

Journal of Image
and Graphics

中国图象图形学报



ISSN1006-8961
CN11-3758/TB

2012 12
Vol.17 No.

中国科学院遥感应用研究所
中国图象图形学学会主办
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

Zhongguo Tuxiang Tuxing Xuebao

2012年12月 第17卷 第12期(总第200期)

目次

综述

高斯混合模型、求解算法及视觉应用综述..... 管涛,李玲玲(1461)

图像处理和编码

基于曲波变换和色度模型的彩色图像去噪 张云强,张培林,王国德,卓洪波(1472)

子矢量排序的渐进不相似度逼近算法 李阳,潘志斌,吴鑫鹏(1478)

稀疏梯度先验模型的正则化图像复原 刘伟豪,梅林,蔡烜(1485)

高精度亚像素全局运动估计的上采样梯度互相关算法 余应淮,王锦荣(1492)

图像分析和识别

点到弦距离累加的自适应角点检测 王万良,金亦挺,赵燕伟,胡峰俊(1500)

最大子分类间隔准则的核函数优化 张静,杨智勇,于红芸,孙晓燕(1509)

核典型相关性鉴别分析 陈伟琦,程强(1516)

小波变换和特征加权融合的人脸识别 赵焕利,王玉德,张学志,薛乃玉(1522)

具有身份标识的多目标跟踪 安国成,肖坦(1528)

图像理解和计算机视觉

用于圆锥体位姿测量的曲面标记..... 李蒙,谌德荣,周广铭,蒋玉萍,高翔霄(1534)

计算机图形学

基于特征识别的3维人脸动画模型自动构造…………… 徐明, 乔宁博, 文振焜, 曾新, 采振祥(1540)

3D GIS 环境下雨雪天气实时仿真…………… 李欢, 樊红, 冯浩(1548)

医学图像处理

结合马尔可夫随机场与模糊 C-均值聚类的脑 MRI 图像分割…………… 余黎煌, 钟华, 张石(1554)

遥感图像处理

面向遥感影像镶嵌的 SVR 色彩一致性处理…………… 吴炜, 骆剑承, 李均力, 杨海平, 沈占锋(1561)

遥感影像投影寻踪回归分类模型…………… 张正健, 李祚泳, 秦宁生, 刘志红, 巴桑(1568)

《中国图象图形学报》2012 年第 17 卷总目次…………… (1)

志谢…………… 封2

中国图象图形学报

刊名题字: 宋 健

月刊(1996 年创刊)

第 17 卷 第 12 期

2012 年 12 月 16 日出版

主管单位 中国科学院

主 办 中国科学院遥感应用研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

主 编 李小文

编辑出版 《中国图象图形学报》编辑出版委员会

北京 9718 信箱 邮编 100101
电子信箱:jig@irsa.ac.cn
电话:010-64807995 010-82614429
网 址:www.cjig.cn

印刷装订 北京北林印刷厂

广告经营许可证 京朝工商广字第 0346 号

总 发 行 北京报刊发行局

订 购 全国各地邮局

国外发行 中国国际图书贸易总公司
(中国国际书店)
(北京 399 信箱 邮编 100044)

Superintended by Chinese Academy of Sciences

Sponsored by Institute of Remote Sensing Application,
CAS China Society of Image and Graphics
Institute of Applied Physics and Computational
Mathematics

Chief editor LI Xiaowen

Editor, Publisher Editorial and Publishing Board
of Journal of Image and Graphics
(P. O. Box 9718, Beijing 100101, China)
E-mail:jig@irsa.ac.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers
and Journals

Domestic All Local Post Offices in China

Foreign China International Book Trading Corporation
(P. O. Box 399, Beijing 100044, China)

Printed by Beijing Beilin Printing House

ISSN 1006-8961 CN11-3758/TB CODE ZTTXFZ 国内邮发代号: 82-831 国外发行代号: M1406 国内定价: 45.00 元

Journal of Image and Graphics

(Monthly, Started in 1996)

Vol. 17 No. 12 December 2012

Contents

Review

Overview of Gaussian mixture models, solving algorithms and visual applications Guan Tao, Li Lingling(1461)

Image Processing and Coding

Denoising method for color images based on chrominance model and curvelet transform
..... Zhang Yunqiang, Zhang Peilin, Wang Guode, Zhuo Hongbo(1472)

Improved incremental dissimilarity approximations algorithm using sub-vector sorting Li Yang, Pan Zhibin, Wu Xinpeng(1478)

Regularized image restoration algorithm on sparse gradient prior model Liu Weihao, Mei Lin, Cai Xuan(1485)

High accuracy sub-pixel global motion estimation based on upsampled gradient cross-correlation algorithm
..... Yu Yinghuai, Wang Jinrong(1492)

Image Analysis and Recognition

Adaptive corner detection based on chord-to-point distance accumulation
..... Wang Wanliang, Jin Yiting, Zhao Yanwei, Hu Fengjun(1500)

Kernel optimization approach based on maximum subclass margin criterion
..... Zhang Jing, Yang Zhiyong, Yu Hongyun, Sun Xiaoyan(1509)

Kernel discriminant analysis based on canonical correlation Chen Weiqi, Cheng Qiang(1516)

Face recognition based on wavelet transform and weighted fusion of face features
..... Zhao Huanli, Wang Yude, Zhang Xuezhi, Xue Naiyu(1522)

Multi-target tracking algorithms with identification label An Guocheng, Xiao Tan(1528)

Image Understanding and Computer Vision

Curved surface marker used for cone pose measurement
..... Li Meng, Chen Derong, Zhou Guangming, Jiang Yuping, Gao Xiangxiao(1534)

Computer Graphics

The approach to automatically construct animation models based on 3D facial geometry and texture features recognition
..... Xu Ming, Qiao Ningbo, Wen Zhenkun, Zeng Xin, Cai Zhenxiang(1540)

Real-time snow and rain rendering in 3D GIS environment Li Huan, Fan Hong, Feng Hao(1548)

Medical Image Processing

Fuzzy C-means clustering algorithm combined with markov random field for brain MR image segmentation
..... She Lihuang, Zhong Hua, Zhang Shi(1554)

Remote Sensing Image Processing

Support vector regression color normalization method for image mosaic
..... Wu Wei, Luo Jiancheng, Li Junli, Yang Haiping, Shen Zhanfeng(1561)

Remote sensing image classification model based on projection pursuit regression Zhang Zhengjian, Li Zuoyong, Qin Ningsheng, Liu Zhihong, Ba Sang(1568)

中图分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2012)12-1461-11

论文引用格式: 管涛, 李玲玲. 高斯混合模型、求解算法及视觉应用综述[J]. 中国图象图形学报, 2012, 17(12): 1461-1471.

高斯混合模型、求解算法及视觉应用综述

管涛, 李玲玲

郑州航空工业管理学院计算机科学与技术系, 郑州 450015

摘要: 高斯混合模型(GMMs)是统计学习理论的基本模型,在可视媒体领域应用广泛。近些年来,随着可视媒体信息的增长和分析技术的深入,GMMs在(纹理)图像分割、视频分析、图像配准、聚类等领域有了进一步的发展。从GMMs的基本模型出发,从理论和应用的角度讨论和分析了GMMs的求解算法,包括EM算法、变化形式等,论述了GMMs的模型选择问题;在线学习和模型约简。在视觉应用领域,介绍了GMMs在图像分段、视频分析、图像配准、图像降噪等领域的扩展模型与方法,详细地阐述了一些最新的典型模型的原理与过程,如用于图像分段的空约束GMMs、图像配准中的关联点漂移算法。最后,讨论了一些潜在的发展方向与存在的困难问题。

关键词: 高斯混合模型(GMMs);EM算法;聚类分析;图像分段;目标识别;图像配准;视觉

Overview of Gaussian mixture models, solving algorithms and visual applications

Guan Tao, Li Lingling

Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China

Abstract: Gaussian Mixture Models (GMMs) is the basic model of statistical machine learning and widely applied to visual media fields. In recently years, with the rapid growth of visual media information and deep development of analytical techniques GMMs have obtained further developments in such fields as (texture) image segmentation, video analysis, image registration and clustering. This paper begins from the basic models of GMMs, discusses and analyzes from both theoretical and application aspects the solving methods of GMMs including EM algorithms and its variants, and expounds the two problems of model selection; online learning and model reduction. In visual applications, this paper introduces GMM-based models and methods in image segmentation, video analysis, image registration and image de-noising, expatiates the principles and processes of some newest and classical models, such as space-variant GMMs for image segmentation, coherent point draft algorithm for image registration. At last, this paper gives some possible latent directions and difficult problems.

