



JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS

主办: 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

2014

05

VOL.19

ISSN1006-8961
CN11-3758/TB

流体模拟 P781





第19卷第5期（总第217期）

2014年5月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院

主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

主 编 李小文

编辑出版《中国图象图形学报》编辑出版委员会

邮政信箱 北京9718信箱

邮 编 100101

电子信箱 jig@irsa.ac.cn

电 话 010-64807995

网 址 www.cjig.cn

广告经营许可证 京朝工商广字第0361号

总 发 行 北京报刊发行局

订 购 全国各地邮局

海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司

（邮政信箱：北京399信箱 邮编：100048）

印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian

Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences

Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS
China Society of Image and Graphics

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

Editor-in-Chief LI Xiaowen

Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of
Image and Graphics

P.O.Box 9718, Beijing, P.R.China

Zip code 100101

E-mail jig@irsa.ac.cn

Telephone 010-64807995

Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals

Domestic All Local Post Offices in China

Overseas China International Book Trading Corporation
(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China))

Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

CN 11-3758/TB

ISSN 1006-8961

CODEN ZTTXFZ

国外发行代号 M1406

国内邮发代号 82-831

国内定价 50.00元

综述

中国图像工程: 2013

章毓晋 0649

图像处理和编码

SAR复图像数据的CCSDS-IDC编码性能分析与二叉树编码

侯兴松, 韩敏, 龚晨 0659

记忆梯度追踪压缩感知图像重构

郭强, 吴成东 0670

处理异常值的相机抖动模糊图像复原

阮光诗, 孙俊喜, 孙阳, 刘红喜, 赵立荣, 刘广文 0677

Logistic视频字幕增强模型

李钦瑞, 吕学强, 李卓, 刘坤 0683

图像分析和识别

结合LPG&PCA的中智学图像分割

张桂梅, 王大雷 0693

融合多特征的运动一致性图像分割

魏国剑, 侯志强, 李武, 余旺盛 0701

壁画图像分类中的分组多实例学习方法

唐大伟, 鲁东明, 许端清, 杨冰 0708

采用加性核SVM的二尖瓣瓣根识别

徐伟, 姚丽萍, 宋薇, 杨新, 孙锟 0716

迭代的图变换匹配算法

李婷婷, 汤进, 江波, 罗斌, 徐立祥 0723

融合残差Unscented粒子滤波和区别性稀疏表示的鲁棒目标跟踪

杨彪, 林国余, 张为公, 路小波, 张宇歆 0730

图像理解和计算机视觉

梯度约束SFS的月面地形重构

徐辛超, 刘少创, 徐爱功 0739

单幅自然场景深度恢复

曹风云, 方帅, 胡玉娟, 王浩, 杨雪洁 0746

区域语义多样性密度的图像标注

王方方, 蒋建国, 郭丹 0755

计算机图形学

鲁棒的网格实时几何编辑算法

汪悦, 邓元凯, 钱归平 0764

从表面重构的体数据实现3维网格剖分

刘君, 陈伟强, 熊邦书 0771

交错网格结构的涡粒子烟模拟

杨阳, 杨旭波 0781

遥感图像处理

应用区域统计特征的PolSAR影像分割

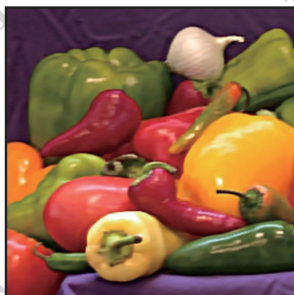
刘振宇, 余洁, 谢东海, 刘利敏 0789

采用分裂Bregman的遥感影像亮度不均变分校正方法

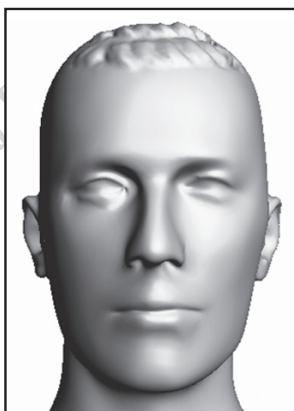
王晓静, 李慧芳, 袁强强, 沈焕锋, 张良培 0798

基于Wallis与距离权重增强的无人机影像拼接缝消除

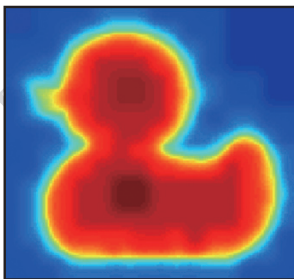
田金炎, 段福洲, 王乐, 李小娟, 屈新原 0806



处理异常值的相机抖动模糊图像复原(第677页)



鲁棒的网格实时几何编辑算法(第764页)



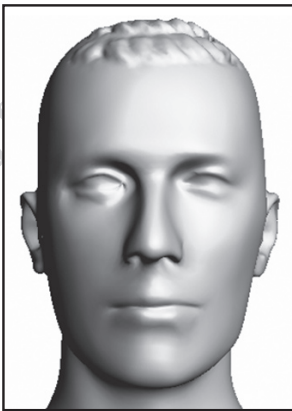
从表面重构的体数据实现3维网格剖分(第771页)

CONTENTS

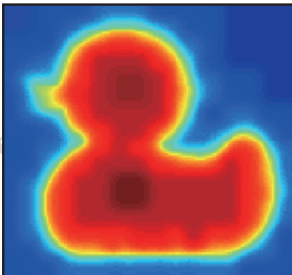
JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Disposing of outliers in camera-shake blurred images restoration(P677)



