图像处理的逆问题中, 这种逐个元素的稀疏性已经不足以达到好的效果。通过对稀疏表示向量进行分群, 分别考虑每个群的稀疏性, 来体现稀疏表示向量中元素间的局部依赖性。在字典学习的过程中, 把表示向量中元素间的依赖性反映到字典的结构中。

具体方法是向字典学习的模型中引入一系列定位因子 $B_j: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^{p_j} (j \in I)$ 对稀疏表示向量进行分群, B_j 表示从稀疏表示向量中提取第 j 个群, 这个群中有 p_j 个元素。引入算子 $\varphi_j: \mathbf{R}^{p_j} \rightarrow \mathbf{R}^+ (j \in I)$ 来反映第 j 个群的稀疏性。因此把传统的先验信息扩展为

$$J(\alpha_i) = \sum_{j \in I} \varphi_j(B_j \alpha_i) \quad (4)$$

式中, I 表示函数下标 j 满足的指标集合, 要求 φ_j 是适当的下半连续凸函数, 表示首先对信号 x_i 关于字典 D 的表示向量 α_i 进行分群, 然后再计算各群的稀疏性。

1.2 算法实现

在字典学习的数学模型式(3)中, D 和 A 都是自变量, 这是个非凸问题, 很难找到其最优值。而当

其中一个变量固定的时候,此问题便转化为关于另一个变量的容易求最优值的凸问题。块坐标下降策略^[13](固定其中一个变量,优化关于另一个变量的问题,如此两个变量交替迭代直到收敛)是现在广泛采用的字典学习算法。本文也采用这种优化策略,下面详细介绍本文算法与传统算法的不同之处:

1) 固定 D , 更新 A

此时式(3)变为

$$\min_{A \in \mathbb{R}^{p \times n}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \|x_i - D\alpha_i\|_2^2 + \lambda \sum_{j \in I} \varphi_j(B_j \alpha_i) \right] \quad (5)$$

式中核心问题为

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{2} \|x - D\alpha\|_2^2 + \lambda \sum_{j \in I} \varphi_j(B_j \alpha) \quad (6)$$

这个问题可以看成是 $\min F(\alpha) + \lambda \sum_{j=1}^m G(\alpha)$ 的形式,

其中 $F(\alpha) = \frac{1}{2} \|x - D\alpha\|_2^2, G(\alpha) = \varphi_j(B_j \alpha)$ 。

在凸优化的单调算子理论中,对于求两个函数的最小值即形式如: $\min F(x) + G(x)$ 的凸问题,将其转化为求其导函数的零解的问题,进而推导出不动点方程转化为迭代算法。根据 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的性质不同,有不同的迭代算法。其中一个重要的性质就是是否能够计算出函数 $G(x)$ 的近邻算子。函数 $G(x)$ 的近邻算子定义为

$$\text{prox}_{\gamma G}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{y \in H} \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + \gamma G(y) \quad (7)$$

式(7)本身为一个凸优化问题。许多函数都能够有效地找到其近邻算子。对于强凸的函数,式(7)有唯一的解,那么式(7)就可以写成闭的形式。如果 $F(x)$ 和 $G(x)$ 均为适当的下半连续凸函数, $F(x)$ 可导并且 $G(x)$ 容易求其近邻算子,就可以应用单调算子理论中的向前-向后(forward-backward)算法。

群稀疏的字典学习模型式(6)形如:

$$\min F(x) + \lambda \sum_{j=1}^m G(x) \quad (8)$$

式中, $F(x)$ 为可导的下半连续凸函数,如果 $G(x)$ 为容易求其近邻算子的下半连续凸函数,只需对向前-向后算法做一定的推广,就可以解决此问题。 $G(x) = \varphi_j(B_j x)$, 其中 φ_j 是计算向量 $B_j x$ 的稀疏性,取其为 2 范数,显然 2 范数为下半连续的凸函数且容易求其近邻算子。

$$\text{prox}_{\gamma \|\cdot\|_2}(x) = \max \left(0, 1 - \frac{\gamma}{\|x\|_2} \right) x$$

对向前-向后算法作如下推导:

$$x^* \in \arg \min F(x) + \sum_j G_j(x) \Leftrightarrow$$

$$0 \in \nabla F(x^*) + \sum_j \partial G_j(x^*) \Leftrightarrow$$

$$\exists y_j \in \partial G_j(x^*), \nabla F(x^*) + \sum_j y_j = 0 \Leftrightarrow$$

$$\exists (z_j)_{j=1}^m, \forall j, \frac{1}{m}(x^* - z_j - \gamma \nabla F(x^*)) \in \gamma \partial G_j(x^*)$$

$$x^* = \frac{1}{m} \sum_j z_j (z_j = x^* - \gamma \nabla F(x^*) - m \gamma y_j) \Leftrightarrow$$

$$(2x^* - z_j - \gamma \nabla F(x^*)) - x^* \in m \gamma \partial G_j(x^*) \Leftrightarrow$$

$$x^* = \text{prox}_{m \gamma G_j}(2x^* - z_j - \gamma \nabla F(x^*)) \Leftrightarrow$$

$$z_j = z_j + \text{prox}_{m \gamma G_j}(2x^* - z_j - \gamma \nabla F(x^*)) - x^*$$

