

Journal of Image
and Graphics

中国图象图形学报



ISSN1006-8961
CN11-3758/TB

2013 4
Vol.18 No.

中国科学院遥感应用研究所
中国图象图形学学会主办
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

Zhongguo Tuxiang Tuxing Xuebao

2013 年 4 月 第 18 卷 第 4 期(总第 204 期)

目次

综述

车载视觉系统中的行人检测技术综述 许腾, 黄铁军, 田永鸿(359)

图像处理和编码

利用边缘匹配矢量量化和变率编码的高嵌入效率信息隐藏 王凌飞, 潘志斌, 邓晓曼, 胡森(368)

小波变换和 SHA-1 相结合的图像压缩加密 李园园, 张绍武(376)

图像分析和识别

基于 Haar 纹理的非结构化道路消失点检测 王永忠, 文成林(382)

多种人群密度场景下的人群计数 覃勋辉, 王修飞, 周曦, 刘艳飞, 李远钱(392)

计算机图形学

大规模散乱点的 k 邻域快速搜索算法 杨军, 林岩龙, 王阳萍, 王小鹏(399)

三角 Bézier 曲面的几何约束形变 陈军(407)

遥感图像处理

面向测绘任务的光学遥感影像质量分级评定 王昱, 时红伟, 胡闻达(415)

采用高斯归一化水体指数实现遥感影像河流的精确提取 沈占锋, 夏列钢, 李均力, 骆剑承, 胡晓东(421)

地理信息技术

图层约束下的点状自然灾害风险地图综合 潘东华, 王静爱, 贾慧聪, 袁艺(429)

模板阴影体扩展方法 曹雪峰, 万刚, 李锋, 李明(436)

“第 9 届中国计算机图形学大会”专栏

利用 SIFT 特征的非对称匹配图像拼接盲检测 杜振龙, 杨凡, 李晓丽, 郭延文, 沈钢纲(442)

视觉感知的图像和视频抽象 宋杰, 徐丹, 时永杰(450)

局部线性模型优化的灰度图像彩色化 厉旭杰, 赵汉理, 黄辉(460)

分区域去运动模糊 张璐, 盛斌, 马利庄(467)