Key words: Gaussian mixture models (GMMs); EM algorithm; clustering analysis; image segmentation; object recognition; image registration; vision

0 引言

几十年来,高斯混合模型(GMMs)一直为统计

学界、计算机界的学者和工程人员所重视^[1-2],在理论研究和视觉领域分别有着深入的发展和广泛的应用。目前GMMs已经在数值逼近、语音识别、人体特征识别、图像分类、图像去噪、图像重构、故障诊

收稿日期:2012-05-04;修回日期:2012-06-06

基金项目:国家自然科学基金项目(41171341);教育部新世纪优秀人才支持计划;河南省科技创新杰出青年计划(114100510006);航空科学基金光电控制技术国防科技重点实验室资助项目(20095155008);河南省科技厅项目(092300410140,122102210227);河南省教育厅项目(2011B520038,2010B520032);郑州市科技局项目(112PPTGY248-6)

第一作者简介:管涛(1974—),男,讲师,2004年于西安交通大学获计算机软件与理论工学博士学位,主要研究方向为统计机器学习、数据挖掘、图像分析与处理。E-mail:timm.guan@gmail.com

断、视频分析、信息过滤、密度估计、目标跟踪与识别等领域取得了良好的效果。

在数学原理上, GMMs 采用一组正态分布的线性组合构成一种复杂的分布, 来近似未知的数据分布, 模型中的未知参数通过训练样本估计。就 GMMs 的模型、算法和应用而言, 当今的主要工作包括以下几个方面: 1) GMMs 的扩展模型, 典型的如基于 Markov 随机场或者 Gibbs 随机场的空间约束 GMMs、基于图论的 GMMs 模型、流形空间正则化混合模型等; 2) GMMs 的求解算法, 除了经典的 EM 算法之外, 广义 EM 算法、信息熵方法、数值优化方法亦可被采用; 3) GMMs 模型选择问题, 具有固定分支的混合模型不能适应动态数据的变化, 需要在线构造, 同时, 混合模型中存在分支冗余的情况, 分支简化方法亦有不少学者研究; 4) GMMs 在视觉领域的应用, GMMs 在视觉媒体信息处理领域应用广泛, 典型的如图像分割、视频分割、目标识别、视频错误消除、图像配准与融合、图像去噪、图像增强、纹理分割、2D/3D 医疗图像处理。下面将对 GMMs 的模型求解、构造、简化、在视觉领域的应用等方面展开详细的论述。

1 高斯混合模型与 EM 等求解算法

在数据分析中, 高斯分布是统计学、机器学习、数据挖掘中的常用分布。但是, 在数据分布较为复杂的情况下, 单个高斯分布不能有效表示数据形态。而 GMMs (或其广义形式 IGMMs, 无限混合高斯分布) 可以近似许多复杂的数据分布, 因而在数据分析、视觉信息处理中应用广泛。在应用中, 一般假设观察数据满足独立性, 各个分支分布的参数亦相互独立。下面从简单的 1 维模型 GMMs 出发, 介绍 GMMs 的表示、解法和迭代公式等内容。

1.1 基本模型及其求解方法

1 维高斯混合模型具有如下的形式

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i G_i(x | \theta_i) \quad (1)$$

式中, $G_i(x | \theta_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left\{-\frac{|x - \mu_i|^2}{2\sigma_i^2}\right\}$, $\theta_i =$

(μ_i, σ_i) , $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \alpha_i > 0, f(\cdot)$ 为概率函数, θ_i 是一组未知的参数, 需要通过观察 (或样本) 进行估算。常用的估算方法有矩方法和极大似然方法。一

般情况下, 似然方法比较常用, 具有较好的性能, 但是它在某些问题上并不适用, Vapnik 在《统计学习理论的本质》中给出了一个经典的反例。给定观察 $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, 似然函数为

$$L(\Theta | \mathbf{X}) = \prod_{i=1}^N f(x_i) \quad (2)$$

式中, $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$ 。

现在目的是找到使得式 (2) 极大的参数 Θ 。对式 (2) 两边取对数, 得

$$l(\Theta) = \ln[L(\Theta | \mathbf{X})] = \sum_{j=1}^N \ln \sum_{i=1}^k \alpha_i G_i(x_j | \theta_i) \quad (3)$$

极大化式 (3) 计算模型的参数值。在非高斯分布的情况下, 式 (3) 可能较为复杂, 不能直接得到解析解, 通常使用 EM 算法进行计算。在高斯分布的情况下可以得到解析解, 高惠璇的著作中描述了多元高斯分布的参数计算方法^[1]。对式 (3) 利用 Lagrange 最优性条件及贝叶斯规则 (先验假设为 $\alpha_i = P(\theta_i)$) 得^[2]

$$w_{ij} = P(\theta_i | x_j) = \frac{\alpha_i G_i(x_j | \theta_i)}{f(x_j)} \quad (4)$$

$$\mu_i = \sum_{j=1}^N \frac{w_{ij} x_j}{w_{ij}} \quad (5)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^N w_{ij} \|x_j - \mu_i\|^2}{\sum_{j=1}^N w_{ij}} \quad (6)$$

这里介绍 3 种求解参数 α_i 的方法。在 GMMs 模型中 Bilmes 作了如下假定: 每个样本仅仅来自于某一个分支。这样, 样本和无关的分支就可以分离, 简化 α_i 的计算^[3]。Bishop 使用 Jensen 不等式构造 Q 函数的上界, 优化该上界得到 α_i 的解析式^[4]。从数据分类角度, Titterton 等人将数据的类标签看做取值 $\{0, 1\}$ 的未知变量 \mathbf{Z} , 然后和样本 \mathbf{X} 一起构成了变量 $\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Z}]$ 。同时, α_i 被看做一个 n 维向量, 其分量表示样本在分支中的比例。他们建立了一种有别于式 (1) 的混合模型^[5], 较容易地解得了 α_i 的表达式。综上, α_i 的解可以表达为

$$\alpha_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N w_{ij} \quad (7)$$

GMMs 模型能够快速、有效地近似图像特征空间分布、近似非线性分布数据。但是, 它也有明显的缺陷, 包括需要预先指定分支的数目、缺少有效的参数初始化的方法、易于收敛到局部极值、对非规则分

布数据集不能很好区分。在视频特征选取、分割、降噪等应用中,这些问题同样存在。

1.2 EM 算法与理论分析

EM 由 Dempster 等人在 1977 年提出,用于在数据缺失情况下参数的估计^[6]。该算法基本思想是建立优化目标:似然估计的期望,然后经过梯度优化,迭代计算得到最优参数。形式化过程可描述如下^[7]:

假设 $\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Z}]$, \mathbf{Z} 为缺失或未知数据随机变量,如图像像素的类标签。给定模型参数 θ , 密度表示为 $p(y|\theta) = p(x|z, \theta)p(z|\theta)$, x, y, z 分别表示对应 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ 的数据。极大化目标变为:给定 \mathbf{X} 和前一步参数估计值关于 \mathbf{Y} 的似然估计的期望,即

$$Q(\theta|\theta^{(k)}) = E(\log L(\mathbf{Y}, \theta) | \mathbf{X}, \theta^{(k)}) \quad (8)$$

