

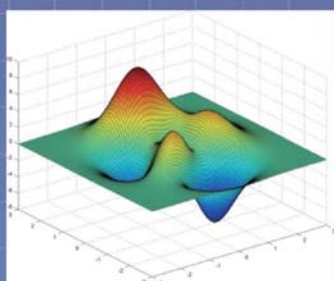


主办: 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

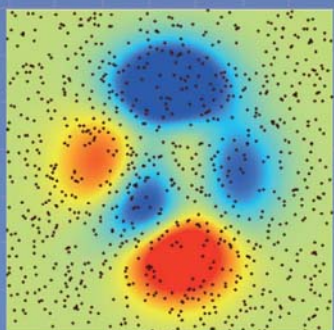
中国图象图形学报

2014
02
VOL.19

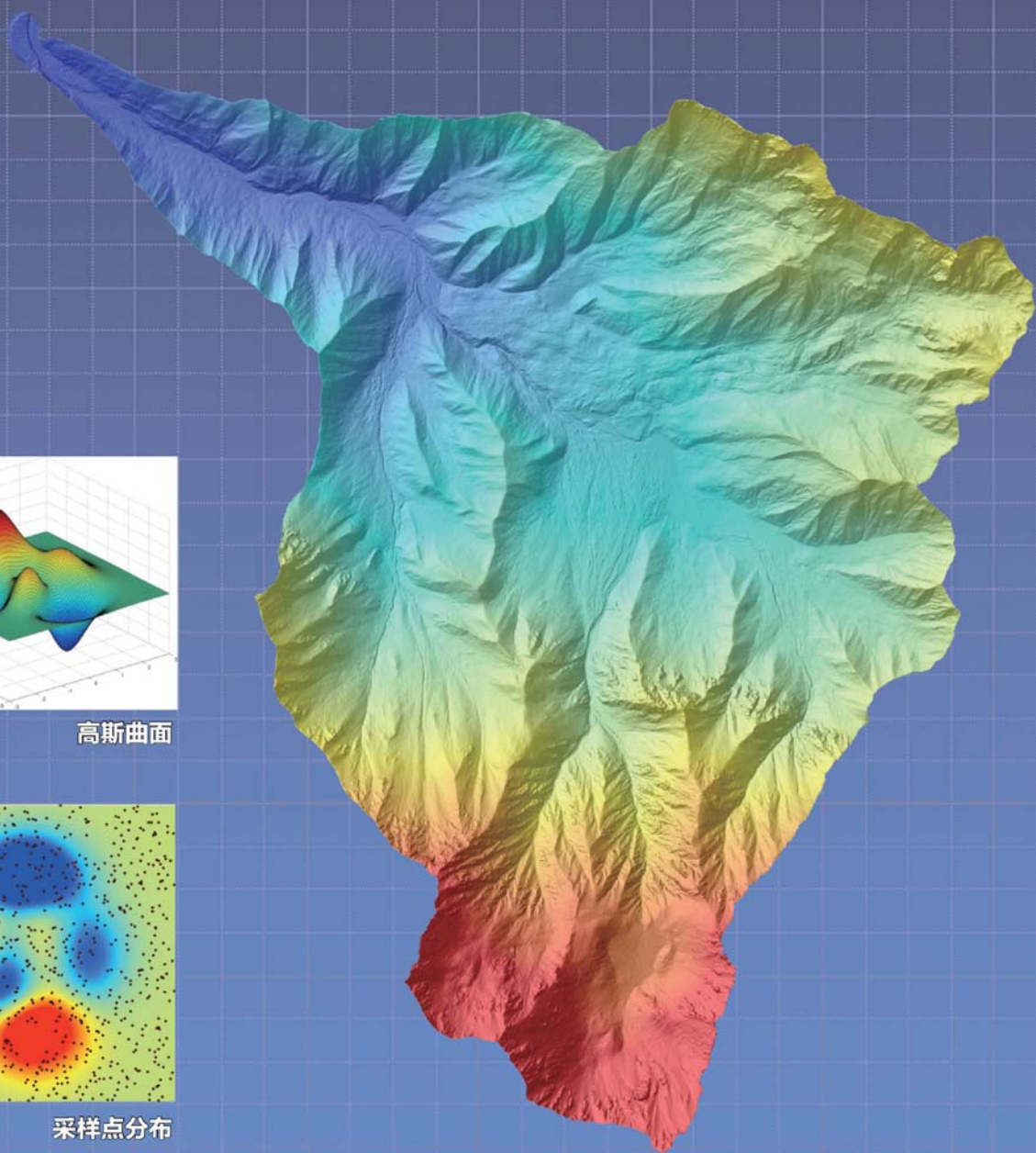
ISSN1006-8961
CN11-3758/TB



高斯曲面



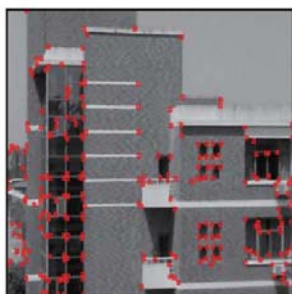
采样点分布



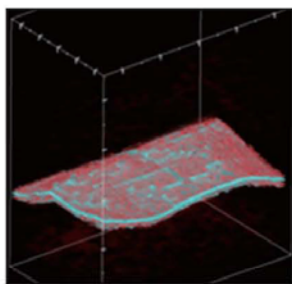
HASM地形模拟 P290



邻域最短距离法寻找最佳拼接缝(第227页)



曲率尺度空间与链码方向统计的角点检测(第234页)



目标特征指导的多分辨率体绘制算法(第283页)