脑血管体绘制的快速表意式增强 吴腾飞, 骆岩林, 田云, 武仲科, 闫建平(476)

~~~~~  
第七届国际图象图形学学术会议征文通知 ..... 封 3

# Journal of Image and Graphics

(Monthly, Started in 1996)

Vol. 18 No. 4 April 2013

## Contents

### Review

Survey on pedestrian detection technology for on-board vision systems ..... Xu Teng, Huang Tiejun, Tian Yonghong(359)

### Image Processing and Coding

Highly efficient information hiding using SMVQ-compressed images and variable length coding  
..... Wang Lingfei, Pan Zhibin, Deng Xiaoman, Hu Sen(368)

Image compression and encryption based on DWT and SHA-1 ..... Li Yuanyuan, Zhang Shaowu(376)

### Image Analysis and Recognition

Vanishing point detection of unstructured road based on Haar texture ..... Wang Yongzhong, Wen Chenglin(382)

Counting people in various crowded density scenes using support vector regression  
..... Qin Xunhui, Wang Xiufei, Zhou Xi, Liu Yanfei, Li Yuanqian(392)

### Computer Graphics

Fast algorithm for finding the  $k$ -nearest neighbors of a large-scale scattered point cloud  
..... Yang Jun, Lin Yanlong, Wang Yangping, Wang Xiaopeng(399)

Shape modification of triangular Bézier surfaces with geometric constraints ..... Chen Jun(407)

### Remote Sensing Image Processing

Optical image quality grading assessment orienting to surveying & mapping mission requirements  
..... Wang Yu, Shi Hongwei, Hu Wenda(415)

Automatic and high-precision extraction of rivers from remotely sensed images with Gaussian normalized water index  
..... Shen Zhanfeng, Xia Liegang, Li Junli, Luo Jiancheng, Hu Xiaodong(421)

### Geoinformatics

Generalization for point features in risk mapping of natural hazards based on layer constraint  
..... Pan Donghua, Wang Jing'ai, Jia Huicong, Yuan Yi(429)

Extension method of stencil shadow volume ..... Cao Xuefeng, Wan Gang, Li Feng, Li Ming(436)

### Issum of Chinagraph'2012

Fogery image blind detection by asymmetric search based on SIFT  
..... Du Zhenlong, Yang Fan, Li Xiaoli, Guo Yanwen, Shen Ganggang(442)

Visual perception based image and video abstraction ..... Song Jie, Xu Dan, Shi Yongjie(450)

Local linear model optimization based grayscale image colorization ..... Li Xujie, Zhao Hanli, Huang Hui(460)

Motion deblurring based on image segmentation ..... Zhang Lu, Sheng Bin, Ma Lizhuang(467)

Fast illustrative enhancements on volume rendering of cerebral vessel  
..... Wu Tengfei, Luo Yanlin, Tian Yun, Wu Zhongke, Yan Jianping(476)

中图法分类号: TP391.72 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2013)04-0407-08

论文引用格式: 陈军. 三角 Bézier 曲面的几何约束形变[J]. 中国图象图形学报, 2013, 18(4): 407-414.

## 三角 Bézier 曲面的几何约束形变

陈军

宁波工程学院理学院, 宁波 315211

**摘要:** 利用三角 Bézier 曲面的矩阵表达形式, 把几何约束下的形状调整算法从曲线和张量积曲面推广到三角 Bézier 曲面, 使得三角 Bézier 曲面在形变后既能保持外形大致不变, 又能满足一系列事先指定的几何约束(点约束和法向约束)。利用 Lagrange 乘子法, 几何约束形变的条件极值问题被转化为线性方程组的求解问题, 以便于快速计算。特别地, 三角 Bézier 曲面在形变前后还可以满足边界曲线在角点处保持( $C^a, C^b, C^c$ )连续。数值实例表明, 该算法简单有效, 便于 CAD(计算机辅助设计)系统进行交互。

**关键词:** 计算机辅助几何设计; 三角 Bézier 曲面; 形状调整; 几何约束

## Shape modification of triangular Bézier surfaces with geometric constraints

Chen Jun

Faculty of Science, Ningbo University of Technology, Ningbo 315211, China