初始未知参数值需要人为设定。当连续两步 Q 值相差很小时,即 $|Q(\theta, \theta^{(k+1)}) - Q(\theta, \theta^{(k)})| \leq \varepsilon$, 停止迭代。EM 算法亦适用于指数族分布,下面给出一个例子。

设样本 $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 满足参数为 θ 的指数分布 $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ 。已知 $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5, x_4$ 未知。可知 $L(\theta | \mathbf{X}) = \prod_{i=1}^4 f(x_i) = \theta^4 e^{-\theta(12+x_4)}$, 进而, $l(\theta | \mathbf{X}) = \ln L(\theta | \mathbf{X}) = 4 \ln \theta - (12 + x_4)\theta$, 对随机变量 \mathbf{X} 取期望得到关于 θ 的等式 $E(l(\theta | \mathbf{X})) = 4 \ln \theta - 12\theta - \frac{\theta}{\theta}$ 。由于指数分布的期望为 $\frac{1}{\theta}$, 故 $E(x_4) = \frac{1}{\theta}$ 。因此, $Q(\theta, \theta^{(k)}) = 4 \ln \theta - 12\theta - \frac{\theta}{\theta^{(k)}}$, 对 θ 求极值得到迭代公式 $\theta = \frac{4\theta^{(k)}}{12\theta^{(k)} + 1}$ 。

广义地讲,梯度上升规则不一定按照 EM 算法导出的步骤进行,实际上只要能保证 Q 函数单调或振荡上升即可。因此,出现了各种扩展和广义 EM 算法(GEM)。1993 年, Meng 和 Rudin 将 M 步的未知参数 θ 在低维空间中分解,然后在固定其他子参数情况下,求解关于某个子参数的低维优化问题。如此循环进行,直到得到原问题的解。该算法被称为期望条件最大化(ECM)算法^[8]。在仅考虑近似解的条件下, M 步的求解可以使用梯度优化的方法,如 Lange 提出了牛顿迭代规则

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} - [Q''(\theta|\theta^{(k)})]^{-1} Q'(\theta|\theta^{(k)})|_{\theta=\theta^{(k)}} \quad (9)$$

式中, $Q'(\theta|\theta^{(k)})$ 和 $Q''(\theta|\theta^{(k)})$ 为 $Q(\theta|\theta^{(k)})$ 的一阶

和二阶导数。不同的步长影响着参数求解速度。典型的加速方法有 Aitken 加速方法^[9]和拟牛顿 EM 加速^[10]。Aitken 方法将 $Q'(\theta|\theta^{(k)})$ 在 $\theta^{(k)}$ 处线性展开,不改变二阶导数项,使用中受限于 θ 与 $\theta^{(k)}$ 的接近程度。拟牛顿 EM 加速将对数似然的二阶矩阵分解,采用拟牛顿方法构造余项的近似矩阵。在 E 步的改进上, Wei 和 Tanner 提出了蒙特卡罗 EM 算法(MCEM)^[11]。它不直接采用 Q 函数作为优化目标,而是根据缺失变量的条件分布抽取样本,得到 Q 函数的蒙特卡罗估计 \hat{Q} , 然后计算其极大值。MCEM 依赖于样本数,不能很好地收敛于最优点。随机 EM(SEM)算法有几个不同的版本,原理有别,其中 Meng 和 Rudin 提出的 SEM 算法是一个比较著名的算法,用于产生一个极大似然估计的协方差矩阵的估计^[12]。EM 算法的改进方案还有很多,这里简单介绍了几个著名算法,其他的不再一一列举。

EM 算法在许多应用中具有良好的性能,其数学性质得到了广泛的研究。最初, Dempster 等人给出了 EM 算法收敛性证明,但后来北大的程兴新指出该证明存在错误,并给出了曲指数族下的收敛结果^[13]。1970 年, Wolfe 将聚类分析问题建模为估计多元混合分布的参数问题,给出了形式化的分析和参数计算方法^[14]。Xu 和 Jordan 比较了 EM 算法和一阶、超线性、二阶优化方法的联系,指出 EM 算法具有良好的收敛性和收敛速度^[15]。Ma 和 Fu 指出,虽然极大似然估计得到的是参数的局部最优解,但是只要高斯分支的重叠部分足够小,那么似然估计就能得到模型参数真实的值^[16]。在指数分布族的情况下,马江洪等人研究了混合模型的信息几何性质,给出了用于线状模式发现的广义 EM 算法^[17]。除了 GMMs 之外, EM 算法还可用于其他模型参数估计,如线性模型^[18]、隐马尔科夫模型(HMMs)^[3]、神经网络^[19]、基于小波的图像还原模型^[20]。

1.3 GMMs 的其他求解方法

GMMs 模型的参数求解不一定采用 EM 算法,其他常见的方法有模糊聚类、交叉熵、ICM (iterative conditional estimation) 算法^[21]、蒙特卡罗抽样^[22]等。1975 年, Bezdek 等人解释了混合模型的参数可以通过模糊 ISODATA 算法计算^[23]。他们用模糊隶属度计算点属于类的概率,得到 GMMs 近似的期望和方差。2001 年, Heskes 论证了混合模型和矢量编码(VQ)之间存在着紧密的联系,即退火矢量编码的优化目标和对数似然函数 Q 是一致的^[24]。因此,混

合模型的参数可以通过矢量编码学习。反之, VQ 过程亦可以通过高斯混合模型建模^[25-26]。利用信息熵、遗传算法、(拟)牛顿迭代也可以计算 GMMs 的参数^[10]。马继涌和高文使用交叉熵建立 GMMs 模型的优化目标, 然后通过遗传算法进行优化求解^[27], 但是该方法不能产生解析解, 只能得到近似解。在 GMMs 上, 除了推导过程有差异之外, ICM 算法得到的参数计算公式与经典方法基本一致。蒙特卡洛抽样方法也可用于 GMMs 参数的求解, 龚光鲁等人引入了类别标签变量 \mathbf{Z} , 在给定先验概率 α 和初始参数 θ 情况下, 从条件分布 $P(\mathbf{Z}|\alpha, \theta)$ 中抽取 \mathbf{Z} 的样本集 $\bar{\mathbf{Z}}$ 。随后, 利用 $\bar{\mathbf{Z}}$ 和已知数据 \mathbf{X} , 从 $P(\alpha|\bar{\mathbf{Z}})$ 和 $P(\theta|\bar{\mathbf{Z}}, \mathbf{X})$ 获取参数的估计^[22]。

2 模型选择问题

在非线性逼近问题中, 人们并不能预知合适的分支数目, 那么就存在模型选择的问题。一般情况下, 模型选择有一些典型的方法, 如最小描述长度原理 (MDL)、最短消息长度 (MML)^[28]、贝叶斯判据 (BIC)、似然比率^[29]。这些判据在 GMMs 中多有应用, 这里注重阐述 GMMs 在模型选择方面的一些崭新的研究进展, 包括分支的构造和约简。

在许多环境中, 固定分支的 GMMs 并不适合动态变化的数据, 需要在线构造。Meek 等人使用结构期望最大化方法 (SEM) 逐步增加 GMMs 的分支。该算法提供了一种模型的渐进构造方法, 在功能上类似 boosting 算法, 为密度估计、回归和分类模型的构造奠定基础^[30]。根据增量式密度估计方法, Vlassis 等人结合全局和局部搜索策略、用贪婪算法增量式构造最优的混合模型^[31]。Pavlovic 在 2004 年提出了提升混合学习 (BML), 是在线混合模型学习的著名算法, 其关键步骤在于: 待增加的分支和权重是定义在先前混合模型上目标函数的最优解^[32-34], 而该目标函数定义为混合模型似然对数之和。2011 年, 管涛等人提出了采用在线竞争学习和 GMMs 相结合的方法发现最优的聚类, 在在线输入的数据集上取得了不错的效果^[35]。

