

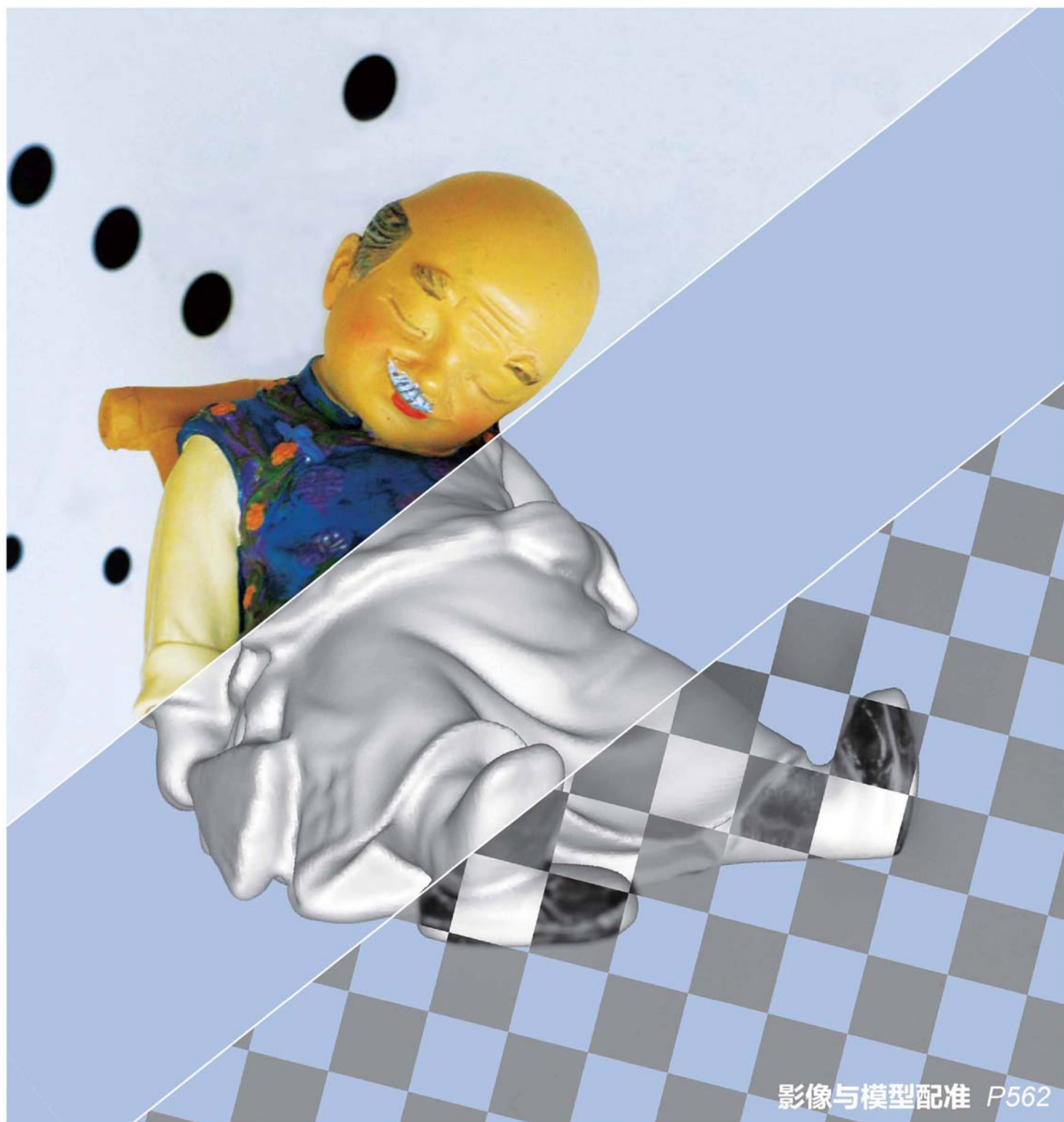


主办: 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

2014
04
VOL.19

ISSN1006-8961
CN11-3758/TB



影像与模型配准 P562



第19卷第4期（总第216期）

2014年4月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院

主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

主 编 李小文

编辑出版《中国图象图形学报》编辑出版委员会

邮政信箱 北京9718信箱

邮 编 100101

电子信箱 jig@irsa.ac.cn

电 话 010-64807995

网 址 www.cjig.cn

广告经营许可证 京朝工商广字第0361号

总 发 行 北京报刊发行局

订 购 全国各地邮局

海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司
(邮政信箱: 北京399信箱 邮编: 100048)

印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian

Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences

Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS
China Society of Image and Graphics

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

Editor-in-Chief LI Xiaowen

Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of
Image and Graphics

P.O.Box 9718, Beijing, P.R.China

Zip code 100101

E-mail jig@irsa.ac.cn

Telephone 010-64807995

Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals

Domestic All Local Post Offices in China

Overseas China International Book Trading Corporation
(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China))

Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

CN 11-3758/TB

ISSN 1006-8961

CODEN ZTTXFZ

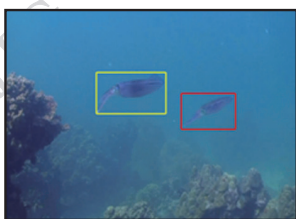
国外发行代号 M1406

国内邮发代号 82-831

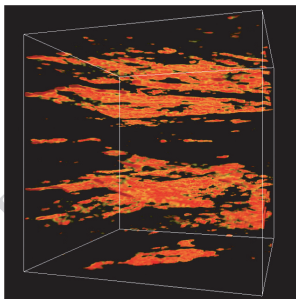
国内定价 50.00元



面泊松融合结合色彩变换的无缝纹理辐射处理(第512页)



融合视觉深度的特征计算与水下目标跟踪(第534页)



针对全空子数据体的GPU体绘制(第577页)

图像处理和编码

- 梯度矢量扩散控制实现边缘保持的彩色图像去噪
贾迪, 孟祥福, 张一飞, 董娜, 李思慧 0493
- 联合矩阵F范数的低秩图像去噪
刘新艳, 马杰, 张小美, 胡钊政 0502
- 面泊松融合结合色彩变换的无缝纹理辐射处理
周漾, 郑顺义, 黄荣永, 马电 0512
- 改进的局部方向模式纹理表示方法
刘海军, 常东超, 张凌宇 0520
- 图像插值空间大容量可逆数字水印算法
王继军 0527

图像分析和识别

- 融合视觉深度的特征计算与水下目标跟踪
王慧斌, 程勇, 陈哲 0534
- 融合颜色属性和空间信息的显著性物体检测
徐丹, 唐振民, 徐威 0541
- 采用人工鱼群的改进广义Hough变换目标定位
李志, 谢强 0549
- 非规则弯曲形变的不变量表示
李国祥, 夏国恩 0556