通过推导,把原问题转化为含有最优解 x^* 的表达式关于函数 G_j 的近邻算子的迭代问题。对于式(8),得出算法 1。式(5)中的 n 个信号可以看成矩阵,同时处理。

2) 固定 A , 更新 D

$$D = \arg \min_D \|X - DA\|_2^2$$

$$\text{s. t. } \|D_i\|_2^2 \leq 1, i = 1, 2, \dots, k$$

这是一个二次约束的二次规划问题,可以通过很多优化算法^[14]解决。

算法 1

初始化: $x \leftarrow \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m z_j, t \leftarrow 0$

主迭代: 重复

for $i \in [1, m]$

$$z_j \leftarrow z_j + \lambda (\text{prox}_{\gamma G_j}(2x - z_j - \gamma \nabla F(x)) - x)$$

$$x \leftarrow \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m z_j$$

$t = t + 1$

直到收敛

返回 x 。

2 实验

通过一系列仿真实验来验证本文字典学习的数学模型及其算法的有效性。图 1 为实验中用到的图像。

训练字典是为了更好地表示数据,为了说明本文学习出的字典具有更好的表示数据的性能,分别



图 1 实验中所用图像

Fig. 1 Images used in the experiments

将本文方法训练出的字典和传统算法训练出的字典应用到图像超分辨率重建中进行对比实验。这里超分辨率重建使用文献[3]中的两步超分辨率方法,将输入图像的 3 倍放大作为超分辨率实验的输出,即将 3×3 的低分辨率图像块放大为 9×9 的对应的高分辨率图像块。对于彩色图像,将图像转化成 YCb-Cr 格式。人们对图像的亮度比较敏感,因此实验只处理亮度分量,而对于人们不是很敏感蓝色色度分量和红色分量通过双立方插值^[15]进行插值。根据视觉效果和图像的均方根误差(RMSE)来评估算法的优劣性。

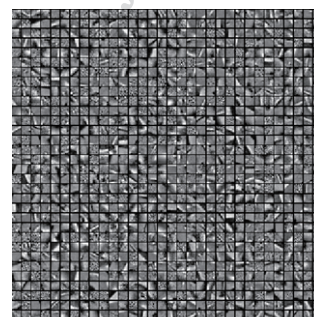
2.1 实验数据

从大量的自然图像中随机采样取 100 000 个高分辨率-低分辨率图像块对作为训练样本集来训练字典,设置固定的字典大小为 1 024 (大量实验证明这是一个既能保证计算量又能保证图像质量的值)。设置 $\lambda = 0.1$,为了简单起见,令取块因子 B_j 每次取表示向量中 4 个元素为一个群组, $\varphi_j(\mathbf{x}) = \left(\sum_{k=0}^{m_j-1} |v(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $\gamma = 2\beta$ (其中 $\frac{1}{\beta}$ 为 $\nabla F(\mathbf{x})$ 的利普希茨定值)。

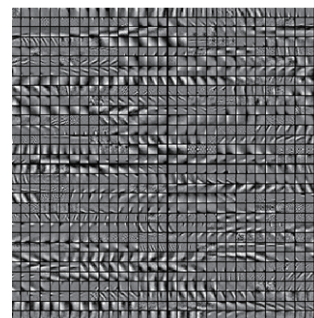
2.2 实验结果

图 2 为从 100 000 个图像块对的训练样本集训练出高分辨率图像块的字典。其中每个字典均有 1 024 列,每列大小为 $81(9 \times 9)$ 像素。图 2(a)为根据文献[14]算法训练出来的无结构的字典。图 2(b)为根据本文算法训练出的结构化字典。字典表示出图像块

的基本模型,如定向边等。观察发现:图 2(b)中的字典相比于图 2(a)明显呈现出一定的结构性。



(a) 文献[14]算法



(b) 本文算法

图 2 不同算法训练出的字典

Fig. 2 The dictionaries trained from different methods

图 2 中两个字典均是在相同的实验环境下,字典学习算法迭代 50 次的结果。表 1 为算法收敛时训练样本估计值与真实值之间的差值,表中数据为差值矩阵各元素的平方和。可以看出:本文算法结

果具有更小的误差值,说明用此字典表示的信号更接近真实信号,充分验证了本文算法训练的字典提高了数据表示的精度。

表 1 估计值与真实值误差
Table 1 The error between the real value and the estimated

	传统字典学习算法	本文算法
估计值与真实值误差	260.8	248

图 3 和图 4 均为在相同的实验环境下,将上述两个字典应用到图像的超分辨率重建实验中的结果对比图。



图 3 Lena 图像放大 3 倍的效果图
Fig. 3 Result of the Lena image magnified by a factor of 3

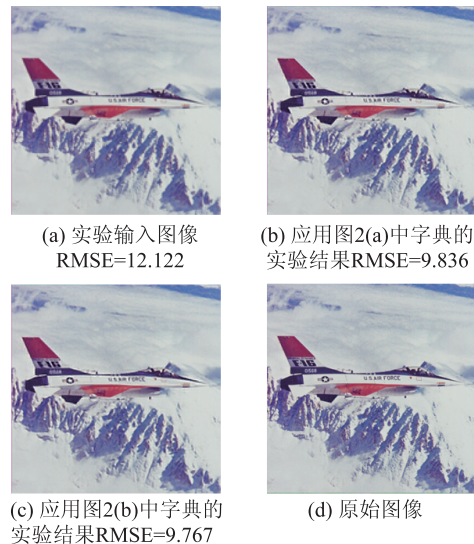


图 4 Airplane 图像放大 3 倍的效果图
Fig. 4 Result of the airplane image magnified by a factor of 3