**Abstract:** Based on the matrix form of triangular Bézier surfaces, the shape modification with geometric constraints is extended from the curve and the tensor product surface to the triangular Bézier surface. The new triangular Bézier surface does not only keep the shape nearly unchanged, but also meets the geometric constraints (multiple position and normal direction constraints). With the help of the Lagrange multiplier method, the conditional extremum problem from the shape modification with geometric constraints is equivalent to solving a system of linear equations. Particularly, the new triangular Bézier surface with the boundary ( $C^a, C^b, C^c$ ) continuity constraints at three corners also can be obtained. Finally, the numerical examples show the validity and effectiveness in the interactive design in CAD systems.

**Key words:** computer aided geometric design; triangular Bézier surface; shape modification; geometric constraint

## 0 引言

在几何造型中, 几何外形的设计通常无法一次成型。因此, 为提高几何造型的灵活性, 在曲线曲面完成初步设计后对其进行形状调整, 是计算机辅助设计与制造中的一项重要内容。在参数曲线曲面交互设计中, 对控制顶点和权因子进行修改是最常见的手段<sup>[1-2]</sup>。不过, 简单地调整控制顶

点或权因子虽然可以大致地修改外形, 但是其精确性并不能得到保证。同时, 对于设计人员而言, 手工修改控制顶点和权因子的过程过于繁杂, 且无法顾及复杂曲线曲面的光顺性, 不利于几何造型的进行。

由此, 为了能够直观方便地控制和修改曲线曲面的外形, 研究人员陆续提出了一些满足几何约束条件的形变方法。针对参数曲线, 为使形变后的曲线能够满足点约束或切向约束, 研究人员采用了许

收稿日期: 2012-01-19; 修回日期: 2012-09-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(40901241); 宁波市自然科学基金项目(2011A610174)

第一作者简介: 陈军(1982—), 男, 讲师, 2010年于浙江大学获应用数学专业博士学位, 主要研究方向为计算机辅助几何设计、计算机图形学、数字几何处理。E-mail: chenjun88455579@163.com

多不同的方法:文献[3-6]着眼于控制顶点的偏移量,通过改变控制顶点来修改非均匀有理 B 样条(NURBS)曲线或 Bézier 曲线的外形;而文献[7-8]调整的是 NURBS 曲线的权因子;文献[9-10]应用有限元方法,通过优化曲线能量来调整曲线;文献[11]采用一种全新的方式,仿照 Coons 曲面的生成方式来构造曲线。而为了使参数曲面在形变后能够满足点约束、法向约束或曲线约束,同样也有不少有效的方法:文献[12-15]把形变方法从曲线推广到张量积曲面上;文献[16]将各种几何约束条件转化为曲面的外部能量约束项后,把 NURBS 曲面的形变问题转化为无约束优化问题;文献[17-18]引入了建筑设计中的力密度概念,使之应用于 B 样条曲面的形变;文献[19]利用 Cao En 曲面模型与合成函数来进行 NURBS 曲面的形变。

这些形变方法都能通过拖拽等直观简便的交互手段,使得新生成的参数曲线曲面既能在交互前后保持外形大致不变,又能满足一定的几何约束——即新生成的曲线满足点约束或切向约束,新生成的曲面满足点约束、法向约束或曲线约束。

然而,迄今为止,已有的关于曲面的几何约束形变方法都是建立在张量积曲面上的,针对三角 Bézier 曲面的几何约束形变还没有相关的成果。三角 Bézier 曲面是几何造型中一种重要的工具,具有有效处理散乱数据点的插值,能够组合成任意的拓扑结构,构造灵活,适应性强等特点,在几何设计中应用日趋广泛<sup>[20]</sup>。因此探求三角 Bézier 曲面的几何约束形变方法,其重要性不亚于已有的在张量积曲面上的工作。但鉴于三角 Bézier 曲面其独特的表达式,相应的几何约束形变方法不能由曲线简单推广得到,必须另辟蹊径。

本文利用词典排序法<sup>[21]</sup>,把三角 Bézier 曲面的表达式改写为矩阵形式;以三角 Bézier 曲面必须满足的几何约束(点约束和法向约束)为约束条件,以曲面在形变前后的  $L_2$  距离为目标函数,利用 Lagrange 乘子法,把一个条件极值问题转化为线性方程组的求解问题,得到满足约束条件且使得目标函数最小的三角 Bézier 曲面。特别地,在曲面形变时,通常需要保持角点位置或者角点处切平面固定不变。这些约束可以被统一地看做三角 Bézier 曲面在角点处保持某些特定的连续阶,从而可以作为新的几何约束添加到条件极值问题已有的约束条件中,

再进行求解。

## 1 三角 Bézier 曲面的矩阵表达

给定空间中的  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  个点  $\{T_{i,j,k}\}_{i+j+k=n}$ , 定义三角域  $T$  上的  $n$  次三角 Bézier 曲面为

$$\begin{aligned} T^n(s, t, r) &= \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(s, t, r) T_{i,j,k}, (s, t, r) \in T \\ s, t, r &> 0, s + t + r = 1 \\ B_{i,j,k}^n(s, t, r) &= \frac{n!}{i!j!k!} s^i t^j r^k \end{aligned} \quad (1)$$

利用词典排序法,在把  $B_{i,j,n-i-j}^n(s, t, 1-s-t)$  和  $T_{i,j,n-i-j}$  分别写作  $B_{ij}^n(s, t)$  和  $T_{ij}$  后,式(1)中的  $n$  次三角 Bézier 曲面可以用矩阵表达为

$$T^n(s, t) = \sum_{i+j \leq n} B_{ij}^n(s, t) T_{ij} = B^n T^n$$

$$s, t \geq 0, s + t \leq 1$$

这里

$$B^n = (B_{n,0}^n(s, t), B_{n-1,1}^n(s, t), B_{n-1,0}^n(s, t), \dots, B_{0,n}^n(s, t), \dots, B_{0,0}^n(s, t))$$

$$T^n = (T_{n,0}^n, T_{n-1,1}^n, T_{n-1,0}^n, \dots, T_{0,n}^n, \dots, T_{0,0}^n)^T$$

为方便计算  $B^n$  和  $T^n$  中各元素的位置,引入符号  $I = (i, j, n)$  和  $|I|$ , 定义为

$$|I| = |(i, j, n)| = \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} + n - i - j + 1$$

显然,  $T_{i,j}$  是  $T^n$  中的第  $|I|$  个元素。

## 2 问题的描述

对于  $m$  次三角 Bézier 曲面  $P(s, t)$ , 给定曲线上的  $r$  个点  $\{S_k = P(s_k, t_k)\}_{k=1}^r$ , 空间中的  $r$  个点  $\{T_k\}_{k=1}^r$  以及  $r$  个单位向量  $\{N_k\}_{k=1}^r$ , 求  $m$  次三角 Bézier 曲面  $Q(s, t)$ , 使得  $T_k$  在曲面  $Q(s, t)$  上且  $T_k = Q(s_k, t_k)$ ,  $N_k$  是  $T_k$  在曲面  $Q(s, t)$  的法方向, 同时  $P(s, t)$  和  $Q(s, t)$  之间的  $L_2$  距离达到最小。这里  $P(s, t)$  和  $Q(s, t)$  之间的  $L_2$  距离定义为两者之差的  $L_2$  范数的平方, 即