图像理解和计算机视觉

- 小物体3维重建中影像与几何模型的配准
郑顺义, 王晓南 0562
- 像素聚类改进二进制描述子鲁棒性
惠国保, 李东波 0569

计算机图形学

- 针对全空子数据体的GPU体绘制
李国和, 段忠祥, 吴卫江, 洪云峰, 刘智渊, 程远 0577

医学图像处理

- 基于无损水印的医学图像篡改检测和质量恢复
邓小鸿, 陈志刚, 毛伊敏 0583

遥感图像处理

- 特征点和不变矩结合的遥感图像飞机目标识别
曾接贤, 付俊, 符祥 0592
- 结合稀疏识别的自适应Wallis滤波在高分辨率影像控制点匹配中的应用
耿蕾蕾, 孙权森, 纪则轩, 刘佑鑫, 袁凯 0603

第9届和谐人机环境联合学术会议专栏

- 局部特征点的3维模型变换域水印算法
张建明, 周小梅, 王新宇, 詹永照 0613
- 足球视频搜索引擎中的用户偏好挖掘
胡雨成, 于俊清, 黄贤强, 何云峰, 管涛 0622
- 随机亮度差量化的二进制特征描述
庄东晔, 张冬明, 张勇东, 李锦涛 0630
- L_1 优化在网格去噪中的应用
王鹏, 王胜法, 曹俊杰, 李楠楠, 李波, 苏志勋 0637
- 多视点视频双向实时转码技术的设计与实现
孙立峰, 蔡飞飞, 杨士强 0645

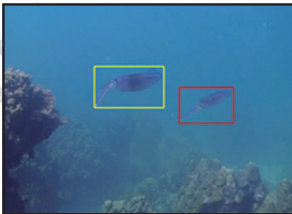
- 第五届数字地球高峰论坛征文通知 封三

CONTENTS

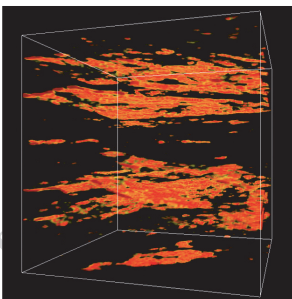
JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Face-wise Poisson blending with color transfer in seamless texturing(P512)



Visual depth based feature calculation and underwater target tracking(P534)



GPU-based volume rendering for full-empty subdata blocks(P577)

Image Processing and Coding

Edge preserving denoising of color image through controlling the gradient vector Jia Di, Meng Xiangfu, Zhang Yifei, Dong Na, Li Sihui	0493
Image denoising of low-rank matrix recovery via joint Frobenius norm Liu Xinyan, Ma Jie, Zhang Xiaomei, Hu Zhaozheng	0502
Face-wise Poisson blending with color transfer in seamless texturing Zhou Yang, Zheng Shunyi, Huang Rongyong, Ma Dian	0512
Improved local directional pattern texture descriptor Liu Haijun, Chang Dongchao, Zhang Lingyu	0520
High capacity reversible watermarking for image interpolation space Wang Jijun	0527

Image Analysis and Recognition

Visual depth based feature calculation and underwater target tracking Wang Huibin, Cheng Yong, Chen Zhe	0534
Combining color names with spatial information for salient object detection Xu Dan, Tang Zhenmin, Xu Wei	0541
Improved generalized Hough transform using artificial fish swarm algorithm in target location Li Zhi, Xie Qiang	0549
The global descriptor for bending non-rigid shapes Li Guoxiang, Xia Guoen	0556

Image Understanding and Computer Vision

Images and geometric model registration in 3D reconstruction of small objects Zheng Shunyi, Wang Xiaohan	0562
Robust descriptor structured by pixel clustering Hui Guobao, Li Dongbo	0569

Computer Graphics

GPU-based volume rendering for full-empty subdata blocks Li Guohe, Duan Zhongxiang, Wu Weijiang, Hong Yunfeng, Liu Zhiyuan, Chen Yuan	0577
--	------

Medical Image Processing

Lossless watermarking algorithm for medical image's tamper detection and recovery with high quality Deng Xiaohong, Chen Zhigang, Mao Yimin	0583
---	------

Remote Sensing Image Processing

Aircraft target recognition in remote sensing images based on distribution of the feature points and invariant moments Zeng Jiexian, Fu Jun, Fu Xiang	0592
Adaptive enhancement via sparse recognition for automatic control point extraction in high-resolution images Geng Leilei, Sun Quansen, Ji Zexuan, Liu Jixin, Yuan Kai	0603

Special Issue on HHME 2013

Transform domain watermarking scheme of 3D models based on local feature points Zhang Jianming, Zhou Xiaomei, Wang Xinyu, Zhan Yongzhao	0613
User preference mining for soccer video search engine Hu Yucheng, Yu Junqing, Huang Xianqiang, He Yunfeng, Guan Tao	0622
Novel binary feature from intensity difference quantization Zhuang Dongye, Zhang Dongming, Zhang Yongdong, Li Jintao	0630
The application of l_1 -optimization in mesh denoising Wang Peng, Wang Shengfa, Cao Junjie, Li Nannan, Li Bo, Su Zhixun	0637
The design and implementation of real time MVC transcoding Sun Lifeng, Cai Feifei, Yang Shiqiang	0645

中图法分类号: TP391.9 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2014)04-0502-10

论文引用格式: 刘新艳, 马杰, 张小美, 胡钊政. 联合矩阵 F 范数的低秩图像去噪[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(4): 502-511. [DOI: 10.11834/jig.20140402]

联合矩阵 F 范数的低秩图像去噪

刘新艳, 马杰, 张小美, 胡钊政

河北工业大学信息工程学院, 天津 300401

摘要: 目的 低秩矩阵恢复是通过最小化矩阵核范数来获得低秩解, 然而待恢复低秩矩阵相关性低的要求往往会导致求解不稳定的情况。方法 针对该问题, 研究一种基于变量分裂的低秩图像恢复去噪算法, 引入待恢复矩阵的 Frobenius 范数作为新正则项, 与原有低秩矩阵的核范数组成联合正则化项, 对问题进行凸松弛后, 采用变量分裂的增广拉格朗日乘法求解。结果 为考察方法的稳定性和去噪能力, 选取了不同参数类型的加噪图像进行仿真, 并结合恢复时间、信噪比、差错率等评价标准与现有低秩矩阵恢复算法进行对比。结论 实验结果表明增加 Frobenius 范数的低秩矩阵恢复模型在保持原有低秩稀疏恢复的前提下, 具有良好的去噪性能, 对相关性强的低秩图像恢复结果稳定性好, 获得了更高的信噪比。

关键词: 凸优化; 低秩恢复; 增广拉格朗日乘法; 变量分裂; F 范数

Image denoising of low-rank matrix recovery via joint Frobenius norm

Liu Xinyan, Ma Jie, Zhang Xiaomei, Hu Zhaozheng

Department of Information Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China

Abstract: **Objective** Low-rank matrix recovery is a hot topic in signal processing, artificial intelligence and optimization. Convex optimization based on low-rank matrix recovery problems coming from the compressive sensing technology, which is very popular these years for image processing, computer vision, text analysis, recommendation system, etc. Low-rank matrix recovery is achieved by minimizing the nuclear norm matrix to obtain a low rank solution, however, an unstable solution can be obtained due to the requirements for the low correlation of a low rank matrix. **Method** A low rank image denoising algorithm is proposed based on variable splitting method. The method introduces a Frobenius norm of low rank matrices as a new regular item and it is also combined with the original low rank nuclear norm to optimize the image denoising. In order to solve the improved denoising model, an augmented Lagrange multiplier method based on variable splitting is used by using convex relaxation of sparse recovery methods. **Result** Finally, to verify the stability and denoising capability of the presented approach, images with different noise types and simulation parameters are generated and processed using the presented method and the results are compared with the existing low rank matrix algorithm. Performance analysis of recovery time, signal-to-noise ratio, and error rate are evaluated at the same time. **Conclusion** The proposed method can yield superior performance compared to the traditional low rank model in terms of the test results. The experiments indicate that the improved models, while keeping the original low-rank sparse recovery, have good denoising performance and excellent stability on the strong correlation matrix and we can get a higher signal-to-noise ratio.