计算机视觉前沿论坛

行为理解的认知推理方法

陶霖密, 杨卓宁, 王国建 0167

深度学习及其在目标和行为识别中的新进展

郑胤, 陈权崎, 章毓晋 0175

图像处理和编码

分布式视频编码中基于改进FCM聚类的相关噪声模型估计

杨春玲, 吴娟 0185

结合一阶自回归滑动平均和压缩感知的视频模型

王教余, 徐小红, 沈仁明, 廖重阳, 杨勋 0194

信息量加权的梯度显著度图像质量评价

徐少平, 杨荣昌, 刘小平 0201

优化加权TV的复合正则化压缩感知图像重建

费选, 韦志辉, 肖亮, 李星秀 0211

消除图像伪轮廓的各向异性自适应滤波

倪婧, 王朔中, 廖纯, 曾兴 0219

邻域最短距离法寻找最佳拼接缝

郑悦, 程红, 孙文邦 0227

图像分析和识别

曲率尺度空间与链码方向统计的角点检测

曾接贤, 李炜烨 0234

基于方向特征的手掌静脉识别

周宇佳, 刘娅琴, 杨丰, 黄靖 0243

复杂环境下高效物体跟踪级联分类器

江伟坚, 郭躬德 0253

图像理解和计算机视觉

均值规范化对比度的局部特征描述符

颜雪军, 赵春霞, 袁夏, 徐丹, 刘凡 0266

计算机图形学

三角域上Said-Ball基的推广渐近迭代逼近

张莉, 李园园, 杨燕, 檀结庆 0275

目标特征指导的多分辨率体绘制算法

郭思奇, 鲁才, 聂小燕 0283

地理信息技术

高精度曲面建模优化方案

赵明伟, 岳天祥, 赵娜 0290

医学图像处理

应用于人体关节缺损修复的建模与可视化

邢慧君, 杨健, 李勤 0297

小邻域统计信息核磁共振医学图像分割模型

张建伟, 方林, 陈允杰, 詹天明 0305

遥感图像处理

结合暗通道原理和双边滤波的遥感图像增强

周雨薇, 陈强, 孙权森, 胡宝鹏 0313

改进NSCT和IHS变换相结合的遥感影像融合

刘慧, 周可法, 王金林, 王珊珊 0322

分段2维主成分分析的超光谱图像波段选择

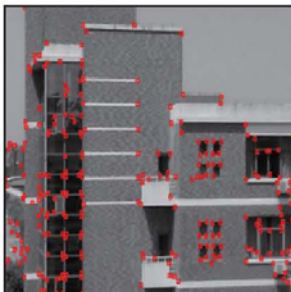
张婧, 孙俊喜, 阮光诗, 刘红喜 0328

CONTENTS

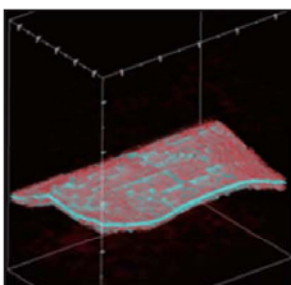
JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Finding an optimal seam-line through the shortest distance in the neighborhood(P227)



Corner detection based on curvature scale space and chain code direction statistics(P234)



Target feature based multi-resolution volume rendering(P283)

Forum: Forefront of Computer Vision

Cognitive reasoning method for behavior understanding

Tao Linmi, Yang Zhuoning, Wang Guojian 0167

Deep learning and its new progress in object and behavior recognition

Zheng Yin, Chen Quanqi, Zhang Yujin 0175

Image Processing and Coding

Correlation noise modeling based on improved Fuzzy C-Means clustering in distributed video coding

Yang Chunling, Wu Juan 0185

Compressed sensing video model based on a first-order autoregressive moving average model

Wang Jiaoyu, Xu Xiaohong, Shen Renming, Liao Chongyang, Yang Xun 0194

Information content weighted gradient saliency structural similarity index for image quality assessment

Xu Shaoping, Yang Rongchang, Liu Xiaoping 0201

Compound regularized compressed sensing image reconstruction based on optimal reweighted TV

Fei Xuan, Wei Zhihui, Xiao Liang, Li Xingxiu 0211

False contour suppression with anisotropic adaptive filtering

Ni Jing, Wang Shuozhong, Liao Chun, Zeng Xing 0219

Finding an optimal seam-line through the shortest distance in the neighborhood

Zheng Yue, Cheng Hong, Sun Wenbang 0227

Image Analysis and Recognition

Corner detection based on curvature scale space and chain code direction statistics

Zeng Jiexian, Li Weiye 0234

Palm-vein recognition based on oriented features

Zhou Yujia, Liu Yaqin, Yang Feng, Huang Jing 0243

Efficient cascade classifier for object tracking in complex conditions

Jiang Weijian, Guo Gongde 0253

Image Understanding and Computer Vision

Local feature descriptor based on mean normalized contrast

Yan Xuejun, Zhao Chunxia, Yuan Xia, Xu Dan, Liu Fan 0266

Computer Graphics

Generalized progressive iterative approximation for Said-Ball based on triangular domains

Zhang Li, Li Yuanyuan, Yang Yan, Tan Jieqing 0275

Target feature based multi-resolution volume rendering

Guo Siqi, Lu Cai, Nie Xiaoyan 0283

Geoinformatics

HASM optimization based on the improved difference scheme

Zhao Mingwei, Yue Tianxiang, Zhao Na 0290

Medical Image Processing

Method of modeling and visualization for repairing of osteoarticular defect

Xing Huijun, Yang Jian, Li Qin 0297

Magnetic resonance medical images segmentation based on a local statistical information model

Zhang Jianwei, Fang Lin, Chen Yunjie, Zhan Tianming 0305

Remote Sensing Image Processing

Remote sensing image enhancement based on dark channel prior and bilateral filtering

Zhou Yuwei, Chen Qiang, Sun Quansen, Hu Baopeng 0313

Remote sensing image fusion based on an improved NSCT and IHS transformation

Liu Hui, Zhou Kefa, Wang Jinlin, Wang Shanshan 0322

Segmented 2DPCA algorithm for band selection of hyperspectral image

Zhang Jing, Sun Junxi, Ruan Guangshi, Liu Hongxi 0328

中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2014)2-0275-08

论文引用格式: 张莉, 李园园, 杨燕, 檀结庆. 三角域上 Said-Ball 基的推广渐近迭代逼近[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(2): 275-282. [DOI: 10.11834/jig.20140213]

三角域上 Said-Ball 基的推广渐近迭代逼近

张莉^{1,2}, 李园园¹, 杨燕¹, 檀结庆^{1,3}

1. 合肥工业大学数学学院, 合肥 230009; 2. 亚利桑那州立大学, 美国坦佩 85281; 3. 合肥工业大学计算机学院, 合肥 230009

摘要: **目的** 如果一组基函数是规范全正(NTP)的, 并且对应的配置矩阵是非奇异的, 那么由它所生成的参数曲线或张量积曲面具有渐近迭代逼近(PIA)性质。为了进一步推广渐近迭代逼近性质的适用范围, 提出对于一组基函数, 如果其对应的配置矩阵不是全正的, 那么该基函数也可能具有渐近迭代逼近性质。**方法** 提出的定理以基函数具有渐近迭代逼近性质时其对应的配置矩阵所需满足的条件作为理论基础, 建立了配置矩阵为严格对角占优或者广义严格对角占优矩阵与基函数具有渐近迭代逼近性质之间的联系。**结果** 配置矩阵为严格对角占优或者广义严格对角占优矩阵, 则相应的三角曲面具有 PIA 性质或带权 PIA 性质, 即广义 PIA 性质。数值实验验证了上述理论, 并细致地分析了三角域上的低次 Said-Ball 基, 指出了它们具有相应的广义 PIA 性质。**结论** 本文将渐近迭代逼近的适用范围推广到三角域上的一般混合基函数。类似三角域上 Said-Ball 基, 本文算法亦可用于研究三角域上的其他各类广义 Ball 基的 PIA 性质。