Robust algorithm for real-time mesh geometric editing(P764)



Three-de mesh generation through volume data reconstructed from surface(P771)

Review

Image engineering in China: 2013 Zhang Yujin	0649
---	------

Image Processing and Coding

Performance analysis of CCSDS-IDC for SAR complex image data and quadtree-based SAR complex image data coding Hou Xingsong, Han Min, Gong Chen	0659
Image reconstruction of compressed sensing based on memory gradient pursuit Guo Qiang, Wu Chengdong	0670
Disposing of outliers in camera-shake blurred images restoration Nguyen Quangthi, Sun Junxi, Sun Yang, Liu Hongxi, Zhao Lirong, Liu Guangwen	0677
Logistic model for video caption enhancement Li Qinrui, Lyu Xueqiang, Li Zhuo, Liu Kun	0683

Image Analysis and Recognition

Neutrosophic image segmentation approach integrated LPG&PCA Zhang Guimei, Wang Dalei	0693
Motion coherence image segmentation fused with multi-feature Wei Guojian, Hou Zhiqiang, Li Wu, Yu Wangsheng	0701
Clustered multiple instance learning for mural image classification Tang Dawei, Lu Dongming, Xu Duanqing, Yang Bing	0708
Recognition of mitral annulus hinge point using additive SVM classifier Xu Wei, Yao Liping, Song Wei, Yang Xin, Sun Kun	0716
Iterative graph transformation matching algorithm Li Tingting, Tang Jin, Jiang Bo, Luo Bin, Xu Lixiang	0723
Robust object tracking incorporating residual unscented particle filter and discriminative sparse representation Yang Biao, Lin Guoyu, Zhang Weigong, Lu Xiaobo, Zhang Yuxin	0730

Image Understanding and Computer Vision

Lunar terrain reconstruction with SFS under gradient constraint Xu Xinchao, Liu Shaochuang, Xu Aigong	0739
Recovering depth from a single natural defocused image Cao Fengyun, Fang Shuai, Hu Yujuan, Wang Hao, Yang Xuejie	0746
Image annotation based on region-semantic diverse density Wang Fangfang, Jiang Jianguo, Guo Dan	0755

Computer Graphics

Robust algorithm for real-time mesh geometric editing Wang Yue, Deng Yuankai, Qian Guiping	0764
Three-de mesh generation through volume data reconstructed from surface Liu Jun, Chen Weiqiang, Xiong Bangshu	0771
Staggered grid structure for smoke simulation Yang Yang, Yang Xubo	0781

Medical Image Processing

Application region statistical characteristic for PolSAR imagery segmentation Liu Zhenyu, Yu Jie, Xie Donghai, Liu Limin	0789
Uneven intensity correction using split Bregman for remote sensing images Wang Xiaojing, Li Huifang, Yuan Qiangqiang, Shen Huanfeng, Zhang Liangpei	0798
UAV image seam elimination method based on Wallis and distance weight enhancement Tian Jinyan, Duan Fuzhou, Wang Le, Li Xiaojuan, Qu Xinyuan	0806

中图法分类号: TP37 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2014)05-0781-08

论文引用格式: Yang Y, Yang X B. Staggered grid structure for smoke simulation[J]. Journal of Image and Graphics, 2014, 19(5): 781-788. [杨阳, 杨旭波. 交错网格结构的涡粒子烟模拟[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(5): 781-788.][DOI:10. 11834/jig. 20140517]

交错网格结构的涡粒子烟模拟

杨阳, 杨旭波

上海交通大学软件学院, 上海 200240

摘要: **目的** 流体模拟方法中的基于旋度的模拟方法相比于基于速度的模拟方法, 能提供较多细节, 但是通常难以处理不同的边界条件, 比如固体边界和自由表面, 而且通常难以保证模拟的稳定性。本文的目的就是为了解决基于旋度的模拟方法的边界问题和稳定性问题。**方法** 提出一种交错网格结构, 在这种网格结构下, 旋度分量被错开放置在每个网格的棱的中心点。利用这种网格离散格式, 提出了几种修改求解速度场方程组的策略, 以应对不同的边界条件。**结果** 给出多种场景下的流体模拟结果图, 以及几种场景下的总动能变化图和时间效率表。结果显示, 本文方法能够处理好不同边界条件, 并保持模拟的稳定性。**结论** 本文提出了一种新的涡粒子流体模拟方法, 该方法利用一种交错网格结构辅助模拟, 在这种新的网格离散格式下, 该方法解决了基于旋度的模拟方法的边界问题和稳定性问题。

关键词: 流体模拟; 涡粒子; 基于旋度的模拟方法; 边界问题

Staggered grid structure for smoke simulation

Yang Yang, Yang Xubo

School of software, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China

Abstract: **Objective** Fluid animation has recently become more popular and it is widely used in industrial fields, like movies, animation, and games. Because of the complexity of its movement, various methods have been presented to produce visibly pleasing effects. The commonly used simulation methods are velocity based methods. However, they suffer from fast loss of fluid details. In order to maintain details in the simulation process, vorticity based methods produce many impressive effects. However, they suffer from serious problems when considering boundaries and the problem of stability. Our goal is to produce methods to get rid of these drawbacks. **Method** We use vortices to represent the vorticity of the domain. Similarly to other vortex methods, we also do convection, stretching and adding body force. However, we use a new grid to compute the velocity. With this new grid structure, we stagger the different components of vorticity on the center of edges of each voxel. This grid structure is highly compatible with the commonly used grid structure, which staggers the different components of velocity on center of faces of each voxel. Using this grid structure, we can easily cope with different boundaries including solid boundaries and free surfaces, and we can easily enforce incompressibility in one voxel. **Result** We present several scenes of smoke animation to represent the capability of our method to cope with different boundaries. Moreover, we also present a chart about the energy changing process in these scenes with fixed vortices with an initial vorticity vector. Furthermore, we neglect the body force in this experiment. The chart shows that our method is very stable and the amplitude of the energy wave is less than 0.005%. **Conclusion** We present a new vortex method with a new grid structure. By