收稿日期: 2013-07-15; 修回日期: 2013-10-29

基金项目: 国家自然科学基金项目(61203245, 51208168); 河北省自然科学基金项目(F2012202027)

第一作者简介: 刘新艳(1987—), 女, 河北工业大学信息工程学院电子与通信工程专业在读硕士研究生, 主要研究方向为图像分析与处理。E-mail: liuxinyan_2011@126.com

通信作者: 马杰, jma@hebut.edu.cn

Key words: convex optimization; low-rank recovery; augmented Lagrange multiplier method; variable splitting; Frobenius norm

0 引言

近几年基于稀疏表示的压缩感知^[1](CS)在理论研究上取得了重大的进步,这样就促使稀疏表示成为了一种更有效和流行的数据表示方式。低秩矩阵恢复^[2](LRMR)更是将向量数据的稀疏表示推广到了矩阵的低秩情形,它已经成为继CS之后的另一种重要的数据采集和表示方式。LRMR主要是先将数据矩阵表示成低秩矩阵与稀疏噪声矩阵之和的形式,然后通过求解核范数优化问题来恢复出低秩矩阵。LRMR问题源自矩阵重建,而矩阵重建则起源于压缩感知中的信号重构问题,该问题是近年来图像稀疏表示的研究热点,并且在信号处理、人工智能、图像处理、模式识别、计算机视觉、文本分析等领域有重要的应用。首先在人脸识别系统^[3]中LRMR模型的应用可有效地识别遮挡的人脸图像。彭义刚等人^[4-5]设计了一种基于LRMR的鲁棒联合图像对齐方法(RASL),用于对齐一组本质上线性相关的图像,同时可以去除图像中存在的遮挡、污损等。马毅等人^[6]还把该模型应用在低秩纹理结构,从而达到校正图像和字符的目的。Candes等人^[7]将LRMR用于监控视频的背景建模中,成功地将静止的背景和活动的前景分开。

研究已经表明,基于低秩矩阵恢复算法,对低秩图像,包括本身低秩和局部低秩的图像进行去噪处理,可以实现低秩矩阵与稀疏矩阵的分离。在文献[8]中所提到的稀疏矩阵一般都是随机幅值任意大但是分布稀疏的误差,而实际应用中图像往往会被很多噪声污染,像椒盐噪声、高斯噪声等,导致实际应用中该模型对噪声敏感,去噪恢复算法的稳定性不好。针对这个问题,尝试引用待恢复矩阵的Frobenius范数作为新正则项,与原有低秩矩阵的核范数进行联合正则化求解,其中稀疏矩阵不仅可以是随机幅值任意大但是分布稀疏的误差,也可以是随机的椒盐噪声,甚至对高斯噪声去除的过程也获得了不俗的效果;另外,所提模型对相关性的图像去噪性能增强。通过仿真实验表明,无论是对随机分布的稀疏误差、椒盐噪声,还是对高斯噪声去除,所提出的基于变量分裂的低秩矩阵恢复去噪模型提高

了恢复低秩矩阵解的稳定性。

1 低秩矩阵恢复模型及解法

1.1 低秩恢复基本模型

低秩矩阵恢复,最早是由Wright等人^[9]提出的,指当矩阵的某些元素被严重破坏后,自动识别出被破坏的元素,恢复出原矩阵,该模型的前提是原矩阵是低秩的或者近似低秩,所以低秩矩阵恢复又被命名为鲁棒主成分分析^[10](RPCA)或者低秩稀疏矩阵分解(LRSMD)。假设矩阵 D ,是由一个低秩矩阵 A 受到噪声矩阵 E 的破坏所得,并且 E 是一个稀疏矩阵,也就是说矩阵 E 中关于非零元素的个数较少,这样就可以运用LRMR来进行问题的求解,于是低秩矩阵恢复可用如下优化问题来描述,即

$$\min \text{rank}(A) + \lambda \|E\|_0 \quad \text{s. t.} \quad A + E = D \quad (1)$$

式中, $\|E\|_0$ 是稀疏矩阵的 L_0 范数即矩阵中非零元素的个数,然而从理论上说式(1)可以实现,但是实际上不可行,这是一个NP问题,计算量非常大,所以需要寻找合适的范数近似求解上述最优化问题,Candes^[11]从理论上证明了 L_1 范数(矩阵中所有元素绝对值的和)最小化求得的解非常接近 L_0 范数最小化的解,这样就可以将 L_0 范数最小化问题松弛到 L_1 范数最小化问题。并且式(1)中涉及矩阵的秩,rank函数是奇异值的 L_0 范数,是非凸的不连续的函数,而核范数是奇异值的 L_1 范数,根据上述理论可以用核范数来近似矩阵的rank函数,即

$$\min \|A\|_* + \lambda \|E\|_1 \quad \text{s. t.} \quad A + E = D \quad (2)$$

式中,函数 $\|A\|_* = \sum_{k=1}^n \sigma_k(A)$ 是矩阵的核范数, $\sigma_k(A)$ 表示矩阵的第 k 个奇异值, λ 为权重参数,设定为 $\lambda = 1/\sqrt{\max(m, n)}$ 。本质就是把求解矩阵的秩凸优化为求解矩阵的迹,把具有多个解的方程变为唯一解并可以求解的方程。Recht^[12]从理论上证明了凸优化求解的可行性,对于矩阵的稀疏设想,可认为大多数的噪声和干扰相对于数据自身来说是稀疏的。

1.2 基于交替增广拉格朗日乘子法的解法

对于低秩矩阵恢复,除了Recht等人解决了它的根本理论证明的问题外,马毅等人^[13]也在其求解

算法方面作出了很大的贡献。求解式(2)时可以使用多种优化算法,比如迭代阈值算法^[14](IT),虽然该算法迭代公式形式简单且收敛,但它的收敛速度比较慢,且难以选取合适的步长,所以限制了应用范围;文献[14]在IT的基础上提出的快速阈值迭代算法(FIST)虽然在时间上有所提高,但是还不能达到理想效果;加速近端梯度算法^[15](APG)是在某一点最小化目标函数的近似函数,虽然与IT算法类似,但是降低了迭代次数,运行时间有所提高;方向交替乘子算法^[16-17](ADMM)充分利用目标函数可分离的结构特点,对其中两项交替求最小化,该算法与增广拉格朗日乘子法类似;增广拉格朗日乘子法^[18](ALM)经过研究证明,该算法比其他算法恢复时间快,而且可以达到更高的精度,需要较低的存储空间,所以下面重点介绍关于ALM的优化的过程。