关键词: 渐近迭代逼近; 广义严格对角占优; Said-Ball 基; 三角域

Generalized progressive iterative approximation for Said-Ball bases on triangular domains

Zhang Li^{1,2}, Li Yuanyuan¹, Yang Yan¹, Tan Jieqing^{1,3}

1. College of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China;

2. college Computer Science, Arizona State University, Tempe, 85281 America;

3. College of Computer and Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China

Abstract: **Objective** In the field of computer aided design, a new data fitting technique, the progressive iterative approximation (PIA), has been proposed and attracts plenty of attention. By adjusting the control points iteratively, the PIA method provides a straightforward way to generate a sequences of curves/surfaces with better precision for data fitting. The curve (tensor product surface) has the PIA property as long as the bases are normalized completely positive and the corresponding collocation matrix is non-singular. In order to extend the scope of application of the PIA property, our paper focuses on the triangular surface and the non-totally positive collocation matrix. Furthermore, we assume that it may also possess the PIA property. **Method** The theory is based on certain conditions, which are essential for a basis to satisfy the PIA property. Given a set of triangular basis functions and its corresponding parametric values, we can obtain the collocation matrix of the triangular basis functions at the parametric values. Then, we get a new matrix, which is the result of the identity matrix subtracting the collocation matrix, and calculate the spectrum radius of the new matrix. If the value of the spectrum radius is less than 1, we call the triangular basis functions over a triangle domain having the PIA property. Given a collocation ma-

收稿日期: 2013-05-13; 修回日期: 2013-08-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(U1135003, 61100126); 教育部博士点基金项目(20100111120023, 20110111120026); 安徽省自然科学基金项目(11040606Q42); 安徽省高等学校省级优秀青年人才基金项目(2011SQRL184)

第一作者简介: 张莉(1976—), 女, 副教授, 2009 年于合肥工业大学获计算机应用技术专业博士学位, 主要研究方向为计算机辅助几何设计。E-mail: lzhan143@asui.edu

trix, which is diagonally dominant or generalized diagonally, dominant and the elements of the matrix are positive number, then the real part of the eigenvalue of the collocation matrix is also a positive number. Our work proves that if the real part of the eigenvalue collocation matrix is a positive number, then the corresponding bases on triangular domain possess the PIA property (we call it as generalized PIA property). In the end, we build the relationship between diagonally dominant or generalized diagonally dominant matrix and the bases possess progressive iterative approximation property. **Result** If the collocation matrix is diagonally dominant or generalized diagonally dominant, the corresponding bases on triangular domain possess the PIA property (we call it as generalized PIA property). As we know, the Said-Ball bases have many good properties, such as the shape preserving property and the convex hull property. Since the Said-Ball bases are much better than Bernstein bases in recursive evaluation and degree elevation or reduction, it is worthwhile to develop the Said-Ball bases on triangle domain for free-form surface design. We take the Said-Ball bases as examples and find that the Said-Ball bases on triangular domain have the generalized PIA property. Numerical examples are given to demonstrate the correctness of our theory. **Conclusion** The main work of our paper is that we extend the scope of PIA property to the generalized blending basis over a triangle domain. The basic technique is to give a progressive iterative scheme of the triangle Said-Ball surfaces. Giving some scattered data points to form an initial control mesh, the limit surface can interpolate these original points by constructing an iterative sequence of the triangular Said-Ball patches. Moreover, the numerical examples of the triangular Said-Ball basis of low degree with the uniform or non-uniform parameters are given. Furthermore, we can generalize this method to the study of different kinds of generalized Ball bases in triangular domain.

Key words: progressive iterative approximation; generalized diagonally dominant; Said-Ball bases; triangle domain

0 引言

在计算机辅助几何设计和逆向工程中,散乱数据点的插值和拟合问题的研究必不可少。其中,运用单变量 NTP 基的渐近迭代逼近性质处理散乱数据点的方法受到广泛关注。早年,Ando^[1]讨论了一种全正矩阵及其性质,这为 PIA(渐近迭代逼近)性质的研究提供了部分的理论基础。一个矩阵被定义为全正矩阵的充分必要条件是其全部子式的行列式均为非负。Qi 等人^[2]和 de Boor^[3]先后提出了 PIA 方法,Lin 等人^[4-5]对其进行了深入分析、细致研究,将 PIA 性质推广到单变量 NTP 基情形,得到结论,在一般情况下,由 NTP(规范全正)基生成的曲线、张量积曲面均满足 PIA 性质。PIA 方法的自适应性和收敛稳定性,使得其广泛地应用于散乱数据点的逼近和拟合问题上。在此基础上,研究者们提出了新的方法用于比较或者加快 PIA 收敛速率。比如,Delgado 等人^[6-7]讨论了不同 NTP 基的 PIA 收敛速率,对比了不同空间基函数的 PIA 收敛速率。Lin^[8]提出了局部 PIA 的思想,对数据点进行局部 PIA 调整、整体优化。此外,Lu^[9]提出了带权的 PIA,加快了 PIA 收敛速率。为了推广 PIA 的适用范围,Chen 等人^[10]分析了三角域上 Bernstein 基的 PIA 性质,首次证明了一般的混合基函数在满足一定的条件时生成的曲线具有 PIA 性质或带权 PIA 性质^[11]。

对于三角域上的一般混合基函数,它们是否满足 PIA 性质? 本文较为深入地研究了上述问题,指出三角域上一般混合基函数的配置矩阵是严格对角占优矩阵或者通过某些变化可变为严格对角占优矩阵时,其相应的三角域上曲面具有广义的 PIA 性质。文献[12-14]指出 Said-Ball 具有保形性、计算稳定性等许多良好的性质,并在求值及升降阶的计算速度上优于 Bézier。因此,Said-Ball 基在工业设计中具有一定的应用。本文以三角域上的 Said-Ball 基为例,验证了本文的主要结论并给出了数值实例与误差分析。

1 PIA 性质

定义在区间 $\mathbf{R}$ 上的基 $\{S_0(t), S_1(t), \dots, S_n(t)\}$ 满足条件

$$S_i(t) \geq 0, i = 0, 1, \dots, n \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^n S_i(t) = 1 \quad (2)$$

则称基 $\{S_0(t), S_1(t), \dots, S_n(t)\}$ 是混合基。

给定 $\mathbf{R}^2$ 中一列数据点 $\{\mathbf{P}_i\}_{i=0}^n$, 其中 $\mathbf{P}_i$ 对应的参数值为 $t_i, i = 0, 1, \dots, n (t_0 < t_1 < \dots < t_n)$, 令 $\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$ 为一组混合基, 可得到初始曲线

$$\mathbf{C}^0(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i^0 S_i(t) \quad (3)$$