收稿日期: 2013-09-17; 修回日期: 2013-12-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(61373085, 61173105, 60970051)

第一作者简介: 杨阳(1990—), 男, 上海交通大学软件工程专业在读硕士研究生, 主要研究方向为计算机图形学。E-mail: guizya@gmail.com

using this new grid structure, our method can process with different boundaries, including solid boundaries and free surface. Moreover, the results show that our method can preserve fluid details in the simulation process and it is very stable.

Key words: fluid simulation; vortex; vorticity based simulation methods; boundaries

0 引言

近年来,流体动画越来越流行,而且经常应用于工业领域中,例如电影、动画和游戏中经常需要水波、海浪、火焰或者烟雾效果。由于流体运动的复杂性,学术界研究出了各种各样的模拟方法,呈现出精彩纷呈的流体效果。Stam^[1]、Fedkiw^[2]等人提出了一种无条件稳定的模拟方法,它能模拟不可压缩流体。他们采用了一种规则网格结构来辅助模拟,在该规则网格结构中,速度矢量的3个分量被错开分布在网格的6个面的中心点。该网格结构的好处是能在每个网格内满足不可压缩特性。该方法利用这个规则网格结构,进行流体模拟的对流、外力项和投影操作,使得模拟过程更加稳定。但是,这种方法具有在模拟过程中快速丢失流体细节的缺陷。Adrien等人^[3-4]提出了一种能实时模拟大规模流体的方法。该方法首先从大量流体模拟结果中采样,然后在相应缩减空间中进行流体模拟。该方法极大地减少了计算规模,并且避免了规则网格流体模拟中投影步骤的大量运算,但是它在模拟过程中丢失了大量的物理性,使得流体模拟结果看上去不自然。Miles等人^[5]则利用大量的约束去表征流体的运动,其模拟方式迥异于一般的流体模拟。除了上述基于速度场的流体模拟方法之外,还有许多基于旋度的模拟方法,这些方法期望利用保持旋度的方式,保持流体模拟过程中的涡旋,最终达到保持流体模拟细节的目的。例如,Alexis等人^[6-7]提出了利用模拟涡线(filaments)的方式来进行流体模拟。该方法基于以下假设:在流体模拟过程中,旋度集中于涡线(vorticity concentrates on filaments)。这样只需通过模拟涡线的运动就能模拟流体的运动。该方法的确产生了新颖的效果,但是它有一个严重的缺陷,它仅仅只能处理几种简单的边界条件,而且还需要非常复杂的操作。另外,Sang等人^[8]则提出了完全基于涡粒子的运动来进行流体模拟的方法,并且在该方法中,提出了应对多种不同的边界条件的方案。但是这些方案的实现非常复杂困难,并且这些方案还具有不稳定性的缺点。因为该方法利用在边界附近增加涡

粒子的方式来影响边界附近涡粒子的运动,使得流体的运动满足边界条件,这种方法实际上导致了流体模拟过程中能量增加,造成了很严重的稳定性问题,最终导致流体的运动不受控制。

本文同样基于保持流体模拟细节的目的,提出了一种新的基于旋度的流体模拟方法。采取涡粒子的方式来表征流体,但是基于边界条件和能量守恒方面的考虑,则采用一种新的规则网格结构来辅助模拟。该规则网格结构将旋度的3个分量错开分布在每个网格的12个棱的中心点。在之后的陈述中,可以发现该网格结构与文献[1-2]的规则网格结构具有高度一致的特性,它也同样可以在每个网格内满足不可压缩性。利用这种网格结构,提出了不同的策略来应对不同的边界条件,包括固体边界和自由表面(free surface)。综上所述,利用这些技术和这个规则的网格结构,提出了一种新的,能够很好地处理边界条件的,能量稳定的,同时易于实现的流体模拟方法。

1 相关工作

由于基于速度的流体模拟方法具有容易丢失流体细节的缺点,许多方法花费大量的精力去解决这个问题,比如MacCormack^[9]、BFEC^[10]、QUICK^[11]通过提高对流方法的精度去避免流体模拟过程中的数值损耗,而Fedkiw等人^[2]则利用旋度保持细节的性质,通过旋度补偿方式,为流体模拟的结果增加细节。而Yixin等人^[12]则在旋度补偿的基础上进行了改进,利用一个根据旋度自适应的网格,来改进旋度补偿的效果和效率。

同样由于上述缺点,Selle等人^[13]提出了速度模拟结合涡粒子模拟的方法,期望利用涡粒子保持流体细节的特性。该方法在常规速度模拟的基础上,同时也进行涡粒子的模拟,然后通过旋度补偿的方式,将涡粒子的影响添加到速度模拟中。总体来讲,它是涡粒子模拟辅助速度模拟的方法。Sheng-feng等人^[14]同样采取了这种方法,并对其中旋度补偿方式进行了改进。不同于旋度补偿方式去结合速度模拟和旋度模拟,Abhinav等人^[15]则在边界附近,