利用增广拉格朗日乘子法来求解低秩矩阵恢复问题,首先构造低秩矩阵恢复问题的增广拉格朗日函数

$$L(\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{Y}, \mu) = \|\mathbf{A}\|_* + \lambda \|\mathbf{E}\|_1 + \langle \mathbf{Y}, \mathbf{D} - \mathbf{A} - \mathbf{E} \rangle + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{D} - \mathbf{A} - \mathbf{E}\|_F^2 \quad (3)$$

式中, μ 为惩罚参数,确保算法收敛性, $\mathbf{Y}$ 为拉格朗日乘子,根据文献[19]可知,利用次微分和近邻算子的关系,核范数与 L_1 范数的最小值问题可以分别由奇异值收缩算子与软阈值(收缩)算子近似替代,其替代形式为

$$\min_{\mathbf{X}} \varepsilon g(\mathbf{X}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{W}\|_F^2 \quad (4)$$

当 $g(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|_1$ 时, $\mathbf{X} = S_\varepsilon[\mathbf{W}]$, 即 $S_\varepsilon[\mathbf{W}] = \max(|\mathbf{W}| - \varepsilon, 0) \text{sgn}(\mathbf{W})$;

当 $g(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|_*$ 时, $\mathbf{X} = D_\varepsilon(\mathbf{W})$, 即 $D_\varepsilon(\mathbf{W}) = US_\varepsilon[V^T]$ 。

式中, U 为右奇异值, V 为左奇异值, ε 作为权重参数控制平衡。运用这种形式的近似替代式(3)就可以进行如下求解,当 $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_k, \mu = \mu_k$ 时,使用交替方式求解该优化问题,也就是每次最小化上述问题,先固定 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{Y}$ 求一个使 L 最小化的 $\mathbf{A}$, 而后固定 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{Y}$, 求一个使 L 最小化的 $\mathbf{E}$, 这样迭代数次就可以收敛到这个子问题的最优解,更新 $\mathbf{A}$ 时,则

$$\arg \min_{\mathbf{A}} \|\mathbf{A}\|_* + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{D} - \mathbf{A} - \mathbf{E} + \mu^{-1} \mathbf{Y}\|_F^2 = D_{\mu^{-1}}(\mathbf{D} - \mathbf{E} + \mu^{-1} \mathbf{Y}) \quad (5)$$

更新 $\mathbf{E}$ 时,则

$$\arg \min_{\mathbf{E}} \lambda \|\mathbf{E}\|_1 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{D} - \mathbf{A} - \mathbf{E} + \mu^{-1} \mathbf{Y}\|_F^2 = S_{\lambda/\mu}(\mathbf{D} - \mathbf{A} + \mu^{-1} \mathbf{Y}) \quad (6)$$

交替更新 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}$ 直到满足终止条件,这种算法就是低秩矩阵恢复的精确增广拉格朗日乘子(EALM),实际上,文献[13,18]指出,只需要更新 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}$ 各一次得到子问题的一个近似解,足以使算法最终收敛到原问题的最优解,这样就得到一个更简单且收敛更快的算法,非精确的增广拉格朗日乘子法(IALM),其迭代公式为

$$\mathbf{A}_{k+1} = \arg \min_{\mathbf{A}} L(\mathbf{A}, \mathbf{E}_{k+1}, \mathbf{Y}_k, \mu_k) = D_{\mu_k^{-1}}(\mathbf{D} - \mathbf{E}_{k+1} + \mu_k^{-1} \mathbf{Y}_k) \quad (7)$$

$$\mathbf{E}_{k+1} = \arg \min_{\mathbf{E}} L(\mathbf{A}_{k+1}, \mathbf{E}, \mathbf{Y}_k, \mu_k) = S_{\lambda/\mu_k}(\mathbf{D} - \mathbf{A}_{k+1} + \mu_k^{-1} \mathbf{Y}_k) \quad (8)$$

算法1 低秩图像去噪的IALM算法流程

输入: 输入图像 $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 初始化 $\mathbf{Y}_0, \mathbf{E}_0 = 0$,

$\mu_0, k_0 = 0$;

while not converged do

$(\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}) = \text{svd}(\mathbf{D} - \mathbf{E}_k + \mu_k^{-1} \mathbf{Y}_k)$

$$(\mathbf{A}, \mathbf{E}) \leftarrow \begin{cases} \mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{U} \mathbf{S}_{\mu_k^{-1}}[\mathbf{S}] \mathbf{V}^T \\ \mathbf{E}_{k+1} = S_{\lambda/\mu_k^{-1}}[\mathbf{D} - \mathbf{A}_{k+1} + \mu_k^{-1} \mathbf{Y}_k] \\ \mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{Y}_k + \mu_k(\mathbf{D} - \mathbf{A}_{k+1} - \mathbf{E}_{k+1}) \end{cases}$$

更新 μ_k

end while

输出: 低秩图像与稀疏图像, 即最优解 $(\mathbf{A}, \mathbf{E})$ 。

LRMR模型的IALM的算法在数据实验以及实际低秩图像去噪方面都达到了理想的效果,文献[18]中的IALM算法比文献[15]的APG算法恢复时间快5倍以上,并且可以达到较高的精度,使LRMR模型在理论和实际应用上都有了进一步的提高。但是其在低秩图像受到高斯噪声污染的时候效果就不理想了,这就限制了该方法在实际中的应用,本文在此基础上提出的改进模型对高斯噪声以及椒盐噪声都有一定的实用效果。

2 改进的低秩矩阵去噪算法

2.1 低秩恢复的稳定模型

研究发现,低秩矩阵恢复模型具有一定的局限性,对于稀疏矩阵有特别的要求,去除噪声的效果不稳定,这样就缩小了该算法的实际应用范围。在文献[20-21]中将Frobenius范数与 L_1 范数的联合作

为正则项已经在压缩感知和稀疏表示中成功应用, 压缩感知基本理论表明模型解的稀疏性和稳定性不可兼得, 算法分析时需要考虑二者之间的相互影响。Elastic net^[22-23] 是一类具有代表性的模型, 它将 L_1 范数与 L_2 范数相结合作为惩罚函数, 与最小二乘回归联合组成新的线性组合, 解决了稀疏性和稳定性间的平衡关系。通常 L_1 范数 (即 Lasso 回归) 能够产生稀疏解, 可保证回归系数有出现零的情况, 起到了选择变量的作用, 缺点是可能导致过度压缩, 出现不稳定解。而 L_2 范数惩罚函数稳定性好, 通过收缩回归系数降低误差, 但是不易产生稀疏解。前面模型分析可知, 矩阵恢复问题能够产生低秩解, 但由于模型中只考虑 L_1 正则化项, 可导致相关性强的恢复问题得到不稳定解。因此, 根据 Elastic net 的基本思想, 研究一种改进的低秩去噪恢复模型, 惩罚项中将待恢复矩阵的核范数和 F 范数相结合, 利用 F 范数控制待恢复矩阵的稳定性, 核范数控制待恢复矩阵的唯一性和稀疏性。达到有效去除噪声的目的, 并且能够使相关性强的图像恢复结果更加稳定, 改进的求解模型为

$$\begin{aligned} \min \|A\|_* + \lambda \|E\|_1 + \gamma \|A\|_F^2 \\ \text{s. t. } A + E = D \end{aligned} \quad (9)$$