式中, $\mathbf{P}_i^0 = \mathbf{P}_i, i = 0, 1, \dots, n$ 。对每个控制点计算调整向量

$$\Delta_i^0 = P_i - C^0(t_i) \quad (4)$$

并且令 $P_i^1 = P_i^0 + \Delta_i^0, i = 0, 1, \dots, n$, 得到曲线 $C^1(t) = \sum_{i=0}^n P_i^1 S_i(t)$ 。不断迭代这个过程, 得到曲线序列 $\{C^k\}_{k=0}^\infty$ 。如果 $\lim_{k \rightarrow \infty} C^k(t_i) = P_i, i = 0, 1, \dots, n$, 则称初始曲线或相应的基函数具有 PIA 性质^[4]。

由上述迭代过程易知

$$\Delta_j^{k+1} = \Delta_j^k - \sum_{i=0}^n \Delta_i^k S_i(t_j) \quad (5)$$

$$j = 0, 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots$$

其矩阵形式为

$$[\Delta_0^{k+1}, \Delta_1^{k+1}, \dots, \Delta_n^{k+1}]^T = (I - S)[\Delta_0^k, \Delta_1^k, \dots, \Delta_n^k]^T \quad (6)$$

式中, I 是 $n+1$ 阶单位矩阵, S 是基 $\{S_i\}_{i=0}^n$ 在参数值 $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ 处的配置矩阵,

$$S = \begin{pmatrix} S_0(t_0) & S_1(t_0) & \dots & S_n(t_0) \\ S_0(t_1) & S_1(t_1) & \dots & S_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_0(t_n) & S_1(t_n) & \dots & S_n(t_n) \end{pmatrix} \quad (7)$$

由迭代过程易知, 当且仅当调整向量满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_i^k = 0, i = 0, 1, \dots, n \quad (8)$$

从而有 $\lim_{k \rightarrow \infty} C^k(t_i) = P_i$ 。

基于上述分析, 得到 PIA 收敛的充要条件是 $\rho(I - S) < 1$, 其中 $\rho(I - S)$ 表示矩阵 $I - S$ 的谱半径。如果配置矩阵 S 的 $n+1$ 个特征值为 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则矩阵 $I - S$ 的 $n+1$ 个特征值为 $1 - \lambda_0, 1 - \lambda_1, \dots, 1 - \lambda_n$, 因此有 $\rho(I - S) = 1 - \min_{0 \leq i \leq n} \lambda_i$ 。易知, 配置矩阵 S 的最小特征值越大, 其 PIA 收敛速率越快。

2 三角域上 Said-Ball 基的 PIA 性质

2.1 三角域上 Said-Ball 基函数

定义 1^[12] 设

$$S_{i,j,k}^{2m+1}(u, v, w) = \begin{cases} \binom{m+j+k}{j,k} u^{m+1} v^j w^k & i \geq m+1 \\ \binom{m+i+k}{i,k} u^i v^{m+1} w^k & j \geq m+1 \\ \binom{m+i+j}{i,j} u^i v^j w^{m+1} & k \geq m+1 \\ \binom{2m+1}{i,j} u^i v^j w^k & i, j, k \leq m \end{cases} \quad (9)$$

式中, $m \geq 1, m \in \mathbf{Z}, u, v, w \geq 0, u + v + w = 1$ 。则称 $S_{i,j,k}^{2m+1}(u, v, w)$ 为三角域上 $2m+1$ 次 Said-Ball 基。

给定 $\mathbf{R}^3$ 中控制点 $\{P_{i,j,k} \mid i+j+k=n\}$, 则称曲面

$$T^{2m+1}(t_{i,j,k}) = \sum_{i+j+k=2m+1} P_{i,j,k} S_{i,j,k}^{2m+1}(t_{i,j,k}) \quad (10)$$

为三角域上 $2m+1$ 次 Said-Ball 曲面。这里用到组合恒等式

$$\binom{n}{i,j} = \frac{n!}{i! j! (n-i-j)!}$$

这里 n, i, j 为非负整数。

同理, 设

$$S_{i,j,k}^{2m}(u, v, w) = \begin{cases} \binom{m+j+k}{j,k} u^{m+1} v^j w^k & i \geq m+1 \\ \binom{m+i+k}{i,k} u^i v^{m+1} w^k & j \geq m+1 \\ \binom{m+i+j}{i,j} u^i v^j w^{m+1} & k \geq m+1 \\ \binom{2m}{i,j} u^i v^j w^k & i, j, k \leq m \end{cases} \quad (11)$$

则称 $S_{i,j,k}^{2m}(u, v, w)$ 为三角域上 $2m$ 次 Said-Ball 基。

三角域上 $2m$ 次 Said-Ball 曲面为

$$T^{2m}(t_{i,j,k}) = \sum_{i+j+k=2m} P_{i,j,k} S_{i,j,k}^{2m}(t_{i,j,k}) \quad (12)$$

定义 2^[15] 给定两个 d 维 ($d \geq 1$) 向量 α 和 β 。如果向量 α 和 β 的差 $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_d - \beta_d)$ 的第 1 个非零值为正, 则把向量 α 安排在向量 β 前面, 表示为 $\alpha > \beta$, 称为字典排序。

定义 3 三角域上 n 次 Said-Ball 基函数按字典排序表述为 $(n+1)(n+2)/2$ 维向量

$$S^n = (S_{n,0,0}^n, S_{n-1,1,0}^n, S_{n-1,0,1}^n, \dots, S_{0,n,0}^n, \dots, S_{0,0,n}^n) \quad (13)$$

2.2 三角域上 Said-Ball 曲面的 PIA 性质

Chen^[11] 针对曲线的情形, 证明了一般的混合基函数在满足一定条件时具有推广的 PIA 性质, 极大地拓宽了渐近迭代逼近的应用范围。三角曲面片较张量积曲面在 CAD 上有着更为广泛的应用, 为了进一步扩大 PIA 适用范围, 将此结论推广到三角域上一般混合基函数生成的曲面。最后得到, 当三角域上的一般混合基函数在给定参数值处的配置矩阵为严格对角占优或者广义严格对角占优时, 其相应的初始曲面具有 PIA 性质。