在模型约简方面, 采用的方法如函数逼近^[36]、KL 散度^[37]、变分贝叶斯^[38]、unscented 变换^[39]等。Zhang 和 Kwok 用函数逼近的方法简化了混合模型。他们将原始模型的分支分为若干个紧凑的聚集, 用简化的模型近似该子分布, 通过最小化误差上界得

到最优的混合模型^[36]。KL 散度亦称为相对熵, 表示一分布相对于另一分布的信息量, 在 GMMs 简化中应用广泛。给定混合模型 $f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(x)$ 和 $g(x) = \sum_{j=1}^m \beta_j g_j(x)$, $m < k$, GMMs 上 KL 散度定义为

$$d(f \| g) = \int f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx \quad (10)$$

由于两个 GMMs 之间的 KL 散度不具有解析解, 难于计算, 因此出现了许多近似散度的方法, 如蒙特卡洛抽样、unscented 变换等。蒙特卡洛抽样根据 f 抽取样本 x_i , 使得满足 $E_f \left[\log \frac{f(x_i)}{g(x_i)} \right] = d(f \| g)$, 从而

对于 n 个独立的样本, 有 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{f(x_i)}{g(x_i)} \rightarrow d(f \| g)$ ^[37]。Goldberger 和 Roweis 采用 KL 散度定义了一种新的距离度量, 即对于混合模型 f 和 g , 有

$$d(f \| g) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \min_{j=1}^m KL(f_i \| g_j) \quad (11)$$

该度量可以得到解析解, 结合层次聚类方法可降低混合模型的规模^[40]。Hershey 和 Olsen 给出了两个混合模型的 KL 散度的变分上、下界, 计算最优的简化模型^[37]。变分贝叶斯方法常用于模型选择问题, 亦可用来简化 GMMs^[38,41]。unscented 变换扩展了卡尔曼滤波器的功能, 可以有效地解决非线性变换问题, 实现了均值和方差信息的非线性变换^[39]。在功能上, unscented 变换类似蒙特卡洛抽样。在 GMMs 的简化中, Goldberger 等人将两个 GMMs 的 KL 散度近似地用 unscented 变换表示, 并计算该目标的极值, 大大简化了 GMMs^[42]。

3 GMMs 在视觉分析中的应用

3.1 图像分段

高斯混合模型在图像分割领域应用广泛, 在一般图像上经典过程是将像素映射到特征空间, 然后假设特征空间的点由待定参数的 GMMs 生成, 使用 EM 等算法计算最优的参数值以确定像素的类别。实际上, 在图像分割应用中 GMMs 被看做是一个聚类模型, 与特征选择、聚类分析、模型选择、EM 算法设计紧密相关。对多元数据建模, GMMs 存在几个典型的问题: 分支数的选择、EM 算法的初始化和特征选择。针对这些问题, Figueiredo 等人在 2002 年使用最短消息长度 (MML) 定义参数的目标函数, 构

造了一种新的 EM 求解算法^[28]。随后, Law 和 Figueiredo 等人将 MML 应用到混合模型中的特征选择问题^[43]。1997 年, Caillol 等人提出了模糊高斯混合用于模糊图像分割, 并通过模糊版本的 ICM 算法计算模型参数^[44]。该算法属于不同领域交叉融合的方法, 在基本算法原理上没有大的改变。2004 年, Zivkovic 等人提出了一种在线的学习方案。该方案采用偏置和最大后验概率从一组初始分支中递归地选择最优的分支^[45]。在医疗图像上, Pham 等人总结了图像分割的分类器方法, 指出基于 GMMs 的分类器模型的缺陷在于没有考虑空间约束, 并且在训练集上的手工交互耗时、繁琐, 训练得到的模型不能适应多变的解剖和生理图像的变化^[46]。对于多时相单通道单极 SAR 图像, Bazi 等人利用广义高斯混合模型检测图像变化^[47-48]。在国内, 采用 GMMs 研究图像分割的工作也有不少。目前, 在距离图像、SAR 图像、纹理图像有一些比较显著的工作。朱峰等人认为传统 GMMs 在彩色图像分割上效率较低, 提出了一种基于多阶抽样的 GMMs^[49]。他们根据采样定理计算聚类的最小采样数目, 利用 GMMs 对样本聚类, 其余像素根据与样本的距离归类。距离图像是 2.5 维的, 对这类图像向日华等人提出了基于表面法向的 GMMs 分割算法^[50]。纹理图像不同于一般的图像, 相关的图像分割研究内容较多, 将在后面详细阐述。

最近几年, 基于马尔科夫随机场空间约束的高斯混合模型成为图像分割中的流行模型之一。几个典型的工作包括 Sanjay-Gopal 等人的 SVFMM (spatially variant finite mixture model) 模型^[51]、改进模型 A-SVFMM (adaptive-SVFMM)、DCA-SVFMM (directional class-adaptive)^[52-55]。SVFMM 的基本思想是假设像素不仅与自身特性有关, 还与其 4 个近邻有关系, 并利用马尔科夫随机场 (MRF) 表示这种关系。由于 SVFMM 运算速度较慢, Blekas 等人利用投影方法提出了改进的 SVFMM 模型, 得到了更好的分段结果^[52]。Nikou 等人将高斯混合模型中用到的先验参数用狄利克莱分布和多项式分布表示, 构造了先验参数的图模型, 解决了分割中先验参数的预分配问题^[53-54]。随后, 针对空间模型求解过于复杂的问题, Nguyen 等人设计了一种新的迭代求解算法, 这种方法在本质上没有改变空间约束模型的优化目标, 属于一种优化策略^[55]。

空间约束模型 SVFMM 在图像分割中比通用模

型效果好^[51], 下面简单地阐述其思想。通常, 在 GMM 模型中 α_i 表示分支比例, 但在 SVFMM 中, α_i 是一个向量, 第 j 个分量表示 x_j 在第 i 个分支的权重。SVFMM 模型定义如下:

$$Q(\Theta | \Theta^{(k)}) = E \left\{ \ln \left[\prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^M [\alpha_i^j G_i(x_j | \theta_i)] \right] \right\} + \ln [g(\alpha_1, \dots, \alpha_M, \Theta)] \quad (12)$$

式中, $0 \leq \alpha_i^j \leq 1$, $\sum_{i=1}^M \alpha_i^j = 1$, $j \leq N$, 表示空间约束, $g(\cdot)$ 由随机场方法定义^[50]。在 SVFMM 模型中, $g(\cdot)$ 表达为

$$\frac{1}{Z_\beta} \exp \left[-\beta \sum_{(j,m) \in C} \sum_{i=1}^M (\alpha_i^j - \alpha_i^m)^2 \right] g(\mu) g(\sigma) \quad (13)$$

式中, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_M)$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_M)$, C 表示随机场中的邻域关系族。式 (13) 没有采用 C 中较为复杂的邻域关系。