例如固体边界和自由表面,采用基于速度的模拟方法,而在流体内部采用基于旋度的模拟方法,然后利用域分解策略结合两者的模拟。这种方法能大量地减少模拟过程消耗的内存。

不同于规则网格, Tobias^[16]、Tyson^[17]等人则采用涡叶片(vortex sheet)的形式来表示流体区域内的旋度分布,这种形式通常使用三角形网格来辅助模拟。Alfred等人^[18]也利用基于涡线的方式进行模拟,不过它利用烟片(smoke sheet)的形式,进行烟的可视化。这些方法都取得了非常好的效果,但是由于三角形网格的使用,相对于规则网格来说,增加了模拟的复杂性。

2 涡粒子模拟

基于旋度的模拟方法基本上都是求解亥姆霍兹涡量方程,该方程实际上是对 Navier-Stokes 方程求解的结果,其形式为

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} = (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} + \nu \nabla^2 \mathbf{w} + \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{f} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{w}$ 为旋度向量, $\mathbf{u}$ 为速度向量, t 为时间, ρ 为流体密度, $\mathbf{f}$ 为流体所受到的外力, ν 为黏性系数, ∇ 为梯度算子, ∇^2 为拉普拉斯算子。

与基于速度的流体模拟方法不同的是,上述方程通常通过4步进行求解,它们分别为对流(convection)、扩散(diffusing)和外力项操作(body force),另外还有其独有的伸展项(stretching)。这4步操作求解的方程在文献[6-8]中均有描述。

涡粒子是指携带旋度的粒子,而涡粒子的流体模拟方法,实际上是通过涡粒子的分布和其携带的旋度变化来表示模拟空间内旋度的变化。在这种方式下,该方法需要模拟每次时间步长后,涡粒子的分布和其旋度。而上述4步就是用来计算这个变化过程。

本文同样采用这种思路,不同的是,由于本文的目的是模拟不可压缩的非黏性流体,因此在模拟过程中略去扩散操作。但是这并不意味着本文方法不能处理黏性流体,实际上,在本文方法独有的框架下,无论是利用文献[1]的隐式扩散算子还是文献[6]的显示扩散算子,都是非常简单并且易于实现的。本文方法的模拟框架如图1所示。



图1 涡粒子模拟方法的框架

Fig. 1 The outline of the vortex method

其中,转换涡粒子和求解速度场两个步骤因为涉及本文方法采用的网格结构,因此将在第3节介绍网格结构的章节中进行介绍。

2.1 对流操作和伸展操作

求解速度场步骤之后的结果是一个速度场,该速度场3个方向上的值分别错开分布在规则网格的面的中心点,该速度场分布形式在文献[19]中进行了详细的分析,在第3节中会进行简要描述。

对流操作和伸展操作求解的方程为

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} = (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} \quad (2)$$

利用分割算法(split),将该方程的求解转换为求解两个方程,即

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} \quad (4)$$

式(3)的求解过程即为对流操作,该操作利用计算出的速度场,对每个涡粒子进行操作

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \mathbf{u}_i^n \cdot d_i \quad (5)$$

式中, i 为涡粒子的序号, $\mathbf{x}$ 为涡粒子的位置向量, $\mathbf{u}_i$ 为第 i 个涡粒子所在位置的速度, n 表示在第 n 时间步, d_i 表示时间步长。利用式(5)可以对流所有涡粒子,更新涡粒子的在第 $n+1$ 时间步的位置。

式(4)的求解过程即为伸展操作,该操作利用计算出的速度场直接求解 $(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}$, 然后利用显示欧拉数值方法,去更新所有涡粒子的旋度。

2.2 外力项操作

外力项操作是将外力的作用,比如重力或浮力,考虑进流体模拟过程。该操作比较简单,直接在网格结构上求解 $\frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{f}$, 并且将求得的结果插值到每个涡粒子的位置,最后利用显示欧拉的方式更新涡粒子的旋度。这样,外力就被考虑进了流体模拟过程。

3 离散化

介绍一种交错网格离散方法,并利用这种网格,从旋度求解速度场的方法。

3.1 网格结构

如图2所示,该网格结构分别将旋度的3个分量错开放置在规则网格每个网格的棱的中心点上,例如, W_z 放置在与 z 轴平行的棱的中心点上。利用这个网格结构,计算出的速度场将会正好将其3个分量分布在网格的3个方向的面的中心点。这种速度场能够在每个网格内满足不可压缩条件,很适合处理不同的边界条件。并且对于流体密度场的对流,由于这种高度一致性,许多高精度对流方法,例如 MacCormac、BFEC、QUICK,将会很容易地被应用进来,达到增加流体模拟细节的目的。