2.2.1 三角域曲面的PIA性质

给定 $\mathbf{R}^3$ 中一系列数据点 $\{P_{i,j,k}\}_{i+j+k=n}$, 其中 $P_{i,j,k}$ 对应的参数值为 $t_{i,j,k}^n, i+j+k=n; i,j,k=0,1,\dots,n$ 。令 $\{S_{i,j,k}^n\}_{i+j+k=n; i,j,k=0,1,\dots,n}$ 为三角域上一组混合基, 得到三角域上初始曲面

$$T^0(u,v,w) = \sum_{i+j+k=n} P_{i,j,k}^0 S_{i,j,k}^n(u,v,w) \quad (14)$$

式中, $P_{i,j,k}^0 = P_{i,j,k}$, 对每个控制点计算调整向量

$$\Delta_{i,j,k}^0 = P_{i,j,k} - T^0(u,v,w) \quad (15)$$

并且令 $P_{i,j,k}^1 = P_{i,j,k}^0 + \Delta_{i,j,k}^0$, 得到三角曲面

$$T^1(u,v,w) = \sum_{i+j+k=n} P_{i,j,k}^1 S_{i,j,k}^n(u,v,w) \quad (16)$$

$$S = \begin{pmatrix} S_{n,0,0}^n(t_{n,0,0}^n) & S_{n-1,1,0}^n(t_{n,0,0}^n) & \cdots & S_{0,0,n}^n(t_{n,0,0}^n) \\ S_{n,0,0}^n(t_{n-1,1,0}^n) & S_{n-1,1,0}^n(t_{n-1,1,0}^n) & \cdots & S_{0,0,n}^n(t_{n-1,1,0}^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n,0,0}^n(t_{0,0,n}^n) & S_{n-1,1,0}^n(t_{0,0,n}^n) & \cdots & S_{0,0,n}^n(t_{0,0,n}^n) \end{pmatrix} \quad (19)$$

基于上述讨论, 可推导出当且仅当 $I-S$ 的谱半径满足 $\rho(I-S) < 1$ 时PIA收敛。

2.2.2 三角域曲面推广的PIA性质

定义4^[16] 设矩阵 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ 且 $n \geq 2$ (式中 $M_n(\mathbf{C})$ 为复数域上 n 阶矩阵域)。如果

$$|a_{ii}| > R_i(A) = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

则称矩阵 A 为严格对角占优矩阵; 如果存在正对角矩阵 X , 使得 AX 是严格对角占优矩阵, 则称矩阵 A 为广义严格对角占优矩阵。

引理1^[16] 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ 为严格对角占优矩阵或者广义严格对角占优矩阵, 若满足条件

$$a_{ii} > 0, i = 0, 1, \dots, n$$

则 A 的特征值的实部均为正。

引理2 如果配置矩阵 S 的特征值 λ_i 实部均为正, 即 $\text{Re}(\lambda_i) > 0 (i = 0, 1, \dots, n)$, 那么基函数构造的三角域曲面具有PIA性质或者带权的PIA性质, 即广义PIA性质。

证明 对于三角域上一组混合基

$$\{S_{i,j,k}^n\}_{i+j+k=n; i,j,k=0,1,\dots,n}$$

由式(2)(19)知 $\|S\|_\infty = 1$ 。因此有 $\rho(S) \leq \|S\|_\infty = 1$, 即 $\lambda_i \in D = \{Z \mid |Z| \leq 1, Z \in \mathbf{C}\}$ 。

根据题目条件 $\text{Re}(\lambda_i) > 0 (i = 0, 1, \dots, n)$, 可得 $\lambda_i \in D^+ = \{Z \mid |Z| \leq 1, \text{Re}(Z) > 0, Z \in \mathbf{C}\}$ 。

设 $\Omega = \{Z \mid |Z-1| < 1, Z \in \mathbf{C}\}$, $\lambda_i = a_i + j b_i, i =$

不断迭代这个过程, 得到曲面序列 $\{T^k\}_{k=0}^\infty$, 如果

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(t_{i,j,k}^n) = P_{i,j,k}, i+j+k=n \quad (17)$$

则称三角域上的初始曲面具有PIA性质。由迭代过程易知

$$[\Delta_{n,0,0}^{k+1}, \Delta_{n-1,1,0}^{k+1}, \dots, \Delta_{0,0,n}^{k+1}]^T = (I-S)[\Delta_{n,0,0}^k, \Delta_{n-1,1,0}^k, \dots, \Delta_{0,0,n}^k]^T \quad (18)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

式中, I 是 $((n+1)(n+2)/2) \times ((n+1)(n+2)/2)$ 阶单位矩阵, S 是基 $(S_{n,0,0}^n, S_{n-1,1,0}^n, S_{n-1,0,1}^n, \dots, S_{0,n,0}^n, \dots, S_{0,0,n}^n)$ 在参数 $(t_{n,0,0}^n, t_{n-1,1,0}^n, t_{n-1,0,1}^n, \dots, t_{0,n,0}^n, \dots, t_{0,0,n}^n)$ 处的配置矩阵

$0, 1, \dots, n (j \text{ 为虚数单位})$ 。

若 $\lambda_i \in D^+ \cap \Omega$, 则对于 $I-S$ 矩阵有

$$\mu_i \in \{Z \mid |Z| < 1, Z \in \mathbf{C}\}, i = 0, 1, \dots, n$$

式中, μ_i 为矩阵 $I-S$ 的特征值。

因此 $\rho(I-S) < 1$, 故基函数构造的三角域曲面具有PIA性质, 如图1所示。

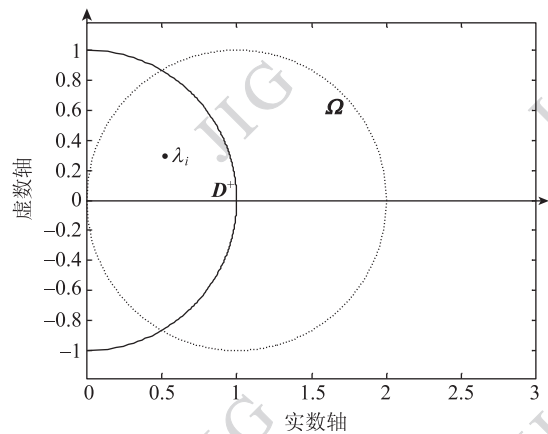


图1 $\lambda_i \in D^+ \cap \Omega$

Fig. 1 $\lambda_i \in D^+ \cap \Omega$

若 $\lambda_i \notin D^+ \cap \Omega$ 。令权因子

$$\omega_i = \frac{a_i}{a_i^2 + b_i^2}, i = 0, 1, \dots, n$$

此时

$$\omega_i \lambda_i = \frac{a_i^2}{a_i^2 + b_i^2} + \frac{a_i b_i}{a_i^2 + b_i^2} j$$

所以

$$\omega_i \lambda_i \in D^+ \cap \Omega, i = 0, 1, 2, \dots, n$$

记

$$\omega = \text{diag}\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n\}$$