2.2 基于变量分裂的 ALM 解法

可以利用增广拉格朗日乘子法来求解含有 $\|A\|_F^2$ 项的矩阵恢复问题。含有 $\|A\|_F^2$ 项的增广拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L(A, E, Y, \mu) = \|A\|_* + \lambda \|E\|_1 + \\ \gamma \|A\|_F^2 + \langle Y, D - A - E \rangle + \\ \frac{\mu}{2} \|D - A - E\|_F^2 \end{aligned} \quad (10)$$

对式(10)采用变量分裂^[24]的方式进行交替求解, 即

$$\begin{aligned} L(A, E, Y, \mu) = \|A\|_* + \lambda \|E\|_1 + \\ \gamma \|A\|_F^2 + \langle Y, D - A - E \rangle + \\ \frac{\mu}{2} \|D - A - E\|_F^2 \\ \text{s. t. } B = A \end{aligned} \quad (11)$$

令 $Y = (Y_1, Y_2)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, 式(11)的无约束拉格朗日形式为

$$\begin{aligned} L(A, E, Y, \mu) = \|A\|_* + \lambda \|E\|_1 + \\ \gamma \|B\|_F^2 + \langle Y_1, D - A - E \rangle + \\ \frac{\mu_1}{2} \|D - A - E\|_F^2 + \langle Y_2, B - A \rangle + \\ \frac{\mu_2}{2} \|B - A\|_F^2 \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)进一步变形为

$$\begin{aligned} L(A, E, Y, \mu) = \|A\|_* + \lambda \|E\|_1 + \\ \gamma \|B\|_F^2 + \frac{\mu_1}{2} \|D - A - E + \mu_1^{-1} Y_1\|_F^2 + \\ \frac{\mu_2}{2} \|B - A + \mu_2^{-1} Y_2\|_F^2 \end{aligned} \quad (13)$$

根据 LRMR 的求解过程, 可知核范数与 L_1 范数的最小值可以分别由奇异值收缩算子与软阈值近似替代, 改进模型运用非精确的增广拉格朗日乘子法进行近似替代, 其求解过程为
更新 E 时

$$\begin{aligned} \arg \min_E \lambda \|E\|_1 + \frac{\mu_1}{2} \|D - A - E + \mu_1^{-1} Y_1\|_F^2 = \\ S_{\lambda/\mu_1}(D - A + \mu_1^{-1} Y_1) \end{aligned} \quad (14)$$

更新 B 时

$$\arg \min_B \gamma \|B\|_F^2 + \frac{\mu_2}{2} \|B - A + \mu_2^{-1} Y_2\|_F^2 \quad (15)$$

式(15)是强凸函数, 可以通过其偏微分函数来求其最小值, 则上述方程的最小值

$$B = \frac{\mu_2}{2\gamma + \mu_2} (A - \mu_2^{-1} Y_2) \quad (16)$$

更新 A 时

$$\begin{aligned} \arg \min_A \|A\|_* + \frac{\mu_1}{2} \|D - A - E + \mu_1^{-1} Y_1\|_F^2 + \\ \frac{\mu_2}{2} \|B - A + \mu_2^{-1} Y_2\|_F^2 \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)运用近邻算子近似约束, 求得解为

$$\begin{aligned} A = D_{(\mu_1 + \mu_2)^{-1}} (\mu_1 (D - E + \mu_1^{-1} Y_1) + \\ \mu_2 (B + \mu_2^{-1} Y_2)) \end{aligned} \quad (18)$$

式中

$$Y_1^{k+1} = Y_1^k + \mu_1^k (D - A_{k+1} - E_{k+1}) \quad (19)$$

$$Y_2^{k+1} = Y_2^k + \mu_2^k (B_{k+1} - A_{k+1}) \quad (20)$$

根据推导过程, 改进模型求解流程如算法 2。

算法 2 低秩图像去噪的变量分裂 ALM 算法流程

输入: 输入图像 $D \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 初始化 $Y_0 = 0, k_0 = 0, \gamma = 1E-6$;

while not converged do

求中间变量 $B, B = \frac{\mu_2}{2\gamma + \mu_2} (A - \mu_2^{-1} Y_2)$

根据 B 更新 A, E

$$\begin{cases} E_{k+1} = S_{\lambda/\mu_1^k}(D - A_{k+1} + (\mu_1^k)^{-1} Y_1^k) \\ A_{k+1} = D_{(\mu_1^k + \mu_2^k)^{-1}} (\mu_1^k (D - E_{k+1} + (\mu_1^k)^{-1} Y_1^k) + \\ \mu_2^k (B_{k+1} + (\mu_2^k)^{-1} Y_2^k)) \end{cases}$$

更新
$$\begin{cases} \mu_1^{k+1} = \mu_1^k + 1 \\ \mu_2^{k+1} = \mu_2^k + 1 \end{cases}$$

end while

输出:低秩图像与稀疏图像,即最优解 $(\mathbf{A}, \mathbf{E})$ 。

改进模型中的目标函数是强凸的, $\|\mathbf{A}\|_*$ 与 $\gamma \|\mathbf{A}\|_F^2$ 的结合既保证了解的唯一性也增强了解的稳定性,式中,参数 γ 控制增加项对解的影响。下面就进行实验来验证改进模型的有效性。

3 实验结果及分析

3.1 评价标准

分别从以下几个参数对改进模型与 LRMR 模型进行对比分析

$$\text{SNR} = 10\lg \left[\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(i,j)^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [g(i,j) - f(i,j)]^2} \right] \quad (21)$$

$$\text{PSNR} = 10\lg \frac{255^2}{1/mn \sum \sum (g - f)^2} \quad (22)$$

$$\text{err} = \frac{\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_F}{\|\mathbf{d}\|_F} \quad (23)$$

式中, $\mathbf{g}$ 为原始图像, $\mathbf{f}$ 为恢复图像, $\mathbf{d}$ 为含噪图像, SNR 与 PSNR 分别代表信噪比与峰值信噪比,上式可以看出 SNR 与 PSNR 越大说明恢复出来的图像越逼近真实清晰图像。err 代表差错率,用两个 F 范数来求其逼近解,从式(23)可以看出恢复出来的图像与原始图像越逼近则 $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_F$ 就越接近零,那么差错率就越小。

3.2 测试结果

利用 CPU 为 2.0 GHz,内存为 2 GB 的计算机,通过 MATLAB R2008a 编程实现,取参数 $\lambda = 1/\sqrt{\max(m,n)}$,式中, (m,n) 是矩阵的维数。