GMMs 在纹理图像分割领域亦起到较大的作用。纹理图像分割与一般的图像分割不同, 要求分析像素的(局部)邻域特征或者模式, 如均值、方差、分布, 同时要求算法具有尺度、旋转不变性。纹理特征提取和分割的方法较多, 这里仅仅讨论与 GMMs 相关的一些模型和方法。Permuter 等人建立了 GMMs 在彩色纹理图像的不同特征空间的分类模型, 并比较了它们的性能^[56]。2010 年, Lategahn 等人将局部模式的联合分布建模为高斯混合分布, 避免了联合柱状图方法的不可解性和量化造成的信息损失, 同时, 达到了纹理特征的旋转不变性。模型的参数通过局部图像区域估计^[57]。2005 年, 余鹏等人分析和提取了纹理图像的 5 个局部统计特征, 包括像素均值、最大值、最小值、像素块中心点的像素值、像素块内灰度的标准差, 对纹理图像进行了有效地分割^[58]。肖春霞等人使用高斯混合模型定义了一种新的纹理图像边缘停止函数, 根据颜色、边缘等特征引导 Level Set 函数的演化^[59]。

3.2 视频分析

GMMs 和相关的统计方法广泛应用于视频分段、目标识别和跟踪、错误消除, 为手势识别、武器制导、智能交通、视频监控等应用提供服务。

在视频分段方面有不少的工作。早期, Weiss 和 Adelson 根据相邻像素之间的某种相似性, 如强度, 通过马尔科夫随机场建立了运动分割的统一框架^[60]。

Allili 等人定义了广义高斯分布,融入了向量的位置、尺度和形状参数。在此基础上,他们构建了广义高斯混合模型,并采用 MML 确定最优的分支数目^[61]。

视频分割与目标识别密不可分,就识别任务而言已有不少的研究工作。早期的 PFinder 系统采用多类统计模型表示被跟踪对象,具体讲,每个像素由 5 维向量组成,相似的像素通过聚类形成块(Blob)结构。该块结构通过高斯分布描述。同时,PFinder 把对象周围的场景看做纹理,每个纹理像素使用单个高斯分布表示^[62]。PFinder 系统较适于室内简单变化场景。考虑到物体多重表面和光照的变化,Stauffer 等人根据像素在不同时刻的特征值构造向量,然后对单个像素建立混合模型,通过在线算法更新估计模型参数。该方法能解决背景复杂、光照变换的场景下的识别问题^[63-65]。Greenspan 等人用基于 GMMs 的聚类方法分析特征空间中的连贯的空间-时间区域(对应视频中分段),继而,提出了分段 GMMs 框架(其中包含一系列的 GMMs)分析视频序列中的兴趣区域^[66]。

除了建模方法之外,在 GMMs 的参数优化方面有一些典型的工作。在像素级背景减除法中,Zivkovic 和 Heijden 采用迭代更新方程计算混合模型的参数,为每个像素选择了最优的分支数^[67]。背景减除法不能处理慢速运动物体和阴影,Friedman 和 Russell 提出了一种使用增量式 EM 学习算法的 GMMs 解决了这个问题^[68]。针对视频监控的自适应高斯混合模型的收敛速度问题, Lee 不使用全局、静态保持因子,而采用每帧图像的每个高斯分布的自适应学习过程来提高学习效率,同时保持了模型的稳定性^[69]。对 GMMs 模型而言,对背景变化的健壮性和对前景异常的敏感性是一对矛盾的因素, Lin 等人提出一种高层反馈的学习率方案,对不同位置和特性的像素自适应地设置 GMM 的学习率^[70]。

近些年来,视频错误消除是视频分析的热点之一^[71],有一些较新的研究工作采用了 GMMs^[72-73],其中 Persson 等人的方法比较典型。该方法通过离线数据建立 GMMs,估计参数,然后在线使用该模型,从周围像素估计丢失像素的值。其建模过程如下^[72]:给定 $\mathbf{Z} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, \mathbf{X} 是缺失数据, \mathbf{Y} 已知数据(如 \mathbf{X} 的周围像素),可得如下的混合模型

$$f(z) = \sum_{i=1}^M \alpha_i f_i(z) \quad (14)$$

现在目标是利用该模型估计未知量 \mathbf{X} ,即

$$\hat{x}(y) = E(\mathbf{X} | \mathbf{Y} = y) = \int x f(x | y) dx \quad (15)$$

所以需要估计 $f(x | y)$ 。通过贝叶斯规则 $f(x, y) = \frac{f(z)}{f(y)}$ 及 $f(y)$ 的边际化公式,可以得到 \mathbf{X} 估计的条件混合模型

$$f(x | y) = \sum_{i=1}^M p_i(y) f_i(x | y) \quad (16)$$

$$\text{式中, } p_i(y) = \frac{\alpha_i f_i(y)}{\sum_{i=1}^M \alpha_i f_i(y)}$$

从而得到用已知数据表示的估计量

$$\hat{x}(y) = \sum_{i=1}^M p_i(y) \mu_{x|y}^{(i)}(y) \quad (17)$$

式中, $\mu_{x|y}^{(i)}(y)$ 表示给定 y 条件下的均值。

2009 年, Persson 等人又将 PSNR(peak signal-to-noisy ratio) 引入到该模型。在估计模型参数的同时要求 PSNR 指标提高^[73]。

3.3 图像配准

图像配准和融合是图像和视频分析领域发展的方向之一,在医疗图像处理、航空制导、遥感图像处理、视频监控等领域应用广泛。图像配准通常建立在图像特征提取基础之上,常用的方法有最小二乘估计、小波变换、FFT、互信息等。GMMs 和 EM 算法亦可用于(3D)图像配准,近些年来,有不少的研究成果。Chui 和 Rangarajan 通过 GMMs 构建了特征点集配准映射,通过融合 EM 过程的模拟退火算法计算模型参数。该方法能够进行刚性和非刚性物体的配准^[74]。对于对象表面点集的刚体配准问题, Granger 和 Pennec 提出了 EM-ICP 算法,用于估计高斯混合模型中的参数^[75]。Horaud 等人用混合模型构建刚性物体和关节形状点集配准问题中内在的映射关系,然后提出了期望条件最大化(expectation conditional maximization)求解该模型的参数^[76]。该模型与 Myronenko 等人提出的 CPD(coherent point drift)算法^[77]思想类似,但不能很好地处理非刚性物体的配准。Jian 和 Vemuri 等人将输入的数据点集表示成高斯混合模型,然后最小化两个混合分布之间度量,如 L_2 距离^[78]。对于两个混合分布 P, Q , L_2 度量定义为

$$d_{L_2}(P, Q) = \int (P(x) - T(Q, \theta))^2 dx \quad (18)$$

式中, T, θ 分别为变换和参数。实际上,该距离度量是 Bregman 散度的特殊情况。

基于 GMM 的特征点集配准算法 CPD 是近年来出现的一种新型的图像配准算法^[76]。其基本思想可以通过如下的过程进行描述:给定两组点集 $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 和 $\mathbf{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, 这些点集可能是由两幅图像的边缘点组成。在 CPD 中, \mathbf{Y} 的每个元素看做一个高斯分布的中心, 通过 m 个中心构成的混合分布产生了数据 \mathbf{X} 。它们之间的关系可以通过 GMM 进行描述^[77], 即

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i p(x | \varphi_i) \quad (19)$$

$$p(x | \varphi_i) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{D/2}} \exp\left\{-\frac{\|x - y_i\|^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (20)$$

式中, $\varphi_i = (y_i, \sigma)$, σ 为方差, D 表示数据维度。

而实际上 \mathbf{Y} 并不恰好位于 \mathbf{X} 的中心位置。中心位置可能是 \mathbf{Y} 经过某种变换得到, 如刚体变换、仿射变换或者非刚体变换等。通常, 刚体变换比较简单, 可以假设第 2 组数据的点是由 y_i 经过刚体变换 $T(y_i; \theta) = s\mathbf{R}y_i + t$ ($\theta = \{s, \mathbf{R}, t\}$ 为参数) 得到, 那么式(20)就可以表示为

$$p(x | \varphi_i) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{D/2}} \exp\left\{-\frac{\|x - T(y_i; \theta)\|^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (21)$$