图 3 和图 4 中的 RMSE 值分别表示该图像和原始图像的均方根误差, RMSE 越小说明该图与原始图像越接近。通过上述的结果可以看出,利用本文算法得到的图像与原始图像视觉效果上最相近,且都具有最低的 RMSE,充分验证了基于群稀疏的结构化字典表示数据的可行性与优越性。

为了验证本文学习到的字典具有一般性,表 2 给出实验的数值结果。分别对图 1 中的 6 幅图像做图像超分辨实验,将本文算法与传统算法、双立方插值算法做比较。表 2 中的数据表明,对于不同的图像,本文算法均具有最低的 RMSE,充分验证了本文算法的有效性。

表 2 均方根误差值的比较
Table 2 The compare of RMSEs

	输入图像	双立方插值	传统算法	本文算法
Lena	13.099 3	10.433 6	10.423 2	10.299 0
couple	9.685 1	8.381 7	8.365 9	8.278 1
test	18.097 8	16.914 0	16.813 2	16.634 3
bird	14.736 1	13.515 8	13.188 6	13.179 8
monarch	21.762 1	18.282 6	18.049 4	18.039 9
airplane	12.121 7	9.847 7	9.836 0	9.767 9

3 结 论

考虑了稀疏表示信号中群结构的稀疏性,创立了基于群稀疏的结构化字典学习的数学模型,结合凸分析和单调算子理论提出了一个结构化字典学习的有效算法。并通过实验结果验证:本文提出的算法具有更快的收敛速度,新模型训练出来的字典能够更好地适应数据,提高字典表示数据的精度,进而提高图像增强的效果。本文训练出来的字典具有一般性,可以被应用到稀疏表示的其他应用领域。

实验中群的大小设置为固定值 4 像素,下一步的工作重点是研究群的大小对于数据表示的影响;另一可能的研究兴趣是结构化字典的实时更新,将其应用推广到视频处理中。

参考文献(References)

[1] Elad M, Aharon M. Image denosing via sparse and redundant

- representations over learned dictionaries [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(12): 3736-3745.
- [2] Mairal J, Elad M, Sapiro G. Sparse representation for color image restoration [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2008, 17(1): 53-69.
- [3] Wright J, Ma Y, Yang J C. Image super-resolution via sparse representation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 19(11): 2861-2873.
- [4] Aharon M, Elad M, Bruckstein M. The k-svd: An algorithm for designing of over-complete dictionaries for sparse representations [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(11): 4311-4322.
- [5] Yang M, Zhang L, Yang J. et al. Robust sparse coding for face recognition [C]// Proceedings of 2011 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. United States: IEEE Computer Society, 2011: 625-632.
- [6] Protter M, Elad M. Image sequence denoising via sparse and redundant representation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2009, 18(1): 27-34.
- [7] Rubinstein R, Zibulevsky M, Elad M. Efficient implementation of the K-SVD algorithm using batch orthogonal matching pursuit; CS-2008-08[R]. Haifa, Israel: Technion Computer Science Department, 2008.
- [8] Jiang Z L, Lin Z, Davis L S. Learning a discriminative dictionary for sparse coding via label consistent K-SVD[C]// Proceedings of 2011 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. United States: IEEE Computer Society, 2011: 1697-1704.
- [9] Benoit L, Mairal J, Bach F. Sparse image representation with epitomes[C]// Proceedings of 2011 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. United States: IEEE Computer Society, 2011: 2913-2920.
- [10] Ophir B, Lustig M, Elad M. Multi-Scale dictionary learning using wavelets [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2011, 5(5): 1014-1024.
- [11] Peyre G, Fadili J. Group sparsity with overlapping partition functions[C]// Proceedings of 19th European Signal Processing Conference. Barcelona, Spain: Hindawi Publishing Corporation, 2011: 303-307.
- [12] Bauschke H H, Combettes P L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces [M]. Halifax, Canada: Springer, 2010: 363-411.
- [13] Engan K, Aase S O, Husoy J H. Frame based signal compression using method of optimal directionarys (MOD)[C]//1999 IEEE International Symposium on Circuits and Systems. United States: IEEE Service Center, 1999: 2913-2920.
- [14] Lee H, Battle A, Raina R, et al. Efficient sparse coding algorithms[C]// Advances in Neural Information Processing Systems. United States: The MIT Press, 2006.
- [15] Hou H S, Andrews H C. Cubic spline for image interpolation and digital filtering [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1978, 26(1): 508-517.