3.2.1 算法性能的比较

将 LRMR 模型的 IALM 算法与改进模型算法进行比较,实验结果如表 1 所示。实验中,根据三元组 $\{m, \text{rank}(\mathbf{A}^*), \|\mathbf{E}^*\|_0\}$ 随机生成矩阵。其中 m 为矩阵维, $(\mathbf{A}^*, \mathbf{E}^*)$ 是真实解,假定 $\text{rank}(\mathbf{A}^*) = r$ 。首先,生成一个秩为 r 的矩阵 $\mathbf{A}^* = \mathbf{L}\mathbf{R}^T$,其中 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{R}$ 分别是 $m \times r$ 阶随机矩阵,且每个元素都是独立高斯随机变量;同时,生成一个稀疏矩阵 $\mathbf{E}^*$,其非零元素数目为 $\|\mathbf{E}^*\|_0$,且均匀分布在 $[-500, 500]$ 的区间; $\mathbf{E}^*$ 为均值为 0,方差为 0.025 的高斯噪声;最后,利用 $\mathbf{D} = \mathbf{A}^* + \mathbf{E}^*$ 生成目标矩阵。运用两种算

表 1 低秩恢复算法的比较

Table 1 The comparison of the low-rank recovery algorithm

m	秩	方法	均匀分布稀疏率为 0.05			高斯分布均值为 0,方差为 0.025		
			时间/s	迭代次数/次	$\frac{\ \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A}\ _F}{\ \mathbf{A}\ _F}$	时间/s	迭代次数/次	$\frac{\ \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A}\ _F}{\ \mathbf{A}\ _F}$
100	10	LRMR	0.455 7	32	1.564 1E-007	0.661 5	37	8.170 8E-001
		本文	0.638 3	24	1.270 2E-007	0.442 3	38	7.142 3E-002
	30	LRMR	0.699 3	35	2.825 0E-007	0.803 7	38	8.542 1E-001
		本文	0.740 8	33	2.075 1E-007	0.773 3	38	9.158 7E-002
200	20	LRMR	2.394 8	22	6.107 7E-007	3.498 3	38	9.376 3E-001
		本文	2.350 7	22	3.237 8E-007	3.108 7	39	9.366 0E-002
	60	LRMR	3.317 1	35	4.473 1E-006	4.889 5	39	9.612 1E-001
		本文	3.436 8	32	8.123 5E-007	3.712 3	40	9.445 7E-002
500	50	LRMR	16.971	27	4.583 0E-007	23.133 5	38	9.782 4E-001
		本文	16.771	24	4.273 1E-007	20.015 6	36	9.546 5E-002
	150	LRMR	25.103	33	4.409 8E-005	28.175 0	39	9.786 3E-001
		本文	24.457	30	3.272 4E-006	25.998 8	38	9.646 7E-002

法求出 $\hat{A}$ 与 $\hat{E}$, 计算出 $\hat{A}$ 与 A^* 的相对误差, 以及算法的迭代次数和运行时间。从仿真结果中可以看出, 虽然改进模型在去除均匀分布的稀疏噪声时间较 LRMR 模型慢, 但是准确度较高, 随着维数与秩的增加改进模型的准确度和计算速度都会大幅度提升。特别是在对高斯分布的噪声处理时, 改进模型在准确度和计算速度上都明显高于 LRMR 模型, 其相对误差比 LRMR 模型低一个百分点。

3.2.2 图像去噪实例

首先利用改进模型对低秩图像进行测试, 在椒盐噪声与高斯噪声逐渐增加的情况下, 图像恢复效果见表 2, 其中图像为 198×205 的棋盘格图像。另外, 还将改进模型与 LRMR 模型对图片噪声逐渐增加进行对比, 实验部分椒盐噪声选择在 $10\% \sim 50\%$, 通过观察图像恢复的差错率, 以及信噪比来进行比较分析, 对于高斯噪声部分, 采用方差为 0.0065 到 0.1 进行实验, 分别从 SNR、PSNR 以及差

错率进行分析比较, 实验结果曲线图见图 1 及图 2。

图 1 给出图像含椒盐噪声达到 50% 的时候 LRMR 模型对棋盘格图像的去噪差错率为 3.71782×10^{-2} , 而改进模型此时的差错率低一个百分点为 3.58345×10^{-3} , 而改进模型在椒盐噪声增加到 40% 的时候, 差错率就控制在 10^{-4} , 能达到非常理想的效果; 图 2 给出含椒盐噪声的图像恢复 SNR 与 PSNR, 其随着噪声的增加而逐渐减小直到含噪声 50% 的时候改进模型的 SNR 低于 30 dB , 但是仍然高于 LRMR 模型。对于高斯噪声的选择, 图 1 中两种模型的差错率均随着高斯噪声方差增大而变大, 改进模型的差错率在含噪方差为 0.1 的时候为 1.091212×10^{-1} , 误差比较大效果不理想, 图 1 中改进模型曲线显示方差在 0.05 以内差错率均低于 1.684165×10^{-2} , 这样能充分地抑制高斯噪声, 达到去除高斯噪声的目的, 而 LRMR 模型达不到这个效果, 差错率始终比较大; 图 2 中恢复的 SNR 和

表 2 改进模型对椒盐噪声及高斯噪声恢复情况

Table 2 The new model to salt and pepper noise and Gaussian noise recovery

椒盐噪声					高斯噪声				
含噪/%	时间/s	SNR/dB	PSNR/dB	err	含噪方差	时间/s	SNR/dB	PSNR/dB	err
10	7.543	66	81	1.04857E-004	0.00625	6.189	34	41	4.645295E-003
20	8.592	53	74	1.95534E-004	0.0125	7.175	29	38	6.169208E-003
30	8.715	47	59	3.41966E-004	0.025	7.347	25	35	8.576207E-003
40	10.543	39	49	7.46668E-004	0.05	8.135	22	31	1.684165E-002
50	12.389	24	33	3.58345E-003	0.1	9.389	16	23	1.091212E-001

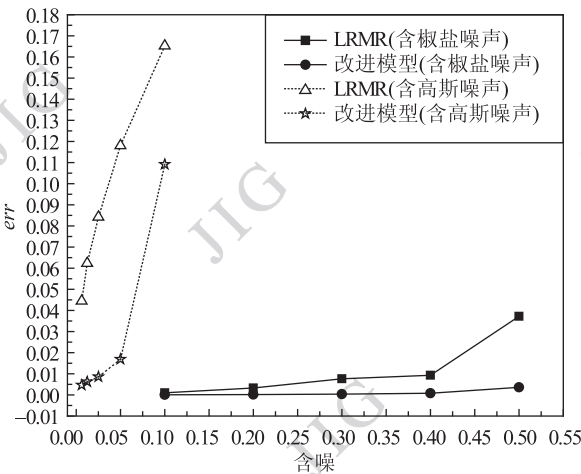


图 1 两种方法在恢复差错率上的对比

Fig. 1 Two methods of image recover on error rate

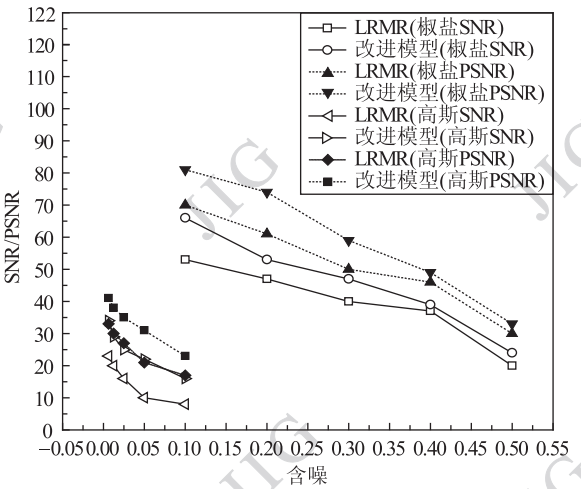


图 2 两种方法在恢复 SNR 及 PSNR 上的对比

Fig. 2 Two methods of image recover on SNR and PSNR

PSNR,改进模型有很大的优势,比 LRMR 模型高出 10 dB 以上,并且当方差达到 0.05 的时候 PSNR 还可以在 30 dB 以上;综上所述,在差错率和信噪比共同约束下,以下实验中椒盐噪声均加到 40%,高斯噪声选择方差为 0.05,这样均能够达到比较理想的效果。