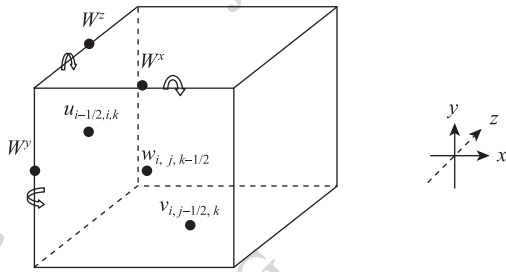


图2 网格结构图

Fig. 2 The distribution on grid

3.2 转换涡粒子

转换涡粒子将旋度从涡粒子的分布形式,转换为上述网格分布形式。在这个过程中,使用插值的方式将每个涡粒子携带的旋度分布到其所在位置的周围8个网格点上,例如,假设涡粒子 W_p 坐落在由以下8个点 $P_{i,j-1/2,k-1/2}$ 、 $P_{i+1,j-1/2,k-1/2}$ 、 $P_{i,j+1/2,k-1/2}$ 、 $P_{i+1,j+1/2,k-1/2}$ 、 $P_{i,j-1/2,k+1/2}$ 、 $P_{i+1,j-1/2,k+1/2}$ 、 $P_{i,j+1/2,k+1/2}$ 、 $P_{i+1,j+1/2,k+1/2}$ 构成的体素内,如图3所示,则 W_p 的 x 分量将会被分成8份分别加到这8个点的旋度值上。这分割成8份的权值计算方法与三线性插值类似。通过这一步骤,可以从涡粒子的分布得到按上述网格分布的旋度场。

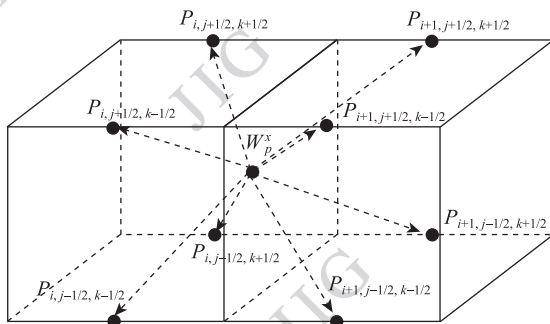


图3 转换涡粒子的过程图

Fig. 3 The process of transforming vorticity from vortices to grid

3.3 求解速度场

利用上述旋度场,通过求解方程组得到速度场,该速度场将用于后续对流和伸展操作。速度场求解的公式为

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \times \mathbf{w} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (6)$$

参照图2中的网格形式,将式(6)进行离散化之后,得到

$$\begin{aligned} D_{i,j,k} - D_{i-1,j,k} + 6u_{i-1/2,j,k} - u_{i-3/2,j,k} - \\ u_{i+1/2,j,k} - u_{i-1/2,j-1,k} - u_{i-1/2,j+1,k} - \\ u_{i-1/2,j,k-1} - u_{i-1/2,j,k+1} = W_{i-1/2,j+1/2,k}^z - \\ W_{i-1/2,j-1/2,k}^z - W_{i-1/2,j,k+1/2}^y + W_{i-1/2,j,k-1/2}^y \end{aligned} \quad (7)$$

式中, i, j, k 表示网格的标号, $D_{i,j,k}$ 表示网格标号为 i, j, k 的网格上的散度, u, v, w 分别表示3个方向上的速度分量, W^x, W^y, W^z 分别表示3个方向上的旋度分量。以 $v_{i,j-1/2,k}$ 和 $w_{i,j,k-1/2}$ 所在位置为中心进行离散化之后,得到

$$\begin{aligned} D_{i,j,k} - D_{i,j-1,k} + 6v_{i,j-1/2,k} - v_{i-1,j-1/2,k} - \\ v_{i+1,j-1/2,k} - v_{i,j-3/2,k} - v_{i,j+1/2,k} - \\ v_{i,j-1/2,k-1} - v_{i,j-1/2,k+1} = W_{i,j-1/2,k+1/2}^x - \\ W_{i,j-1/2,k-1/2}^x - W_{i+1/2,j-1/2,k}^z + W_{i-1/2,j-1/2,k}^z \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} D_{i,j,k} - D_{i,j,k-1} + 6w_{i,j,k-1/2} - w_{i-1,j,k-1/2} - \\ w_{i+1,j,k-1/2} - w_{i,j-1,k-1/2} - w_{i,j+1,k-1/2} - \\ w_{i,j,k-3/2} - w_{i,j,k+1/2} = W_{i+1/2,j,k-1/2}^y - \\ W_{i-1/2,j,k-1/2}^y - W_{i,j+1/2,k-1/2}^x + W_{i,j-1/2,k-1/2}^x \end{aligned} \quad (9)$$

在不考虑边界条件的情况下,由于本文方法的目的是为了模拟不可压缩流体,式(7)中的 D 都应设为0。于是,最终得到一个大型的线性方程组,注意到,该方程组的系数矩阵是对称正定的。这说明该线性方程组可以被许多方法有效地求解,例如预处理共轭梯度法(ICPCG)。同时,由于这里 u, v, w 之间没有关联,因此式(7)~(9)可以分解为分别对应 u, v, w 的3个小型方程组进行求解。

4 边界处理

4.1 固体边界

在流体模拟里面,固体边界通常以固定的边界速度来表示,这意味着,需要将式(7)~(9)中的所有固体速度以固定值替换掉。例如,假设标号为 $i+1, j, k$ 的网格为固体,标号为 i, j, k 的网格为流体,那么网格 $i+1, j, k$ 的6个面的中心点的速度都

为已知固体速度。因此,在对网格 i, j, k 所列方程式(7)~(9)中,需要用已知的固体速度替换掉 $u_{i+1/2,j,k}, v_{i+1,j,k}$ 和 $w_{i+1,j,k}$ 。