式(21)并不适合仿射点集和非刚体的配准, 在文献[77]中仿射点集配准的变换函数为 $T(y_m; \mathbf{B}, t) = \mathbf{B}y_m + t$, 式中 \mathbf{B}, t 为待定的参数。在非刚体配准中, 变换关系更为复杂, 转换关系为 $T(\mathbf{Y}, v) = \mathbf{Y} + v(\mathbf{Y})$, 式中 v 为位移函数。

不同的模型, 参数计算方法差异很大。相对来说, 刚体变换较易计算, 配准效果较好, 而非刚体配准中计算过程较为复杂, 配准结果误差较大。

3.4 噪声消除

噪声在图像和视频中不可避免, 消除噪声有利于图像与视频分割、特征提取、目标跟踪与识别等后期处理过程。GMMs 在图像噪声消除领域多有应用, 一个主要的方法是利用 GMMs 对图像的正交函数基分解系数建模, 消除噪声^[79-81]。1999 年, Wainwright 等人发展了一类多尺度随机过程来表达图像的统计本质, 该随机过程定义在多解析系数树的层叠结构之上。由于传统的方法不能表达小波系数中的非高斯性结构, Wainwright 等人用层叠结构生成的高斯尺度混合 (GSM) 变量 \mathbf{x} 来表示小波系数^[82-83]。该变量可以依分布分解为^[83]

$$\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{z}\mathbf{u} \quad (22)$$

且具有如下的密度形式

$$p_x(\mathbf{x}) = \int_0^\infty \frac{1}{[2\pi]^{N/2} |z\mathbf{C}_u|^{1/2}} \exp\left[-\frac{\mathbf{x}^T(z\mathbf{C}_u)^{-1}\mathbf{x}}{2}\right] p_z(z) dz \quad (23)$$

式中, \mathbf{C}_u 为满足标准正态分布的 \mathbf{u} 的方差。通过牛顿迭代和贝叶斯最小二乘估计得到 \mathbf{x} 的估计 $\hat{\mathbf{x}}$, 经小波重构后得到的图像即为降噪图像。

2003 年, Portilla 等人利用小波将图像分解为不同尺度金字塔子带, 在每个子带上使用 GSM 模型将观察向量 \mathbf{y} 表示为两个独立向量的乘积 (邻域向量 \mathbf{x} 和一个隐含的正尺度乘子 z) 与高斯白噪声 \mathbf{w} 之和^[84], 即

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{w} = \sqrt{z}\mathbf{u} + \mathbf{w} \quad (24)$$

然后, 通过贝叶斯最小二乘方法计算待定的邻域向量 \mathbf{x} 和尺度参数的条件期望, 经过反变换得到降噪图像。该计算过程隐含地消除了加在图像上的高斯白噪声。白静等人借鉴了文献[84]的建模思想, 在 SAR 图像的 Directionlet 变换域建立了高斯混合尺度模型, 抑制了 SAR 图像的相干斑噪声^[85]。Varghese 和 Wang 将 Portilla 等人的算法思想应用到视频解噪, 提出了时空高斯尺度混合模型, 在实现过程中不仅使用当前帧的邻域信息, 同时采用了前后相邻帧的信息^[81]。除了 GSM 模型之外, Kozik 等人利用了 GMMs 的非线性逼近能力对非高斯噪声建模, 取得了良好的效果^[86]。

4 结 语

文中阐述了基本 GMMs 模型、EM 求解算法, 以及它们在视觉应用领域中的发展, 重点解释了一些典型的应用模型。除了以上应用之外, GMMs 还可用于图像的恢复与重建^[84,87]、图像与视频压缩^[88]、图像增强、生物特征识别等领域。就目前的 GMMs 的研究进展和领域而言, 在未来可能具有如下一些发展领域和难点。

4.1 广义 GMMs 及扩展模型

除了基本的有限混合模型之外, 还有一些扩展的 GMMs。首先, 基于马尔科夫随机场的空间约束 GMMs 是一种流行的模型, 基本的定义和解法在文中已经阐述。其次, 当混合分支数目无限多的时候, GMMs 演变为 IGMMs (infinite GMMs), 它可以逼近任意非线性函数。在贝叶斯框架下的 IGMMs 可以

避免最优分支数的选择问题,但是同时带来了先验估计的问题^[89-91]。目前国内在这方面的研究未曾见到。

在指数分布族情况下的混合模型不仅包含了 GMMs,还包括了 Diriclet 混合模型、泊松混合模型^[92]、卡方混合模型、以及不同分布的混合模型^[93]等。不同分布的混合模型所蕴含的性质、求解方法、适用领域和应用模型值得研究,也具有一定的难度。现有的典型应用研究如泊松混合模型在文本主题分析中的应用,图像线状模式的识别^[17]。此外,高斯过程和 Diriclit 过程,以及它们形成的混合模型也是近些年来机器学习领域的研究热点。

4.2 参数求解算法

除了 EM 及 GEM 算法之外,混合模型的求解也可通过优化方法求解,如拟牛顿迭代、有效集方法、序列二次优化等。采用优化方法可以有效地提高算法的收敛速度,尤其对于空间约束等复杂模型,但是在似然框架下优化迭代规则的设计并不简单,算法收敛性能的评价还需研究。

在广义混合模型中,参数的先验之间存在依赖关系,可以通过图模型进行表达,参数本身亦服从某种分布,如文本挖掘中关于主题的多项式分布、图像分割中先验参数的 Diriclet 分布等。

4.3 可视问题的建模

由于混合模型具有非线性逼近能力,因此在很多应用环境中表现优良。构建可视问题的混合模型是一个数学建模的问题,其关键和难点在于:问题描述特征的选取;根据假设和可观察数据建立潜在的变量分类(或识别)模型。在不同假设条件下,如独立同分布或耦合,模型得到的结果可能相差较大。

近些年来,3D 图像分析得到广泛的发展,是一个热门的研究领域,包括 3D 图像分割、3D 图像重建等。但是混合模型在 3D 图像分析中的应用却很少见,值得研究。

参考文献 (References)

[1] Gao H X. Applied Multivariate Statistical Analysis [M]. Beijing: Beijing University Press, 2005. [高惠璇. 应用多元统计分析 [M], 北京: 北京大学出版社, 2005.]

[2] Redner R A, Walker H F. Mixture densities, maximum likelihood and the EM algorithm [J]. SIAM Review, 1984, 26 (2): 195-239.

[3] Bilmes J A. A gentle tutorial of the EM algorithm and its applica-

tion to parameter estimation for Gaussian mixture and Hidden Markov Models: TR-97-021 [R], Department of Electrical Engineering and Computer Science U. C. Berkeley, 1998.