为了进一步验证改进模型性能,实验中采集了 100 幅典型低秩图像进行测试分析,其中这些图像的最大秩为 16,对其分别加入的 40% 的椒盐噪声,和方差为 0.05 的高斯噪声。在对得到的数据进行统计平均值后,分别从差错率、恢复时间和峰值信噪比 3 个方面得出改进模型与 LRMR 模型的比较曲线,结果如图 3—图 5 所示。

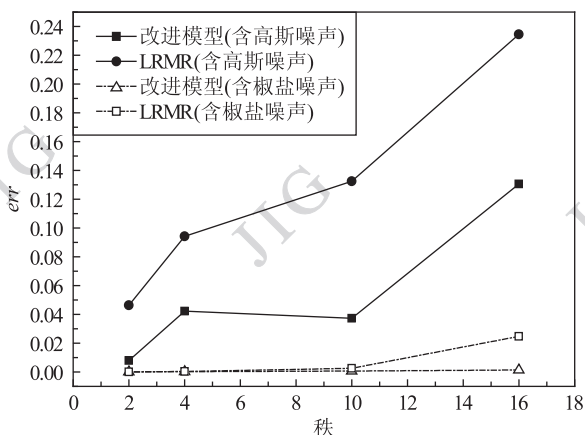


图 3 两种方法在恢复差错率上的对比

Fig. 3 Two methods of image recover on error rate

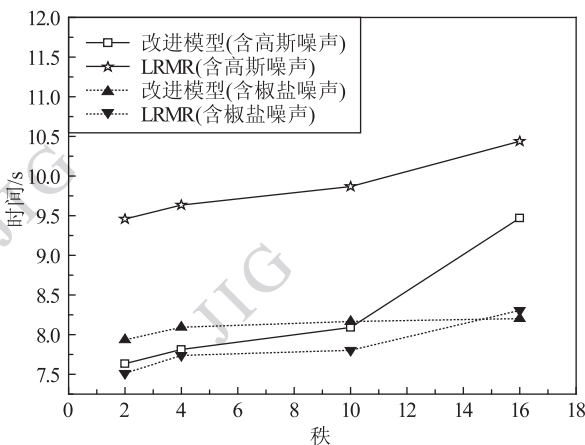


图 4 两种方法在恢复时间上的对比

Fig. 4 Two methods of image recover on time

由图 3 可以看出,改进模型比 LRMR 模型更具稳定性,特别是在去除高斯噪声时差错率明显小于 LRMR

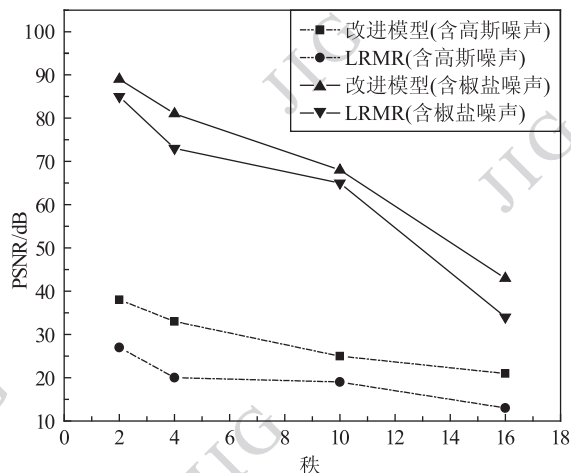


图 5 两种方法在恢复峰值信噪比上的对比

Fig. 5 Two methods of image recover on PSNR

模型。图 4 是对恢复时间的对比图,从图 4 中可以看出改进模型在去噪的时间上都有了很大的提高,不管是椒盐噪声还是高斯噪声都适用,并且在秩小的情况下时间都在 10 s 以下。图 5 是从峰值信噪比方面对改进模型与 LRMR 模型的对比分析,改进模型可以达到更高的信噪比,特别是抑制高斯噪声方面,信噪比高达 20 dB 以上,这样就证明了改进模型中增加的 F 范数在低秩矩阵恢复中的成功应用,模型中的核范数很好地保持了图像恢复的有效性,而新增加的 F 范数又在一定程度上提升了恢复解的稳定性。这样就很好地说明了改进模型的有效性和稳定性。

图 6 分别对原始的低秩图像进行 3 方面的处理:划痕图像、40% 的椒盐噪声破坏、方差为 0.05 的高斯噪声破坏。图 6(c)列是采用 LRMR 方法对以上 3 种带噪图像恢复,从图 6(c)可以看出 LRMR 模型只有椒盐噪声效果明显信噪比达到了 37 dB,而部分划痕图像还有残留,LRMR 模型对高斯噪声基本没有去除,信噪比只达到 10 dB。图 6(d)改进模型对 3 种噪声都有一定的效果,特别是改进模型对去除高斯噪声就达到了一定的效果,其信噪比可以达到 20 dB 以上,这比 LRMR 模型高将近 10 dB,差错率也比 LRMR 模型小两个百分比,其可以达到 0.016 84。在修复时间上仅用 8.135 s,这就比 LRMR 模型的 9.945 s 快将近 2 s。

图 7 和图 8 是对 5 幅真实低秩图像进行测试分析,它们分别是 99×99 、秩为 61 的棋盘格, 150×200 、秩为 115 的壁纸, 323×323 、秩为 170 的窗口, 313×335 、秩为 241 的报表,最后是 774×1022 的满秩磁共振图像。