另外,在这种情况下,需要利用已知的固体速度和未知的速度变量在式(7)~(9)中替换掉网格 $i+1, j, k$ 的棱上的旋度,如 $W_{i+1/2,j-1/2,k}^x$ 和 $W_{i+1/2,j,k-1/2}^y$ 。比方说,将 $W_{i+1/2,j-1/2,k}^x$ 以 $u_{i+1/2,j,k} - u_{i+1/2,j-1,k} + v_{i,j-1/2,k} - v_{i+1,j-1/2,k}$ 替换掉,将 $W_{i+1/2,j,k-1/2}^y$ 以 $u_{i+1/2,j,k} - u_{i+1/2,j,k-1} + w_{i,j,k-1/2} - w_{i+1,j,k-1/2}$ 替换掉,将固体速度的影响展现在公式中。最后,仍然需要将式(7)~(9)中所有散度设为0。根据这样的策略,将会得到一个能够处理固体边界条件的大型线性方程组。

4.2 自由表面

对于自由表面,可以先考虑简单情况,假设网格 i, j, k 在自由表面之外,而网格 $i-1, j, k$ 是其唯一邻近的处于流体内部的网格,那么由自由表面的定义可知,网格 i, j, k 的6个面上的速度,只有 $u_{i-1/2,j,k}$ 是未知并且需要求解的,其余的速度并不需要关心。因此,在式(7)~(9)中,需要将其余5个速度全都设为0。另外, $D_{i,j,k}$ 将不再设为0,而是用速度表示形式代替。由于只有一个速度未知,其余全为0,因此,此时 $D_{i,j,k} = -u_{i-1/2,j,k}$,其余散度仍设为0。类似地,如果网格 $i-1, j, k$ 在自由表面外部,且邻近网格中只有网格 i, j, k 在流体内部,则需要将网格 $i-1, j, k$ 的6个面上除 $u_{i-1/2,j,k}$ 之外的5个速度设为0,并且将 $D_{i,j-1,k}$ 设为 $u_{i-1/2,j,k}$ 。

更复杂的情况是,对于一个在自由表面外部的网格,存在多个相邻的网格处于流体内部。这意味着该网格上有多个面上的速度为未知变量。这时,

在式(7)~(9)中,该网格的散度需要用这些未知的速度替换,其余的速度将设为0。这样,最终得到了一个考虑了自由表面大型线性方程组。值得注意的是,当该网格有两个不同方向上的邻近网格处于流体内部时,最终得到的线性方程组的系数矩阵虽说仍是对称的,但是不再满足正定的特性,这会降低求解该方程组的速度。

无论在考虑固体边界还是在考虑自由表面时,都只以未知速度的位置为中心列方程式(7)~(9)。利用上述策略,本文方法最终得到不可压缩的,满足不同边界条件的速度场。

5 实验结果

5.1 烟场景

图4中包含3个场景,一个是无固体障碍物的烟喷涌上升场景,一个是有固体球的场景,最后一个运动固体球的场景。在这些场景中,每帧开始时在场景下方增添一些涡粒子和烟粒子,烟粒子用于可视化,同时携带温度。它的模拟过程与涡粒子的对流操作一样,利用计算出的速度场,采用显示欧拉数值方法,更新烟粒子的位置。在这3个场景的最上方边界,则设置为自由表面,其余外边框设为固体边界,这样烟就能自然地冲出模拟区域。这3个场景均采用 $128 \times 256 \times 128$ 像素大小的网格进行辅助模拟。另外,在运动球的场景中,由于采用显示欧拉方法更新涡粒子和烟粒子的位置,这将导致经常会有粒子被球包住。因此,当粒子和球的位置重合时,需要将这些粒子移到球的外部。在本文方法中,则是将粒子移到球表面

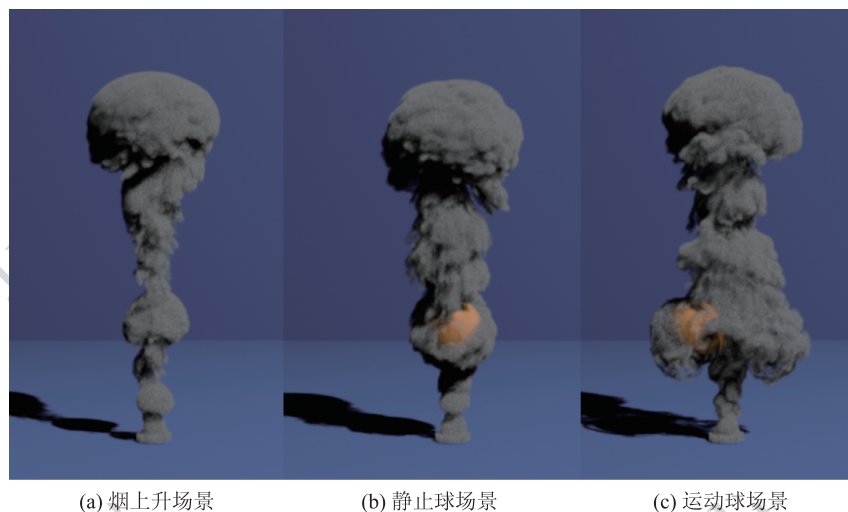


图4 烟上升场景效果图

Fig. 4 The results of rising smoke

上离粒子位置最近的一个点。

图5中两个场景则具有不同的初始条件和外力设置,网格大小为 $128 \times 128 \times 128$ 像素。在阶梯和圆柱体这两个场景中,烟是从左往右喷出。但是,只