因此 $\rho(I - \omega S) < 1$, 故基函数构造的三角域曲面具有带权的 PIA 性质, 如图 2 所示。

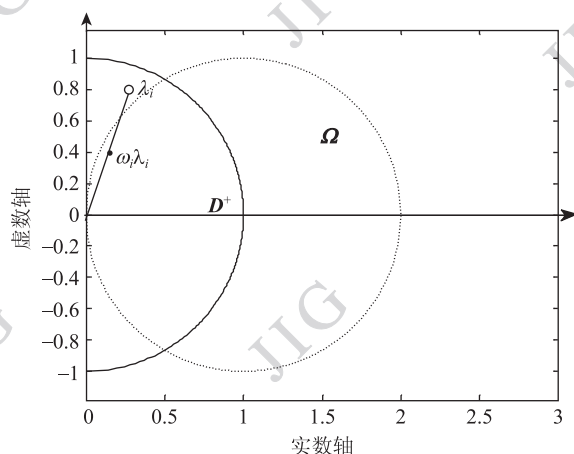


图 2 $\lambda_i \notin D^+ \cap \Omega$

Fig. 2 $\lambda_i \notin D^+ \cap \Omega$

由上述引理 1、引理 2 得到如下定理:

定理 1 给定三角域上区间 $[0, 1]$ 内的一组基函数

$$S^n = (S_{n,0,0}^n, S_{n-1,1,0}^n, S_{n-1,0,1}^n, \dots, S_{0,n,0}^n, \dots, S_{0,0,n}^n)$$

其参数序列为

$$(t_{n,0,0}^n, t_{n-1,1,0}^n, t_{n-1,0,1}^n, \dots, t_{0,n,0}^n, \dots, t_{0,0,n}^n)$$

若基函数在给定参数值处的配置矩阵 S 为严格对角占优或者广义严格对角占优矩阵, 那么相应的三角域曲面具有 PIA 性质或带权 PIA 性质, 即广义 PIA 性质。

三角域上 Said-Ball 曲面在工业设计中具有一定的应用, 以下分析三角域上 2 次、3 次 Said-Ball 基在均匀参数或非均匀参数下的 PIA 性质。

例 1 三角域上二次 Said-Ball 基函数

$$(S_{2,0,0}^2, S_{1,1,0}^2, S_{1,0,1}^2, S_{0,2,0}^2, S_{0,1,1}^2, S_{0,0,2}^2)$$

在均匀参数

$$t_{i,j,k}^2 = \left(\frac{i}{2}, \frac{j}{2}, \frac{k}{2}\right); i+j+k=2; i,j,k=0,1,2$$

处的配置矩阵为

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

容易看出矩阵 S 的子式 $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式值

为负。因此 S 并非全正矩阵; 另一方面, 存在正对角矩阵 $X = \text{diag}(0.01, 1, 1, 0.01, 1, 0.01)$, 使得 SX 为严格对角占优矩阵, 因此三角域上均匀参数下的二次 Said-Ball 曲面具有广义 PIA 性质。实际上其特征值为 $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0.5, \lambda_5 = 1, \lambda_6 = 1$ 。

例 2 三角域上二次 Said-Ball 基函数

$$(S_{2,0,0}^2, S_{1,1,0}^2, S_{1,0,1}^2, S_{0,2,0}^2, S_{0,1,1}^2, S_{0,0,2}^2)$$

在非均匀参数 $t_{2,0,0}^2 = (1, 0, 0), t_{1,1,0}^2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right),$

$$t_{1,0,1}^2 = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right), t_{0,2,0}^2 = (0, 1, 0), t_{0,1,1}^2 =$$

$\left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), t_{0,0,2}^2 = (0, 0, 1)$ 处的配置矩阵为

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

容易看出矩阵 S 的子式 $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式值为负。

因此 S 并非全正矩阵; 另一方面, 存在 $X = \text{diag}(0.01, 1, 1, 0.01, 1, 0.01) > 0$, 使得 SX 为严格对角占优矩阵, 因此三角域上非均匀参数下的二次 Said-Ball 曲面具有广义 PIA 性质。实际上其特征值为 $\lambda_1 = \frac{4}{9}, \lambda_2 = \frac{4}{9}, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = \frac{4}{9}, \lambda_5 = 1, \lambda_6 = 1$ 。

例 3 三角域上三次 Said-Ball 曲面基函数

$(S_{3,0,0}^3, S_{2,1,0}^3, S_{2,0,1}^3, S_{1,2,0}^3, S_{1,1,1}^3, S_{1,0,2}^3, S_{0,3,0}^3, S_{0,2,1}^3, S_{0,1,2}^3, S_{0,0,3}^3)$ 在均匀参数 $t_{i,j,k}^3 = \left(\frac{i}{3}, \frac{j}{3}, \frac{k}{3}\right), i+j+k=3; i,j,k=0,1,2,3$ 处的配置矩阵为

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{8}{27} & 0 & \frac{4}{27} & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{8}{27} & 0 & 0 & \frac{4}{27} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{27} & 0 & \frac{8}{27} & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{27} & \frac{2}{27} & \frac{2}{27} & \frac{2}{9} & \frac{2}{27} & \frac{1}{9} & \frac{2}{27} & \frac{2}{27} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{4}{27} & 0 & 0 & \frac{8}{27} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} & \frac{4}{27} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{27} & \frac{8}{27} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

容易看出矩阵 S 的子式 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{27} \\ \frac{2}{27} & \frac{2}{27} \end{pmatrix}$ 的行列式值为负,

因此 S 并非全正矩阵;另一方面存在正对角矩阵

$$X = \text{diag}(0.0001, 0.01, 0.01, 0.01, 1, 0.01, 0.0001, 0.01, 0.01, 0.0001)$$

使得 SX 为严格对角占优矩阵,因此三角域上均匀参数下的三次 Said-Ball 曲面具有广义 PIA 性质。实际上其特征值为 $\lambda_1 = 0.2220, \lambda_2 = 0.4440, \lambda_3 =$

$0.1480, \lambda_4 = 0.4440, \lambda_5 = 0.1480, \lambda_6 = 0.4440, \lambda_7 = 0.1480, \lambda_8 = 1.0000, \lambda_9 = 1.0000, \lambda_{10} = 1.0000$ 。

3 数值实验和误差分析

数值实验验证了三角域上 Said-Ball 基的广义 PIA 性质。实例分别展示了三角域上均匀参数或非均匀参数下的 2 次、3 次 Said-Ball 曲面,按不同迭代次数的 PIA 效果。通过数值实验实例,发现三角域上的 Said-Ball 基函数具备了广义的 PIA 性质。并且随着迭代次数的增加,PIA 收敛速率越快,图形越逼近给定的初始控制点。其中 PIA 误差分析中,迭代误差采用估计式 $E = \max \|\Delta_i^k\|_2$ 。