$$\varepsilon = \iint_T \|Q(s, t) - P(s, t)\|_2^2 ds dt$$

## 3 角点处无约束的几何约束形变

不妨设  $P(s, t)$  和  $Q(s, t)$  的控制顶点分别为

$\{P_{i,j} = (P_{i,j}^x, P_{i,j}^y, P_{i,j}^z)\}_{0 \leq i+j \leq n}$  和  $\{Q_{i,j} = (Q_{i,j}^x, Q_{i,j}^y, Q_{i,j}^z)\}_{0 \leq i+j \leq n}$ , 利用词典排序法, 可以得到矩阵

$$\begin{aligned} P &= (P_x, P_y, P_z), Q = (Q_x, Q_y, Q_z) \\ P_l &= [P_{m,0}^l, P_{m-1,1}^l, P_{m-1,0}^l, \dots, P_{0,m}^l, \dots, P_{0,0}^l]^T \\ Q_l &= [Q_{n,0}^l, Q_{n-1,1}^l, Q_{n-1,0}^l, \dots, Q_{0,n}^l, \dots, Q_{0,0}^l]^T \\ l &= x, y, z \end{aligned}$$

那么,  $Q(s, t)$  的控制顶点  $Q$  的求解, 就可以转化为一个条件极值问题

$$\begin{aligned} \min \mathcal{E} &= \iint_T \|Q(s, t) - P(s, t)\|^2 ds dt = \\ &= \sum_{l=x,y,z} \iint_T (B^n Q_l - B^m P_l)^T (B^n Q_l - B^m P_l) ds dt = \\ &= \sum_{l=x,y,z} Q_l^T G_{m,n} Q_l - 2(P_l^T G_{m,n}) Q_l + P_l^T P_l \\ \text{s. t. } T_k &= Q(s_k, t_k) = B^n(s_k, t_k) Q \\ \frac{\partial}{\partial s} Q(s_k, t_k) \cdot N_k &= \left( \frac{\partial}{\partial s} B^n(s_k, t_k) Q \right) \cdot N_k = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} Q(s_k, t_k) \cdot N_k &= \left( \frac{\partial}{\partial t} B^n(s_k, t_k) Q \right) \cdot N_k = 0 \\ k &= 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)中的矩阵  $G_{m,n}$  采用了文献[22]的写法, 其元素  $g_{|I|, |J|}$  定义为

$$g_{|I|, |J|} = \iint_T B_I^m(s, t) B_J^n(s, t) ds dt = \frac{\Delta}{\binom{m+n+2}{2}} \times \frac{\binom{I+J}{I}}{\binom{m+n}{m}}$$

式中,  $I = (i_1, j_1, m)$ ,  $J = (i_2, j_2, n)$ ,  $\Delta$  为三角形  $T$  的面积,  $\binom{I+J}{I}$  定义为

$$\binom{I+J}{I} = \binom{i_1+i_2}{i_1} \binom{j_1+j_2}{j_1} \binom{m+n-(i_1+i_2+j_1+j_2)}{m-i_1-j_1}$$

显然  $G_{m,n}$  是一个实正定对称矩阵。

对于此条件极值问题的求解, Lagrange 乘子法是一个自然的选择, 相应的 Lagrange 方程为

$$\begin{aligned} L &= \sum_{l=x,y,z} (Q_l^T G_{m,n} Q_l - 2(P_l^T G_{m,n}) Q_l) + \\ &+ \sum_{k=1}^r (B^n(s_k, t_k) Q - T_k) \cdot \lambda_k + \\ &+ \sum_{k=1}^r \alpha_k \left( \left( \frac{\partial}{\partial s} B^n(s_k, t_k) Q \right) \cdot N_k \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^r \beta_k \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} B^n(s_k, t_k) Q \right) \cdot N_k \right) \end{aligned} \quad (3)$$

这里  $\lambda_k = [\lambda_k^x, \lambda_k^y, \lambda_k^z]^T$ ,  $\{\alpha_k\}_{k=1}^r$ ,  $\{\beta_k\}_{k=1}^r$  为 Lagrange 算子。如果令  $\frac{\partial}{\partial Q_{i,j}^x}(L)$ ,  $\frac{\partial}{\partial Q_{i,j}^y}(L)$ ,  $\frac{\partial}{\partial Q_{i,j}^z}(L)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \lambda_k^x}(L)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \lambda_k^y}(L)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \lambda_k^z}(L)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \alpha_k}(L)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \beta_k}(L)$  ( $0 \leq i+j \leq n, k=1, 2, \dots, r$ ) 为零, 得到

$$\begin{cases} B^n(s_k, t_k) Q = T_k & k = 1, 2, \dots, r \\ \left( \frac{\partial}{\partial s} B^n(s_k, t_k) Q \right) \cdot N_k = 0 & k = 1, 2, \dots, r \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} B^n(s_k, t_k) Q \right) \cdot N_k = 0 & k = 1, 2, \dots, r \\ 2G_{m,n} Q_l + \sum_{k=1}^r (\lambda_k^l (B^n(s_k, t_k))^T + \delta_k \left( \frac{\partial}{\partial s} B^n(s_k, t_k) \cdot N_k^l \right)^T + \gamma_k \left( \frac{\partial}{\partial t} B^n(s_k, t_k) \cdot N_k^l \right)^T) = 2(G_{m,n})^T P_l & l = x, y, z \end{cases} \quad (4)$$

这样, 利用 Lagrange 乘子法, 可以把所求的条件极值问题转化为一个线性方程组的求解问题, 由此得到  $Q(s, t)$  的控制顶点  $Q$  的值。若要对形变的效果进行评价, 只需把  $Q$  代回到目标函数, 即可得到形变前后的误差。