在阶梯场景中考虑了重力的影响,而在圆柱体场景中忽略了重力的影响。由图4和图5可知,本文方法具有涡粒子方法保持流体细节的优点,同时本文方法解决了多种边界问题。

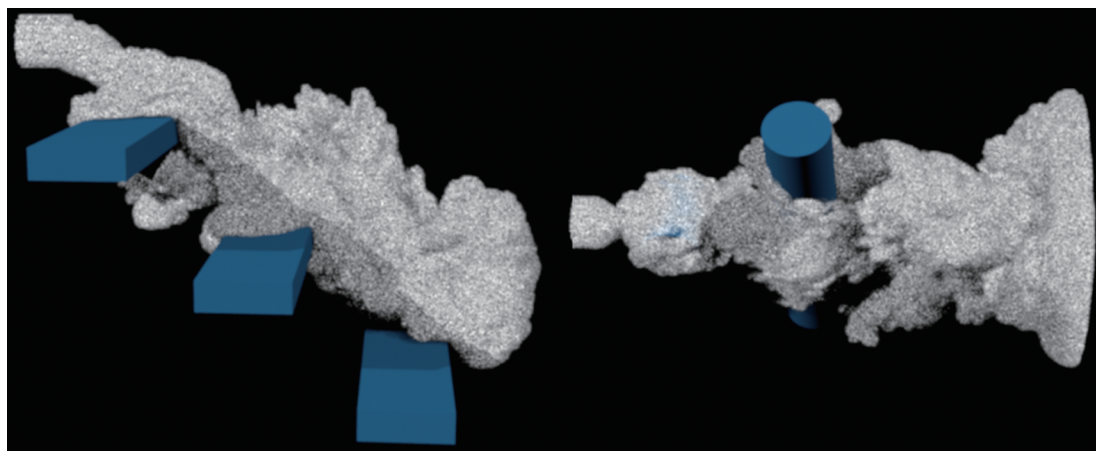


图5 阶梯场景和圆柱体场景效果图

Fig. 5 The results of smoke in Stairs and Cylinders

5.2 能量稳定

如图6所示,该图的目的是为了说明本文方法的边界处理策略造成的模拟区域总动能的变化过程。总动能是所有涡粒子的转动动能之和,图6中总共含有3个场景100帧内总能量的变化趋势。

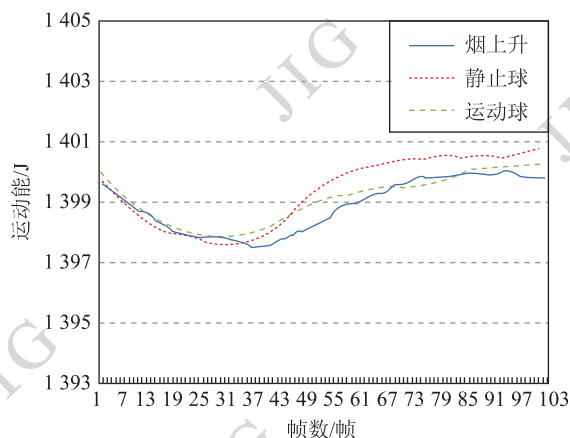


图6 涡粒子模拟方法的总动能变化图

Fig. 6 The chart of energy of the vortex method

在该实验中,由于温度和重力会将势能转换为动能,干扰动能变化,因此将外力项操作省略。另外,只在第1帧开始时,添加了一定数目的涡粒子。这些涡粒子携带一定大小的旋度,使得它们不停地往上升,并且与球交互。在这样的设置下,理论上讲,不可压缩非黏性流体将不会有动能损失,模拟区

域内的总动能将会保持不变。由图6结果可以看出,在3个场景中,该模拟方法既没有大量能量流失,也没有明显的能量增大的趋势,总动能的上下波动与基数相比小于0.005%,证明了该模拟方法非常稳定。

6 讨论

6.1 转换涡粒子的插值方式

本文中容易引起误解的一点在于,由转换涡粒子的插值方式得到的旋度场并不满足散度为0的性质,该性质用公式表述为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0$$

该性质是一般旋度场都具有的性质,那么这种不一致是否会在模拟过程中产生错误?其实是不会的。

首先,利用亥姆霍兹霍奇分解(Helmholtz-Hodge Decomposition^[20]),将上述转换涡粒子步骤得到的旋度场分解为一个无散场和一个无旋场,公式表述为

$$\boldsymbol{w} = \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} + \nabla \times \boldsymbol{\varphi} \quad (10)$$

式中, $\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}$ 即为无旋场, $\nabla \times \boldsymbol{\varphi}$ 即为无散场, $\boldsymbol{\phi}$ 和 $\boldsymbol{\varphi}$ 都是矢量场,不具有物理含义。

其次,观察式(10)可知,破坏 $\boldsymbol{w}$ 无散性质的为项 $\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}$ 。最后,由式(6)可知,在求解速度时,需要

计算 $\nabla \times \boldsymbol{w}$, 而又有 $\nabla \times \boldsymbol{w} = \nabla \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}) + \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varphi}) = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varphi})$ 。

由此可知, 项 $\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}$ 在求解速度过程中被消去了, 在模拟过程中, 起作用的仅仅只是 $\boldsymbol{w}$ 中无散的部分。总而言之, 虽然转换涡粒子得到的旋度场不是严格意义上的旋度场, 但是真正起作用的还是其中满足旋度场无散性质的部分, 也就是说插值方式的不同并不会破坏模拟过程的合理性, 另外, 实验发现利用高斯函数进行插值也是可行的。