例 4 采样 6 个控制点,用字典排序表示为

$$\begin{aligned} P_{200} &= (0, 3, 0.3) & P_{020} &= (-1, 1.5, 1) \\ P_{002} &= (1, 1.5, 0.5) & P_{110} &= (-0.5, 2, 3) \\ P_{101} &= (0.5, 2, 4) & P_{011} &= (0, 1.4, 3) \end{aligned}$$

基函数取三角域上二次 Said-Ball 基,图 3 表示三角域上均匀参数下的二次 Said-Ball 曲面,按不同迭代次数的 PIA 效果,图 4 表示其在非均匀参数下(参数取值参考例 2)按不同迭代次数的 PIA 效果。图 5、图 6 分别表示其在均匀参数、非均匀参数下,按不同迭代次数的 PIA 误差。

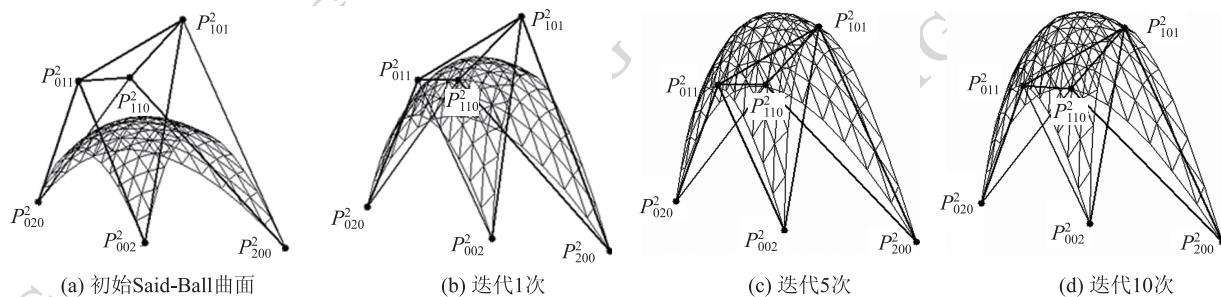


图 3 三角域上均匀参数下的二次 Said-Ball 曲面,按不同迭代次数的逼近效果

Fig. 3 The approximation results after different numbers of iterations on two degree triangular Said-Ball surface with uniform parameters

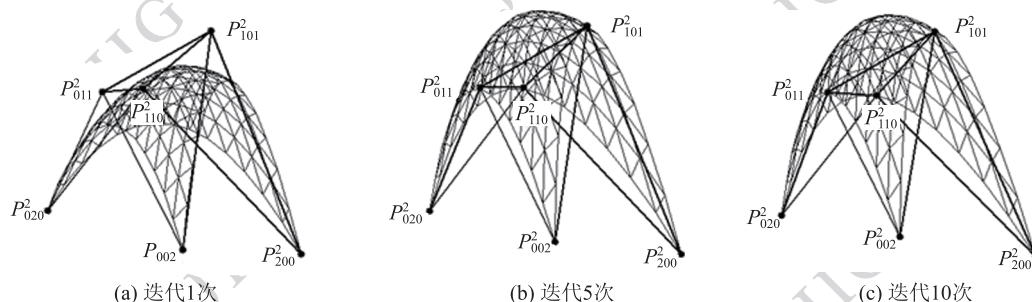


图 4 三角域上非均匀参数下的二次 Said-Ball 曲面,按不同迭代次数的逼近效果

Fig. 4 The approximation results after different numbers of iterations on two degree triangular Said-Ball surface with non-uniform parameters

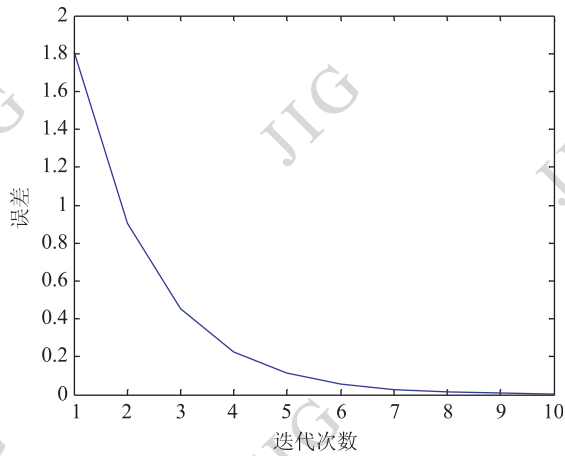


图 5 三角域上均匀参数下的二次 Said-Ball 曲面, 按不同迭代次数的 PIA 误差

Fig. 5 The PIA errors after different numbers of iterations on two degree triangular Said-Ball surface with uniform parameters

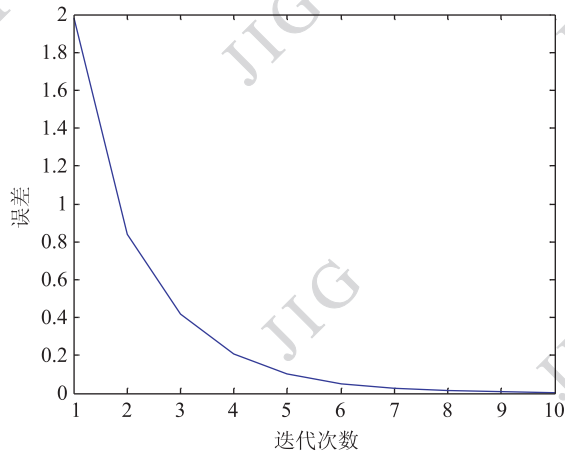


图 6 三角域上非均匀参数下的二次 Said-Ball 曲面, 按不同迭代次数的 PIA 误差

Fig. 6 The PIA errors after different numbers of iterations on two degree triangular Said-Ball surface with non-uniform parameters

例 5 采样 10 个控制点, 用字典排序表示为

$$\begin{aligned} P_{300} &= (6, 5, 2) & P_{030} &= (4, 0.5, 2) \\ P_{003} &= (7.2, 0.4, 2.5) & P_{210} &= (5.2, 3, 4) \\ P_{120} &= (4.5, 1.5, 5) & P_{021} &= (5.5, 0.1, 4) \\ P_{012} &= (6.5, 0.2, 3.5) & P_{102} &= (7, 1.5, 3.5) \\ P_{201} &= (6.5, 3, 4) & P_{111} &= (6.1, 1, 5.2) \end{aligned}$$