## 4 角点处边界曲线保持 $(C^a, C^b, C^c)$ 连续的几何约束形变

### 4.1 角点处边界曲线保持 $(C^a, C^b, C^c)$ 连续

对于图1中的  $m$  次三角 Bézier 曲面  $P(s, t, r)$ , 其在  $s=0, t=0$  和  $r=0$  时的3条边界如图1所示, 分别记为  $P_s(t)$ ,  $P_t(s)$  和  $P_r(s)$ 。同理, 若有另一张  $m$  次三角 Bézier 曲面  $Q(s, t, r)$ , 其对应的边界也可记为  $Q_s(t)$ ,  $Q_t(s)$  和  $Q_r(s)$ 。

当  $P(s, t, r)$  和  $Q(s, t, r)$  的3个角点分别在  $T_{n,0}$ ,  $T_{0,n}$  和  $T_{0,0}$  重合时, 对于指定的非负整数  $a, b, c$ , 若  $P_s(t)$  和  $Q_s(t)$  在首末端点处分别有  $C^c, C^b$  连续,  $P_t(s)$  和  $Q_t(s)$  在首末端点处分别有  $C^c, C^a$  连续,  $P_r(s)$  和  $Q_r(s)$  在首末端点处分别有  $C^b, C^a$  连续, 则称  $P(s, t, r)$  和  $Q(s, t, r)$  在角点处保持  $(C^a, C^b, C^c)$  连续。

根据两张  $m$  次三角 Bézier 曲面  $P(s, t, r)$  和  $Q(s, t, r)$  在角点处保持  $(C^a, C^b, C^c)$  连续的定义, 在非负整数  $a, b, c$  取某些特定值时, 其有着特殊的几何意义:



1)  $a=b=c=0$ , 对照图 1, 当  $a=0$  时, 边界曲线  $P_r(s)$  和  $Q_r(s)$  在  $s=1$  处重合于角点  $T_{n,0}$ , 同理可得, 此时两张曲面在三个角点处重合;

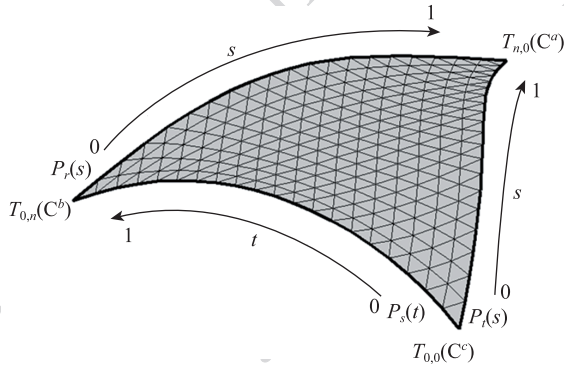


图 1 边界曲线在角点处的连续阶

Fig. 1 The continuity at the corners along the corresponding boundary directions

2)  $a=b=c=1$ , 对照图 1, 当  $a=0$  时, 边界曲线  $P_r(s)$  和  $Q_r(s)$  在角点  $T_{n,0}$  处有共同的切线, 边界曲线  $P_l(s)$  和  $Q_l(s)$  也在角点  $T_{n,0}$  处有共同的切线, 由此两张曲面在角点  $T_{n,0}$  处有共同的切平面, 同理可得, 此时两张曲面在 3 个角点处有共同的切平面。

#### 4.2 几何约束形变

在对曲面进行形变操作时, 用户往往会要求能够保留部分边界信息, 如形变前后 3 个角点不变, 角点处切平面不变。根据 4.1 节的分析, 形变前后的两张曲面只需在角点处保持  $(C^a, C^b, C^c)$  连续, 就可以满足这些边界条件的约束。

仿照文献 [23], 这里构造  $\frac{(n+1)(n+2)}{2} \times$

$\frac{(m+1)(m+2)}{2}$  矩阵  $Q^{\text{III}}$ , 其元素  $\tilde{a}_{uv}$  定义为

$$\tilde{a}_{uv} = \begin{cases} \tilde{b}_{i+1,j+1}^{\text{II},a} & \begin{cases} u = \frac{(i+1)(i+2)}{2} \\ v = \frac{(j+1)(j+2)}{2} \end{cases} & 0 \leq i, j \leq a; \\ \tilde{b}_{i+1,j+1}^{\text{II},a} & \begin{cases} u = \frac{i(i+1)}{2} + 1 \\ v = \frac{j(j+1)}{2} + 1 \end{cases} & 0 \leq i, j \leq a; \\ \tilde{b}_{i+1,j+1}^{\text{I},b} & \begin{cases} u = \frac{(n-b+i)(n-b+i+1)}{2} + 1 \\ v = \frac{(m-b+j)(m-b+j+1)}{2} + 1 \end{cases} & 0 \leq i, j \leq b; \\ \tilde{b}_{i+1,j+1}^{\text{II},b} & \begin{cases} u = \frac{n(n+1)}{2} + i + 1 \\ v = \frac{m(m+1)}{2} + j + 1 \end{cases} & 0 \leq i, j \leq b; \\ \tilde{b}_{i+1,j+1}^{\text{I},c} & \begin{cases} u = \frac{(n-c+i+1)(n-c+i+2)}{2} \\ v = \frac{(m-c+j+1)(m-c+j+2)}{2} \end{cases} & 0 \leq i, j \leq c; \\ \tilde{b}_{i+1,j+1}^{\text{I},c} & \begin{cases} u = \frac{n(n+3)}{2} - c + i + 1 \\ v = \frac{m(m+3)}{2} - c + j + 1 \end{cases} & 0 \leq i, j \leq c; \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{(i+1) \times (i+1)}^{\text{I}} &= (\bar{b}_{k,l}^{\text{I},i}) = \\ &= \begin{pmatrix} b_{i,i} & b_{i-1,i} & \cdots & b_{0,i} \\ 0 & b_{i-1,i-1} & \cdots & b_{0,i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{0,0} \end{pmatrix} \\ \mathbf{Q}_{(i+1) \times (i+1)}^{\text{II}} &= \\ (\bar{b}_{k,l}^{\text{II},i}) &= \begin{pmatrix} b_{m,n} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{m,n-1} & b_{m-1,n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,n-i} & b_{m-1,n-i} & \cdots & b_{m-i,n-i} \end{pmatrix} \\ b_{i,j} &= \begin{cases} \frac{\binom{m}{i} \binom{n-m}{j-i}}{\binom{n}{j}} & 0 \leq i \leq m \text{ 且} \\ & i \leq j \leq i+n-m \text{ 且} \\ \binom{n}{j} & m \leq n \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

与文献[23]不同,此处并非处理三角 Bézier 曲面的降阶问题,那么就无需对矩阵  $\mathbf{Q}_{(i+1) \times (i+1)}^{\text{I}}$  和  $\mathbf{Q}_{(i+1) \times (i+1)}^{\text{II}}$  求逆,从而  $\bar{b}_{k,l}^{\text{I},i}$  和  $\bar{b}_{k,l}^{\text{II},i}$  的值,即矩阵  $\mathbf{Q}^{\text{III}}$  可通过简单计算得到。