- [4] Bishop C M. Neural Networks for Pattern Recognition [M]. Oxford: Clarendon Press, 1995.
- [5] Titterton D M, Smith A F M, Makov U E. Statistical Analysis of Finite Mixture Distribution [M]. New York: John Wiley & Sons, 1985.
- [6] Dempster A P, Laird N M, Rubin D B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm [J]. Journal of the Royal Statistical Society, B, 1977, 39 (1): 1-38.
- [7] Givens G H, Hoeting J A. Computational Statistics [M]. Beijing: Posts & Telecom Press, 2008.
- [8] Meng X L, Rubin D B. Maximum likelihood estimation via the ECM algorithm: A general framework [J]. Biometrika, 1993, 80 (2): 267-278.
- [9] Louis T A. Finding the observed information matrix when using the EM algorithm [J]. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 1982, 44 (2): 226-233.
- [10] Lange K. A gradient algorithm locally equivalent to the EM algorithm [J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 1995, 57 (2): 425-437.
- [11] Wei G C G, Tanner M A. A monte carlo implementation of the EM algorithm and the poor man's data augmentation algorithms [J]. Journal of the American Statistical Association, 1990, 85 (411): 699-704.
- [12] Meng X L, Rubin D B. Using EM to obtain asymptotic variance-covariance matrices: the SEM algorithm [J]. Journal of the American Statistical Association, 1991, 86 (416): 899-909.
- [13] Cheng X X. On the convergence of EM algorithm [J]. Journal of Peking University, 1987 (3): 1-8. [程兴新. EM 算法的收敛性 [J]. 北京大学学报, 1987 (3): 1-8.]
- [14] Wolfe J E. Pattern clustering by multivariate mixture analysis [J]. Multivariate Behavioral Research, 1970, 6 (3): 329-350.
- [15] Xu L, Jordan M I. On convergence properties of the EM algorithm for Gaussian mixtures [J]. Neural Computation, 1996, 8 (1): 129-151.
- [16] Ma J, Fu S. On the correct convergence of the EM algorithm for Gaussian mixtures [J]. Pattern Recognition, 2005, 38 (12): 2602-2611.
- [17] Ma J H, Ge Y. The finite mixture model and its EM algorithm for line-type image patterns [J]. Chinese Journal of Computers, 2007, 30 (2): 288-296. [马江洪, 葛咏. 图像线状模式的有限混合模型及其 EM 算法 [J]. 计算机学报, 2007, 30 (2): 288-296.]
- [18] Zheng S R, Shi N Z, Guo J H. The restricted EM algorithm under linear inequalities in a linear model with missing data [J]. Science in China Series A, 2005, 35 (2): 231-240. [郑述蓉, 史宁中, 郭建华. 含缺失数据线性模型的线性不等式约束 EM 算法 [J]. 中国科学 A 辑, 2005, 35 (2): 231-240.]
- [19] Ng S K, McLachlan G J. Using the EM algorithm to train neural

- networks; misconceptions and a new algorithm for multiclass classification [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2004, 15(3):738-749.
- [20] Figueiredo M A T, Nowak R D. An EM algorithm for wavelet-based image restoration [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2003, 12(8):906-916.
- [21] Pieczynski W. Statistical image segmentation [J]. *Machine Graphics and Vision*, 1992, 1(1/2):261-268.
- [22] Gong G L, Qian M P. *Applied Stochastic Processes and Stochastic Models in Algorithms and Intelligent Computation* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. [龚光鲁, 钱敏平. 应用随机过程教程及在算法和智能计算中的随机模型 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.]
- [23] Bezdek J C, Dunn J C. Optimal fuzzy partitions; A heuristic for estimating the parameters in a mixture of normal distributions [J]. *IEEE Transactions on Computers*, 1975, C-24(8):835-838.
- [24] Heskes, T. Self-organizing maps, vector quantization, and mixture modeling [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2001, 12(6):1299-1305.
- [25] Hedelin P, Skoglund J. Vector quantization based on Gaussian mixture models [J]. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 2000, 8(4):385-401.
- [26] Zhao D Y, Samuelsson J, Nilsson M. On entropy-constrained vector quantization using Gaussian mixture models [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2008, 56(12):2094-2104.
- [27] Ma J Y, Gao W. An approach for estimating parameters in Gaussian mixture model based on maximum cross entropy [J]. *Journal of Software*, 1999, 10(9):974-978. [马继涌, 高文. 基于最大交叉熵估计高斯混合模型参数的方法 [J]. 软件学报, 1999, 10(9):974-978.]
- [28] Figueiredo M A T, Jain A K. Unsupervised learning of finite mixture models [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2002, 24(3):381-396.
- [29] McLachlan G. On Bootstrapping the likelihood ratio test statistic for the number of components in a normal mixture [J]. *J. Royal Statistical Soc*, 1987, 36:318-324.
- [30] Meek C, Thiesson B, Heckerman D. Staged mixture modelling and boosting [C] // Proceedings of the Eighteenth conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2002:335-343.
- [31] Vlassis N, Likas A. A greedy EM algorithm for Gaussian mixture learning [J]. *Neural Processing Letters*, 2000, 15(1):77-87.
- [32] Pavlovic V. Model-based motion clustering using boosted mixture modeling [C] // Proceeding of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Grand Hyatt, Washington DC, USA: IEEE Press, 2004:811-818.
- [33] Kim M, Pavlovic V. A recursive method for discriminative mixture learning [C] // Proceedings of the 24th International Conference on Machine Learning. New York: ACM Press, 2007:409-416.
- [34] Du J, Hu Y, Jiang H. Boosted mixture learning of Gaussian Mixture Hidden Markov Models based on maximum likelihood for speech recognition [J]. *IEEE Transactions on Audio, Speech & Language Processing*, 2011, 19(7):2091-2100.
- [35] Guan T, Xue T. Image segmentation based on multiscale initialized Gaussian mixtures [C] // Proceeding of 2nd International Conference on Network Engineering and Computer Science. Xi'an: Springer, 2011:1228-1232.
- [36] Zhang K, Kwok J T. Simplifying mixture models through function approximation [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, 21(4):644-658.
- [37] Hershey J R, Olsen P A. Approximating the Kullback Leibler divergence between Gaussian Mixture Models [C] // Proceeding of IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP07). Honolulu, Hawaii, USA: IEEE Press, 2007, 4(6):317-320.
- [38] Bruneau P, Gelgon M, Picarougne F. Parsimonious reduction of Gaussian mixture models with a variational-Bayes approach [J]. *Pattern Recognition*, 2010, 43(3):850-858.
- [39] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2004, 92(3):401-422.
- [40] Goldberger J, Roweis S. Hierarchical clustering of a mixture model [C] // Advances in Neural Information Processing Systems. Vancouver, Canada: MIT Press, 2005:505-512.
- [41] Attias H. A variational Bayesian framework for graphical models [C] // Advances in Neural Information Processing Systems. Denver, Colorado, USA: MIT Press, 2000:209-215.
- [42] Goldberger J, Greenspan H, Dreyfuss J. Simplifying mixture models using the unscented transform [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2008, 30(8):1496-1502.
- [43] Law M H C, Figueiredo M A T, Jain A K. Simultaneous feature selection and clustering using mixture models [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004, 29(6):1-13.
- [44] Caillol H, Pieczynski W, Hillion A. Estimation of Fuzzy Gaussian mixture and unsupervised statistical image segmentation [J]. *IEEE Transactions on image processing*, 1997, 6(3):425-440.
- [45] Zivkovic Z, Van der Heijden F. Recursive unsupervised learning of finite mixture models [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004, 26(5):651-656.
- [46] Pham D L, Xu C, Prince J L. A survey of current methods in medical image segmentation [J]. *Annual Review of Biomedical Engineering*, 2000(2):315-337.
- [47] Bazi Y, Bruzzone L, Melgani F. An unsupervised approach based on the generalized Gaussian model to automatic change detection in multitemporal SAR images [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2005, 43(4):874-887.
- [48] Bazi Y, Bruzzone L, Melgani F. Image thresholding based on the EM algorithm and the generalized Gaussian distribution [J]. *Pattern Recognition*, 2007, 40(2):619-634.