基函数取三角域上三次 Said-Ball 基, 图 7 表示三角域上三次 Said-Ball 基在均匀参数下, 按不同迭

代次数的 PIA 效果。图 8 表示其在不同迭代次数下的 PIA 误差。

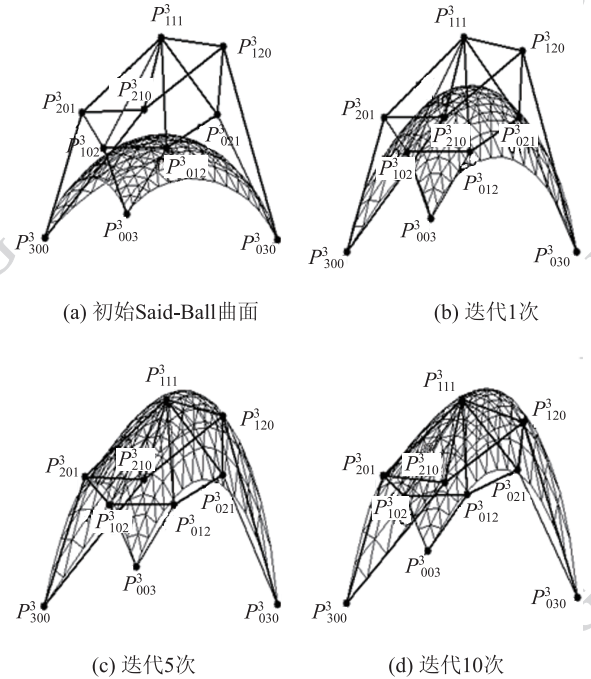


图 7 三角域上均匀参数下的三次 Said-Ball 曲面, 按不同迭代次数的逼近效果

Fig. 7 The approximation results after different numbers of iterations on three degree triangular Said-Ball surface with uniform parameters

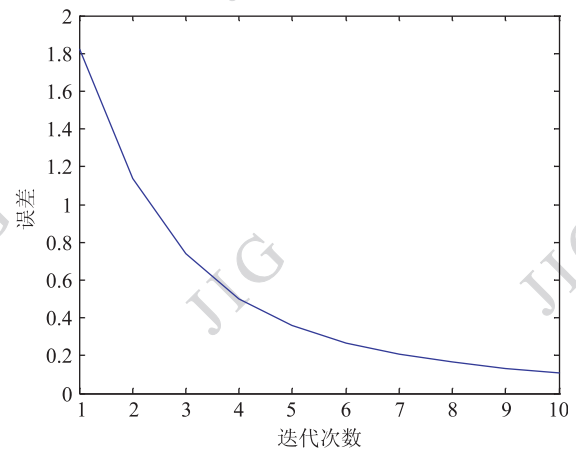


图 8 三角域上均匀参数下的三次 Said-Ball 曲面, 按不同迭代次数的 PIA 误差

Fig. 8 The PIA errors after different numbers of iterations on three degree triangular Said-Ball surface with uniform parameters

4 结 论

本文扩展了PIA性质的适用范围,讨论了三角域上的基函数在其配置矩阵不是全正矩阵的情况下,满足一定条件时仍具有推广的PIA性质。鉴于三角域上Said-Ball基在工业设计中具有一定的应用,故以其为例,讨论了三角域上低次的Said-Ball基函数在均匀参数或非均匀参数下的PIA性质,并给出了不同迭代次数的误差。本文方法也适用于研究Wang-Ball, Said-Bézier, Wang-Said, Wang-Bézier型广义Ball基的PIA性质,这将更有利于Ball曲线、曲面的推广应用。综上所述,本文的工作在工业设计中具有一定的意义。

参考文献 (References)

- [1] Ando T. Totally positive matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1987, 90: 165-229. [DOI: 10.1016/0024-3795(87)90313-2]
- [2] Qi D X, Tian Z X, Zhang Y X, et al. The method of numeric polish in curve fitting[J]. Acta Mathematica Sinica, 1975, 18(3): 173-184. [齐东旭, 田自贤, 张玉心, 等. 曲线拟合的数值磨光方法[J]. 数学学报, 1975, 18(3): 173-184.]
- [3] de Boor C. How does Agee's smoothing method work? [EB/OL]. (1979) [2011-10-24]. <http://ftp.cs.wisc.edu/Approx/agee.pdf>
- [4] Lin H W, Wang G J, Dong C S. Constructing iterative non-uniform B-spline curve and surface to fit data points[J]. Science in China Series F: Information Sciences, 2004, 47(3): 315-331. [DOI: 10.1360/02yf0529]
- [5] Lin H W, Bao H J, Wang G J. Totally positive bases and progressive iteration approximation[J]. Computer & Mathematics with Applications, 2005, 50(3-4): 575-586. [DOI: 10.1016/j.camwa.2005.01.023]
- [6] Delgado J, Peña J M. Progressive iterative approximation and bases with the fastest convergence rates[J]. Computer Aided Geometric Design, 2007, 24(1): 10-18. [DOI: 10.1016/j.cagd.2006.10.001]
- [7] Delgado J, Peña J M. A Comparison of different progressive iteration approximation methods[C]//Proceedings of the 7th international conference on Mathematical Methods for Curves and Surfaces. Berlin: Springer-Verlag, 2010: 136-152. [DOI: 10.1007/978-3-642-11620-9_10]
- [8] Lin H W. Local progressive iterative approximation format for blending curves and patches[J]. Computer Aided Geometric Design, 2010, 27(4): 322-339. [DOI: 10.1016/j.cagd.2010.01.003]
- [9] Lu L Z. Weighted progressive iteration approximation and convergence analysis[J]. Computer Aided Geometric Design, 2010, 27(2): 129-137. [DOI: 10.1016/j.cagd.2009.11.001]
- [10] Chen J, Wang G J. Progressive iterative approximation for triangular Bézier surfaces[J]. Computer-Aided Design, 2011, 43(8): 889-895. [DOI: 10.1016/j.cad.2011.03.012]
- [11] Chen J, Wang G J, Jin C J. Two kinds of generalized progressive iterative approximations[J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(1): 135-139. [陈杰, 王国瑾, 金聪健. 两类推广的渐近迭代逼近[J]. 自动化学报, 2012, 38(1): 135-139.] [DOI: 10.3724/SP.J.1004.2012.00135]
- [12] Goodman T N T, Said H B. Properties of generalized Ball curves and surfaces[J]. Computer-Aided Design, 1991, 23(8): 554-560. [DOI: 10.1016/0010-4485(91)90056-3]
- [13] Hu S M, Wang G Z, Jin T G. Properties of two types of generalized Ball curves[J]. Computer-Aided Design, 1996, 28(2): 125-133. [DOI: 10.1016/0010-4485(95)00047-X]
- [14] Hu S M, Wang G J, Sun J G. A type of triangular Ball surface and its properties[J]. Journal of Computer Science and Technology, 1998, 13(1): 63-72. [DOI: 10.1007/BF02946615]
- [15] Dunkl C F, Xu Y. Orthogonal Polynomials of Several Variables[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001: 32-32.
- [16] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.