由于三角 Bézier 曲面的边界曲线是 Bézier 曲线,那么根据两条 Bézier 曲线在端点处保持高阶连续时各控制顶点的关系<sup>[23]</sup>,可得  $\mathbf{P}(s,t)$  和  $\mathbf{Q}(s,t)$  在角点处保持  $(C^a, C^b, C^c)$  连续时,其部分控制顶点只需满足等式  $\mathbf{RQ} = \mathbf{Q}^{\text{III}}\mathbf{P}$  即可。这里  $\mathbf{R}$  为  $\frac{(n+1)(n+2)}{2} \times \frac{(n+1)(n+2)}{2}$  对角矩阵,其

$$r_{i,i} = 1, i =$$

$$\begin{cases} \frac{(l+1)(l+2)}{2} & l=1, \cdots, a \\ \frac{l(l+1)}{2} + 1 & l=0, 1, \cdots, a \\ \frac{(n-b+l)(n-b+l+1)}{2} + 1 & l=0, 1, \cdots, b \\ \frac{n(n+1)}{2} + l + 1 & l=0, 1, \cdots, b \\ \frac{(n-c+l+1)(n-c+l+2)}{2} & l=0, 1, \cdots, c \\ \frac{n(n+3)}{2} - c + l + 1 & l=0, 1, \cdots, c-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

由于矩阵  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{Q}^{\text{III}}$  中有许多行向量为零,所以不妨定义记号  $(\cdot)_{\text{Del}}$ , 矩阵  $(\mathbf{A})_{\text{Del}}$  表示删除矩阵  $\mathbf{A}$  中元素全为 0 的行向量。显然,根据矩阵乘法的定义,  $\mathbf{RQ} = \mathbf{Q}^{\text{III}}\mathbf{P}$  等价于  $(\mathbf{R})_{\text{Del}}\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}^{\text{III}})_{\text{Del}}\mathbf{P}$ 。不妨设  $(\mathbf{R})_{\text{Del}}$  的行数为  $s$ , 那么把这  $s$  个等式作为新的约束条件添加到无约束形变的条件极值问题中,可得

$$\begin{aligned} \min \varepsilon &= \sum_{l=x,y,z} \mathbf{Q}_l^{\text{T}} \mathbf{G}_{n,n} \mathbf{Q}_l - 2(\mathbf{P}_l^{\text{T}} \mathbf{G}_{m,n}) \mathbf{Q}_l + \mathbf{P}_l^{\text{T}} \mathbf{P}_l \\ \text{s. t. } \mathbf{T}_k &= \mathbf{Q}(s_k, t_k) = \mathbf{B}^n(s_k, t_k) \mathbf{Q} \\ \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{Q}(s_k, t_k) \cdot \mathbf{N}_k &= \\ \left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{B}^n(s_k, t_k) \mathbf{Q} \right) \cdot \mathbf{N}_k &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}(s_k, t_k) \cdot \mathbf{N}_k &= \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}^n(s_k, t_k) \mathbf{Q} \right) \cdot \mathbf{N}_k &= 0 \quad k=1, 2, \cdots, r \\ (\mathbf{R})_{\text{Del}} \mathbf{Q} &= (\mathbf{Q}^{\text{III}})_{\text{Del}} \mathbf{P} \end{aligned} \quad (5)$$

同样地,此处仍用 Lagrange 乘子法进行求解上述条件极值问题,相应的 Lagrange 方程为

$$\begin{aligned} L &= \sum_{l=x,y,z} (\mathbf{Q}_l^{\text{T}} \mathbf{G}_{n,n} \mathbf{Q}_l - 2(\mathbf{P}_l^{\text{T}} \mathbf{G}_{m,n}) \mathbf{Q}_l) + \\ &\sum_{k=1}^r (\mathbf{B}^n(s_k, t_k) \mathbf{Q} - \mathbf{T}_k) \cdot \boldsymbol{\lambda}_k + \\ &\sum_{k=1}^r \alpha_k \left( \left( \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{B}^n(s_k, t_k) \mathbf{Q} \right) \cdot \mathbf{N}_k \right) + \\ &\sum_{k=1}^r \beta_k \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}^n(s_k, t_k) \mathbf{Q} \right) \cdot \mathbf{N}_k \right) + \\ &\sum_{e=1}^s \sum_{l=x,y,z} ((\mathbf{R})_{\text{Del}} \mathbf{Q}_l - (\mathbf{Q}^{\text{III}})_{\text{Del}} \mathbf{P}_l) \cdot \boldsymbol{\gamma}_e \end{aligned} \quad (6)$$

这里,  $\{\boldsymbol{\lambda}_k = [\lambda_k^x, \lambda_k^y, \lambda_k^z]^{\text{T}}\}_{k=1}^r, \{\alpha_k\}_{k=1}^r, \{\beta_k\}_{k=1}^r, \{\boldsymbol{\gamma}_e = [\gamma_e^x, \gamma_e^y, \gamma_e^z]^{\text{T}}\}_{e=1}^s$  为 Lagrange 算子。令

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial q_{i,j}^x}(L), \frac{\partial}{\partial q_{i,j}^y}(L), \frac{\partial}{\partial q_{i,j}^z}(L), \\ &\frac{\partial}{\partial \alpha_k^x}(L), \frac{\partial}{\partial \alpha_k^y}(L), \frac{\partial}{\partial \alpha_k^z}(L), \\ &\frac{\partial}{\partial \beta_k^x}(L), \frac{\partial}{\partial \beta_k^y}(L), \frac{\partial}{\partial \beta_k^z}(L), \\ &\frac{\partial}{\partial \gamma_e^x}(L), \frac{\partial}{\partial \gamma_e^y}(L), \frac{\partial}{\partial \gamma_e^z}(L) \end{aligned}$$