6.2 扩散操作

本文方法不同于文献[8], 在处理边界条件时并没有增加涡粒子, 并且由于采用了网格进行辅助模拟, 使得模拟过程非常稳定。这一点也使得其省去扩散操作成为可能。实际上, 在涡粒子方法中, 扩散操作的作用除了使得流体结果产生黏性外, 更重要的是维持模拟过程的稳定。但是在本文方法中, 由于其本身非常稳定, 扩散操作并非必要。

6.3 线性方程组

本文方法需要求解一个比较大的线性方程组以得到速度场, 这个方程组的大小是文献[1]方法的 3 倍, 这导致它需要更多的时间进行模拟。但是, 由于近年来, 硬件技术和线性方程组求解算法的发展, 使得该方程组的求解所需的时间可进一步减少, 例如可通过多重网格方法加以改进。表 1 列出了上述实验场景相关的时间数据, 所有实验串行地运行在具有英特尔 3.40 GHz 的处理器和 16 GB 内存的机器上。由表 1 所示, 求解速度场步骤占据了整个模拟过程的绝大部分时间。

表 1 多个实验场景的时间数据
Table 1 The time of several scenes

场景	转换涡 粒子	求解速 度场	伸展 操作	对流 操作	外力 操作	/s
						总时间
圆柱体	0.033	15.151	0.001	0.002	0.068	15.255
阶梯	0.036	15.018	0.001	0.001	0.066	15.122
运动球	0.066	63.475	0.002	0.004	0.183	63.73

7 结 论

新的涡粒子模拟方法具有基于旋度的流体模拟方法的特性, 能够很好地保持流体细节, 并且该方法

采用了一种交错网格结构, 并结合该网格结构解决了旋度模拟方法中的处理边界条件问题。同时, 该方法具有稳定和易于实现等特点。

参考文献 (References)

[1] Stam J. Stable fluids [C]//Proceedings of the 26th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 1999: 121-128.

[2] Fedkiw R, Stam J, Jensen H W. Visual simulation of smoke [C]//Proceedings of the 28th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM Press, 2001: 15-22.

[3] Treuille A, Lewis A, Popović Z. Model reduction for real-time fluids [C]//ACM SIGGRAPH. New York: ACM press, 2006: 826-834.

[4] Wicke M, Stanton M, Treuille A. Modular bases for fluid dynamics [J]. ACM Transactions on Graphics, 2009, 28(3), 39(1-8).

[5] Macklin M, Müller M. Position based fluids [J]. ACM Transactions on Graphics 2013, 32(4): #104.

[6] Angelidis A, Neyret F, Singh K, et al. A controllable, fast and stable basis for vortex based smoke simulation [C]//The ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. Aire-la-Ville, Switzerland: Eurographics Association, 2006: 25-32.

[7] Angelidis A, Neyret F. Simulation of smoke based on vortex filament primitives [C]//The ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. New York: ACM press, 2005: 87-96.

[8] Park S I, Kim M J. Vortex fluid for gaseous phenomena [C]//The ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. New York: ACM Press, 2005: 261-270.

[9] Selle A, Fedkiw R, Kim B, et al. An unconditionally stable maccormack method [J]. Journal of Scientific Computing, 2008, 35(2-3): 350-371.

[10] Kim B, Liu Y, Llamas I, et al. FlowFixer: using BFECC for fluid simulation [C]//Proceedings of the First Eurographics Conference on Natural Phenomena. Aire-la-Ville, Switzerland: Eurographics Association, 2005: 51-56.

[11] Molemaker J, Cohen M J, Patel S, et al. Low viscosity flow simulations for animation [C]//The ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. Aire-la-Ville, Switzerland: Eurographics Association, 2008: 9-18.

[12] Xu Y X, Liu S G, Wu L Q. Smoke simulation with two-scale vorticity confinement [J]. Multimedia and Signal Processing Communications in Computer and Information Science, 2012, 346: 467-474.

[13] Selle A, Rasmussen N, Fedkiw R. A vortex particle method for

- smoke, water and explosions [J]. ACM Transactions on Graphics, 2005, 24(3): 910-914.
- [14] He S, Wong H C, Wong U H. An efficient adaptive vortex particle method for real-time smoke simulation [C]//Proceedings of the 12th International Conference on Computer-Aided Design and Computer Graphics. Washington: IEEE Computer Society, 2011: 317 - 324.
- [15] Golas A, Narain R, Sewall J, et al. Large-scale fluid simulation using velocity-vorticity domain decomposition [J]. ACM Transactions on Graphics, 2012, 31(6): #148.
- [16] Pfaff T, Thuerey N, Gross M. Lagrangian vortex sheets for animating fluids [J]. ACM Transactions on Graphics, 2012, 31(4): #112.
- [17] Brochu T, Keeler T, Bridson R. Linear-time smoke animation with vortex sheet meshes [C]//Proceedings of the 11th ACM SIGGRAPH / Eurographics Conference on Computer Animation. Aire-la-Ville, Switzerland: Eurographics Association, 2012: 87-95.
- [18] Barnat A, Pollard N S. Smoke sheets for graph-structured vortex filaments [C]//The ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. Aire-la-Ville, Switzerland: Eurographics Association, 2012: 77-86.
- [19] Bridson R, Müller M. Fluid simulation: video files associated with this course are available from the citation page [C]//ACM SIGGRAPH 2007 Courses. New York: ACM Press, 2007: 1-81.
- [20] Bhatia H, Norgard G, Pascucci V, et al. The helmholtz-hodge decomposition-a survey [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2013, 19(8): 1386-1404.