- [49] Zhu F, Zhang X N, Chen J M, et al. Color image segmentation based on Gaussian mixture model with multi-sampling[J]. Journal of Image and Graphics, 2011, 16(4):566-571. [朱峰, 张晓娜, 陈健美, 等. 基于多阶抽样的高斯混合模型彩色图像分割[J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(4):566-571.]
- [50] Xiang R H, Wang R S. A range image segmentation algorithm based on Gaussian Mixture Model[J]. Journal of Software, 2003, 14(7):1250-1257. [向日华, 王润生. 一种基于高斯混合模型的距离图像分割算法[J]. 软件学报, 2003, 14(7):1250-1257.]
- [51] Sanjay-Gopal S, Hebert T J. Bayesian pixel classification using spatially variant finite mixtures and the generalized EM algorithm[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(7):1014-1028.
- [52] Blekas K. A spatially constrained mixture model for image segmentation[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2005, 16(2):494-498.
- [53] Nikou C. A class-adaptive spatially variant mixture model for image segmentation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(4):1121-1130.
- [54] Nikou C. A Bayesian framework for image segmentation with spatially varying mixtures[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(9):2278-2289.
- [55] Nguyen T M. An extension of the standard mixture model for image segmentation[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2010, 21(8):1326-1338.
- [56] Permuter H, Francos J, Jermyn I. A study of Gaussian mixture models of color and texture features for image classification and segmentation[J]. Pattern Recognition, 2006, 39(4):695-706.
- [57] Lategahn H, Gross S, Stehle T, et al. Texture classification by modeling joint distributions of local patterns with Gaussian mixtures[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(6):1548-1557.
- [58] Yu P, Feng J F. Texture image segmentation based on Gaussian mixture models[J]. Journal of Image and Graphics, 2005, 10(3):281-285. [余鹏, 封举富. 基于高斯混合模型的纹理图像分割[J]. 中国图象图形学报, 2005, 10(3):281-285.]
- [59] Xiao C X, Chu Y, Zhang Q, et al. Texture image segmentation using level set function evolved by Gaussian mixture model[J]. Chinese Journal of Computers, 2010, 33(7):1295-1304. [肖春霞, 初雨, 张青, 等. 高斯混合函数区域匹配引导的 Level-Set 纹理图像分割[J]. 计算机学报, 2010, 33(7):1295-1304.]
- [60] Weiss Y, Adelson E H. A unified mixture framework for motion segmentation; incorporating spatial coherence and estimating the number of models[C]//Proceeding of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. San Francisco, CA, USA. IEEE Press, 1996:321-326.
- [61] Allili M S, Ziou D, Bouguila N, et al. Image and video segmentation by combining unsupervised generalized Gaussian mixture modeling and feature selection[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2010, 20(10):1373-1377.
- [62] Wren C R, Azarbayejani A, Darrell T, et al. Pfister: real-time tracking of the human body[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1997, 19(7):780-785.
- [63] Stauffer C, Grimson W E L. Adaptive background mixture models for real-time tracking[C]//Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Collins, CO, USA: IEEE Press, 1999, 2: 246-252.
- [64] Stauffer C, Eric W, Grimson L. Learning patterns of activity using real-time tracking[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(8):747-757.
- [65] Harville M, Gordon G, Woodfill J. Foreground segmentation using adaptive mixture models in color and depth[C]//Proceedings of IEEE Workshop on Detection and Recognition of Events in Video. Vancouver, BC, Canada: IEEE Press, 2001: 3-11.
- [66] Greenspan H, Goldberger J, Mayer A. Probabilistic space-time video modeling via piecewise GMM[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(3):384-396.
- [67] Zivkovic Z, Van der Heijden F. Efficient adaptive density estimation per image pixel for the task of background subtraction[J]. Pattern Recognition Letters, 2006, 27(7):773-780.
- [68] Friedman N, Russell S. Image segmentation in video sequences: A probabilistic approach[C]// Proceedings of The 13th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. Rhode Island, USA: Morgan Kaufmann, 1997:175-181.
- [69] Lee D S. Effective Gaussian mixture learning for video background subtraction[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(5):827-832.
- [70] Lin H H, Chuang J H, Liu T L. Regularized background adaptation: A novel learning rate control scheme for Gaussian Mixture Modeling[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20(3):822-836.
- [71] Zhang Y, Xiang X, Zhao D, et al. Packet video error concealment with auto regressive model[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2012, 22(1):12-27.
- [72] Persson D, Eriksson T, Hedelin P. Packet video error concealment with Gaussian Mixture Models[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2008, 17(2):145-154.
- [73] Persson D, Eriksson T. Mixture model-and least squares-based packet video error concealment[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2009, 18(5):1048-1054.
- [74] Chui H, Rangarajan A. A feature registration framework using mixture models[C]//Proceedings of the IEEE Workshop on Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis. Hilton Head Island, South Carolina: IEEE Press, 2000:190-197.
- [75] Granger S, Pennec X. Multi-scale EM-ICP: A fast and robust approach for surface registration[C]// Proceedings of European Conference on Computer Vision (ECCV 2002). Copenhagen, Denmark: Springer, 2002(2353):418-432.

- [76] Horaud R, Forbes F, Yguel M, et al. Rigid and articulated point registration with expectation conditional maximization[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2011, 33(3):587-602.
- [77] Myronenko A, Song X. Point set registration: coherent point drift[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010, 32(12):2262-2275.
- [78] Jian B, Vemuri B C. Robust point set registration using Gaussian Mixture Models[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2011, 33(8):1633-1645.
- [79] Mihçak M K, Kozintsev I, Ramchandran K, et al. Low complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficients[J]. IEEE Signal Processing Letters, 1999, 6(12):300-303.
- [80] Ramchandran K, LoPresto S, Orchard M. Image coding based on mixture modeling of wavelet coefficients and a fast estimation quantization framework[C]// Proceedings of the Conference on Data Compression. Washington, DC, USA: IEEE Press, 1997: 221-226.
- [81] Varghese G, Wang Z. Video denoising based on a spatiotemporal Gaussian scale mixture model[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2010, 20(7):1032-1040.
- [82] Wainwright M J, Simoncelli E P, Willsky A S. Random cascades of Gaussian scale mixtures and their use in modeling natural images with application to denoising[C]//Proceedings of the 7th International Conference on Image Processing. Vancouver, BC, Canada: IEEE Press, 2000a:260-263.
- [83] Wainwright M J, Simoncelli E P. Scale Mixtures of Gaussians and the statistics of natural images[C]//Advanced in Neural Information Processing Systems. Denver, Colorado, USA: MIT Press, 2000b: 855-861.
- [84] Portilla J, Strela V, Wainwright M J, et al. Image denoising using scale mixtures of Gaussians in the wavelet domain[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(11):1338-1351.
- [85] Bai J, Hou B, Wang S, et al. SAR image denoising based on lifting directionlet domain Gaussian scale mixture model[J]. Chinese Journal of Computers, 2008, 31(7):1234-1241. [白静,侯彪,王爽,等. 基于提升 Direction-let 域高斯混合尺度模型的 SAR 图像噪声抑制[J]. 计算机学报, 2008, 31(7): 1234-1241.]
- [86] Kozick R J, Sadler B M. Maximum-likelihood array processing in non-Gaussian noise with Gaussian mixtures[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 48(12):3520-3535.
- [87] Guerrero-Colon J A, Mancera L, Portilla J. Image restoration using space-variant Gaussian scale mixtures in overcomplete pyramids[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2008, 17(1):27-41.
- [88] Ueda N, Nakano R, Ghahramani Z, et al. SMEM Algorithm for Mixture Models[J]. Neural Computation, 2000, 12(9):2109-2128.
- [89] Rasmussen C E. The infinite Gaussian Mixture Model[C]//Advances in Neural Information Processing Systems 12. Denver, Colorado, USA: MIT Press, 2000: 554-560.
- [90] Welling M. Flexible priors for infinite mixture models[C]//Proceedings of the Workshop on Learning with Nonparametric Bayesian Methods, 23rd ICML. Pittsburgh, PA: ACM Press, 2006:1-8.
- [91] Bouguila N, Ziou D. A countably infinite mixture model for clustering and feature selection[J]. Knowledge and Information Systems, 2011, 29(3):1-20.
- [92] Church K W, Gale W A. Poisson mixtures[J]. Natural Language Engineering, 1995, 1(2):1-24.
- [93] Delignon Y, Marzouki A, Pieczynski W. Estimation of generalized mixtures and its application in image segmentation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(10):1364-1375.