$(0 \leq i+j \leq n, k=1, 2, \cdots, r, e=1, 2, \cdots, s)$  为零,得到



$$\begin{cases}
 \mathbf{B}^n(s_k, t_k) \mathbf{Q} = \mathbf{T}_k & k = 1, 2, \dots, r \\
 \left( \frac{\partial \mathbf{B}^n(s_k, t_k) \mathbf{Q}}{\partial s} \right) \cdot \mathbf{N}_k = 0 & k = 1, 2, \dots, r \\
 \left( \frac{\partial \mathbf{B}^n(s_k, t_k) \mathbf{Q}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{N}_k = 0 & k = 1, 2, \dots, r \\
 (\mathbf{R})_{\text{Del}} \mathbf{Q} = (\mathbf{Q}^{\text{III}})_{\text{Del}} \mathbf{P} \\
 2\mathbf{G}_{n,n} \mathbf{Q}_l + \sum_{k=1}^r \left\{ \lambda_k^l (\mathbf{B}^n(s_k, t_k))^{\text{T}} + \right. \\
 \quad \alpha_k \left( \frac{\partial \mathbf{B}^n(s_k, t_k)}{\partial s} \cdot \mathbf{N}_k^l \right)^{\text{T}} + \\
 \quad \left. \beta_k \left( \frac{\partial \mathbf{B}^n(s_k, t_k)}{\partial t} \cdot \mathbf{N}_k^l \right)^{\text{T}} \right\} + \\
 \quad \sum_{e=1}^s \gamma_e^l ((\mathbf{R})_{\text{Del}})^{\text{T}} = 2(\mathbf{G}_{m,n})^{\text{T}} \hat{\mathbf{P}}_l & l = x, y, z
 \end{cases} \quad (7)$$

这样,条件极值问题最终被转化为一个线性方程组的求解问题,由此得到  $\mathbf{Q}(s, t)$  的控制顶点  $\mathbf{Q}$  的值。

## 5 数值实例

图 2—图 4 分别是原始曲面,无角点约束的调整曲面,在角点处保持  $(C^0, C^0, C^0)$  连续的调整曲面。调整后受到两点以及相应两法向的约束。从直观效果和曲面误差图来看,曲面形变满足指定的几何约束,同时形变幅度较小,效果良好。

在实际操作中,曲线约束也是一种常见的几何约束。为实现此操作,只需把曲线离散成若干个<sup>[16-18]</sup>点,每个点的法向即为点在曲线上的主法向。这样,曲线约束就可转化为点和法向的约束,然后按照前面介绍的方法求得形变曲面。图 5 给出了一个具体的例子。

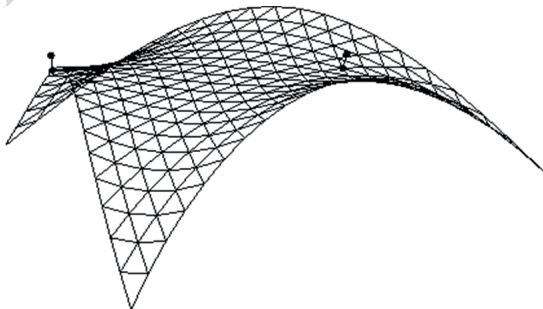
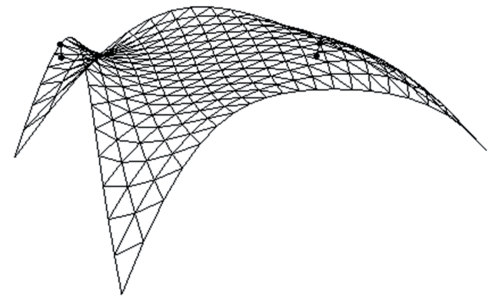
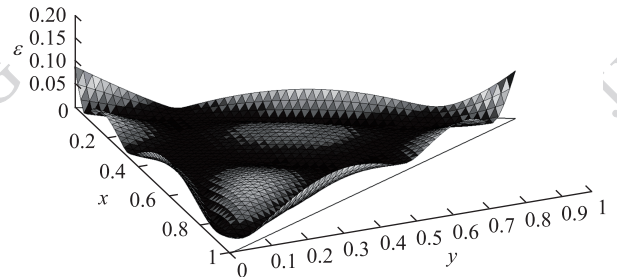


图 2 原始曲面  
Fig. 2 Original surface



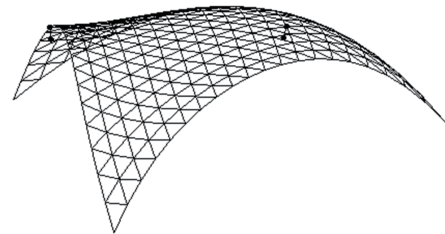
(a) 形变曲面



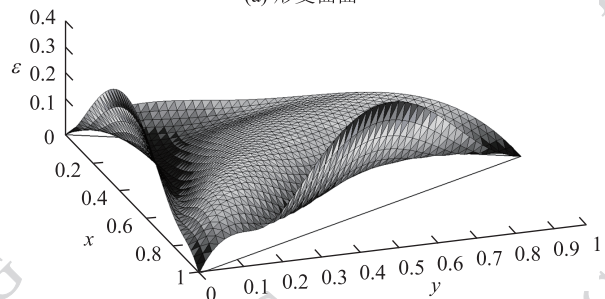
(b) 误差曲面

图 3 无角点约束的形变

Fig. 3 Shape modification without the boundary continuity constraints at three corners



(a) 形变曲面



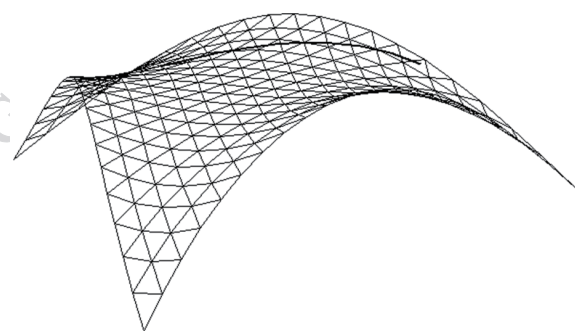
(b) 误差曲面

图 4 在角点处保持  $(C^0, C^0, C^0)$  连续的形变

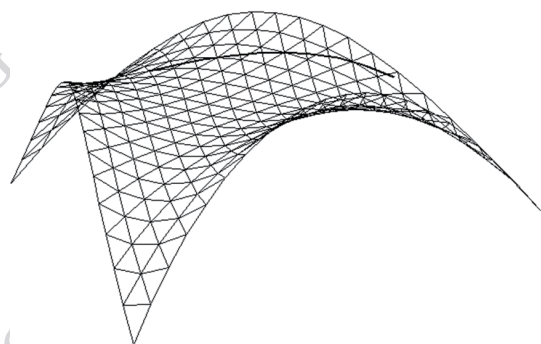
Fig. 4 Shape modification with the  $(C^0, C^0, C^0)$  boundary continuity constraints at three corners

## 6 结 论

为便于三角 Bézier 曲面在修改外形时能够自由快速地交互,利用 Lagrange 乘法,把一个几何



(a) 原始曲面以及表面上的曲线



(b) 形变曲面

图5 角点处保持 $(C^0, C^0, C^0)$ 连续的曲线约束形变

Fig. 5 Shape modification with curve constraint with the

(  $C^0, C^0, C^0$  ) boundary continuity constraints at three corners

约束形变问题转化为一个线性方程组的求解问题。此时,三角 Bézier 曲面在形变后既能保持外形大致不变,又能满足点约束、法向约束以及角点处连续阶约束。

目标函数取为三角 Bézier 曲面在形变前后的  $L_2$  距离。事实上,目标函数的选取并不唯一,曲面在形变前后其物理能量<sup>[12,14-16]</sup>的变化也是一个可行的选择。如何获得以物理能量为目标函数的形变曲面,及其与本文效果的比较,将是进一步研究的内容。

## 参考文献 (References)

- [1] Piegl L. Modifying the shape of rational B-splines. Part 1: curves [J]. Computer-Aided Design, 1989, 21(8), 509-518.
- [2] Piegl L. Modifying the shape of rational B-splines. Part 2: surfaces [J]. Computer-Aided Design, 1989, 21(9), 538-546.
- [3] Hu S M, Zhou D W, Sun J G. Shape modification of NURBS curves via constrained optimization [C]// Proceedings of the CAD/Graphics'99. Shanghai: Shanghai WenHui Press, 1999: 958-962. [胡事民,周登文,孙家广. 基于约束优化的 NURBS 曲线形状修改[C]//99CAD/图像会议论文集. 上海:上海文

汇出版社,1999:958-962.]

- [4] Xu L, Chen Y J, Hu Y N. Shape modification of Bézier curves by constrained optimization [J]. Journal of Software, 2002, 13(6):1069-1074. [徐立,陈玉健,胡毓宁. 基于约束优化的 Bézier 曲线的形状修改[J]. 软件学报, 2002, 13(6): 1069-1074.]
- [5] Wu Q B, Xia F H. Shape modification of Bézier curves by constrained optimization [J]. Journal of Zhejiang University: Science A, 2005, 6(S1), 124-127.
- [6] Han X L, Ren Y Q. Shape modification of Bézier curves by constrained optimization of position and tangent vector [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2008, 20(8): 1191-1195. [韩旭里,任叶庆. 基于位矢和切矢约束优化的 Bézier 曲线形状修改[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2008, 20(8):1191-1195.]
- [7] Juhász I. Weight-based shape modification of NURBS curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1999, 16(5), 377-383.
- [8] Guo B, Zhou D W. Weight-based shape modification of NURBS curve and its application in face modeling [J]. Journal of Computer Research and Development, 2004, 41(1):142-147. [郭钡,周登文. 基于权因子调整的 NURBS 曲线形状修改算法及其在人脸建模中的应用[J]. 计算机研究与发展, 2004, 41(1):142-147.]
- [9] Pourazady M, Xu X. Direct manipulations of B-spline and NURBS curves [J]. Advances in Engineering Software, 2000, 31(2), 107-118.
- [10] Cheng X G, Liu W J. Shape modification of B-spline curve via external loads [J]. Journal of Image and Graphics, 2011, 16(5), 898-902. [程仙国,刘伟军. 外载荷的 B 样条曲线变形[J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(5), 898-902.]
- [11] Wang Z G, Zhou L S, Wang X P. New method to modify NURBS curves [J]. Chinese Journal of Computers, 2004, 27(12):1672-1678. [王志国,周末水,王小平. 一种修改 NURBS 曲线形状的新方法[J]. 计算机学报, 2004, 27(12):1672-1678.]
- [12] Hu S M, Li Y F, Ju T, et al. Modifying the shape of NURBS surfaces with geometric constraints [J]. Computer-Aided Design, 2001, 33(12):903-912.
- [13] Xia F H, Wu Q B. Shape modification of Bézier surfaces by constrained optimization [J]. Journal of Image and Graphics, 2006, 11(2):265-268. [夏飞海,吴庆标. 基于约束优化的 Bézier 曲面形状修改[J]. 中国图象图形学报, 2006, 11(2): 265-268.]
- [14] Pourazady M, Xu X. Direct manipulations of NURBS surfaces subjected to geometric constraints [J]. Computers & Graphics, 2006, 30(4):598-609.
- [15] Cheng X G, Liu W J, Bian H Y. Shape modification of B-spline surface via external loads [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(9):146-150. [程仙国,刘伟军,卞宏友. 基于外载荷的 B 样条曲面变形[J]. 机械工程学报, 2011,

- 47(9):146-150.]
- [16] Zhu X, Hu S M, Sun J G. Shape modification of surfaces via external energy constraints [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2000, 12(9):651-655. [朱翔, 胡事民, 孙家广. 基于外部能量约束的曲面形状修改[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2000, 12(9):651-655.]
- [17] Wang Q, Ke Y L, Li J X. Shape modification of NURBS curves and surfaces based on force density method [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2007, 43(3):135-142. [王青, 柯映林, 李江雄. 基于力密度方法的 NURBS 曲线和曲面变形框架[J]. *机械工程学报*, 2007, 43(3):135-142.]
- [18] Han L, Raffaele D A, Qi R H. Interactive B-spline surface modeling based on force density method [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2009, 14(9):1900-1907. [韩丽, Raffaele D A, 祁瑞华. 基于力密度的交互式 B 样条曲面变形[J]. *中国图象图形学报*, 2009, 14(9):1900-1907.]
- [19] Wang H M. Study on deformation of NURBS surface using point-displacement constraint [J]. *Journal of Engineering Graphics*, 2009, 30(6):81-85. [王慧敏. 基于点位移约束的 NURBS 曲面变形研究[J]. *工程图学学报*, 2009, 30(6):81-85.]
- [20] Farin, G. *Triangular Bernstein-Bézier patches* [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1986, 3(2):83-127.
- [21] Dunkl C, Xu Y. *Orthogonal Polynomials of Several Variables* [M]. Cambridge:Cambridge University Press, 2001.
- [22] Rababah A. Distance for degree raising and reduction of triangular Bézier surfaces [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003, 158(2):233-241.
- [23] Hu Q Q, Wang G J. Optimal multi-degree reduction of triangular Bézier surfaces with corners continuity in the norm  $L_2$  [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, 215(1):114-126.