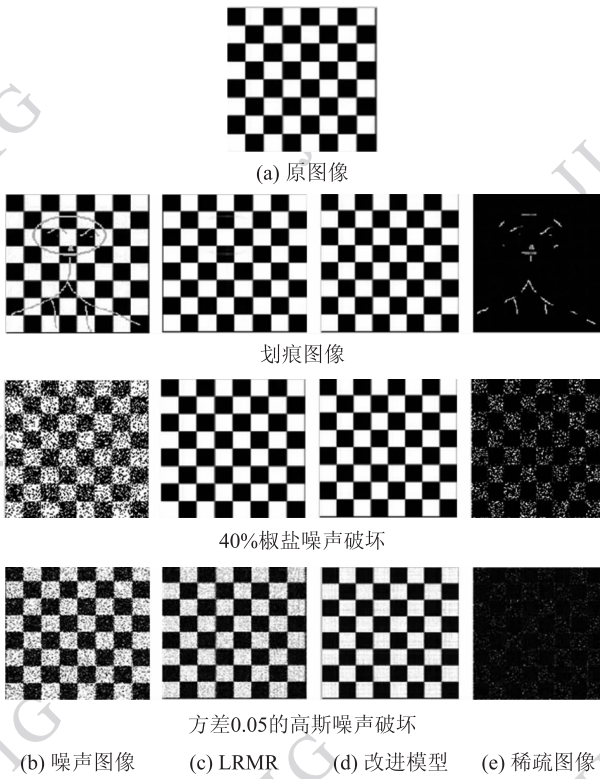


图 6 两种方法去噪效果图
Fig. 6 Two methods of image denoising

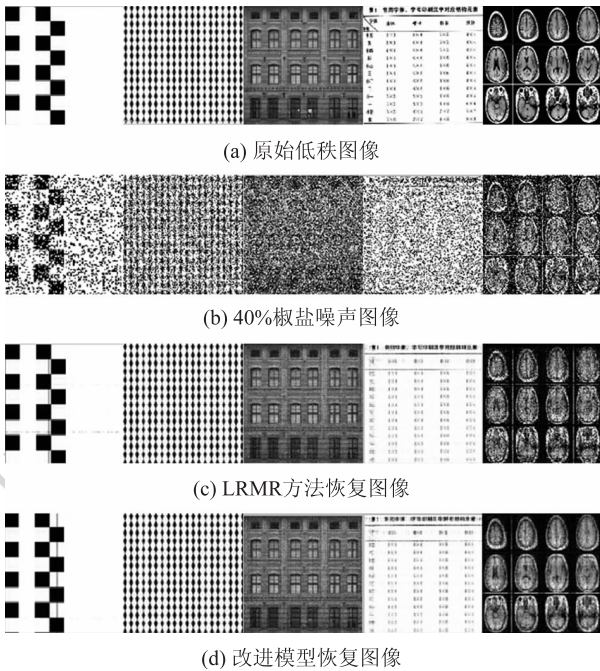


图 7 LRMR 与改进模型去除椒盐噪声对比图
Fig. 7 LRMR and the improve model of image recover from 40% salt and pepper noise

图 7 给出了含椒盐噪声的低秩图像恢复效果图,图 7(c)是 LRMR 恢复图像,从图 7(c)中看出相

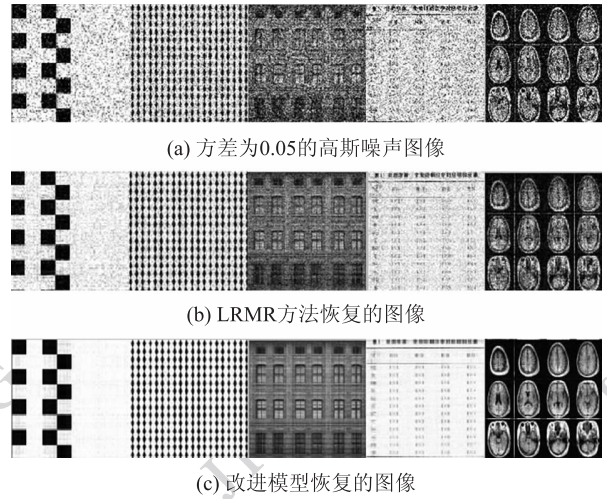


图 8 LRMR 与改进模型去除方差为 0.05 的高斯噪声对比图
Fig. 8 LRMR and the improve model of image recover from the variance 0.05 Gaussian noise

关性强的窗户图像、磁共振图像恢复效果不好,特别是磁共振图像中一部分椒盐噪声没有去除干净;而图 7(d)中采用改进模型利用增加的 F 范数及核范数惩罚函数,通过去相关性来实现相关性强的图像去噪目的,从恢复的图像效果看,图 7(d)比图 7(c)恢复效果理想,实验中的参数设定为 $\mu_2 = \mu_1/10$, $\gamma = 1E - 6$,保证解的稳定性。表 3 描述出改进模型对椒盐噪声去除的有效性。

表 3 含 40% 椒盐噪声的低秩图像去噪情况
Table 3 Denoising of the low rank image with salt and pepper noise

图片	算法	时间/s	SNR /dB	PSNR /dB	err
棋盘格	LRMR	5.287	20	37	4.195 467E-002
	本文	15.364	22	39	3.276 069E-003
壁纸	LRMR	10.668	20	30	6.119 786E-002
	本文	19.163	22	33	4.214 750E-002
报表	LRMR	28.819	6	18	1.022 398E-001
	本文	26.332	8	21	1.000 142E-001
窗户	LRMR	29.497	13	24	1.256 622E-001
	本文	27.062	15	25	1.250 975E-001
磁共振	LRMR	43.667	5	12	4.324 567E-001
	本文	39.295	6	14	3.229 185E-001

表 3 给出图 7 中的所列图像的恢复时间、差错率和信噪比等信息,其中棋盘格、壁纸图像改进模型

所用的时间虽然比 LRMR 方法慢但是恢复的效果通过 SNR、PSNR、以及差错率可以看出改进模型更稳定、效果更好,比 LRMR 模型差错率降低一个百分比,信噪比提高 3 dB。窗户、报表、磁共振图像恢复时间比 LRMR 快 2 s 以上,主要是这几幅图像相关性更强,待恢复矩阵维数大,而其秩相对比较大等原因。以上数据说明了改进模型的实际意义,相关性强的图像去噪恢复效果更理想。

图 8 是方差为 0.05 的高斯噪声图像去噪结果,图 8(b)是 LRMR 方法恢复的图像,从图 8(b)中看出效果不理想,部分高斯噪声仍然存在,这是因为 LRMR 模型对矩阵分解的稀疏部分有明确的要求,是随机幅值任意大但是分布稀疏的误差,而高斯噪声呈高斯分布的不符合这个要求,所以 LRMR 模型失效;而图 8(c)是改进模型恢复的图像,其中增加 F 范数并且设定参数 $\mu_2 = 5 \times \mu_1, \gamma = 1E - 6$,这样做稳定性好能够加强抑制高斯噪声的能力。从图 8 图像看出效果比较理想,且矩阵维数大,秩相对比较大,相关性越强的图像去除高斯噪声的能力越强。表 4 显示出改进模型去除高斯噪声效果理想,差错率可以达到 10^{-3} ,恢复时间比 LRMR 普遍快 3 ~ 4 s,信噪比提高 5 dB 以上。

表 4 含高斯噪声的低秩图像去噪情况
Table 4 Denoising of the low rank image
with salt and pepper noise

图片	算法	时间/s	SNR /dB	PSNR /dB	err
棋盘格	LRMR	5.633	12	30	9.425 128E-002
	本文	4.694	19	37	4.228 030E-003
壁纸	LRMR	7.868	9	23	1.324 374E-001
	本文	6.991	17	30	6.729 380E-002
窗户	LRMR	25.437	3	17	2.345 750E-001
	本文	23.471	6	21	1.305 302E-002
报表	LRMR	25.615	1	16	1.329 265E-001
	本文	23.930	3	18	1.026 698E-002
磁共振	LRMR	28.764	2	5	4.327 640E-001
	本文	25.563	6	18	1.004 312E-002

另外,选取一些实际生活中常见的局部含有低秩图像的图像利用提出的改进模型进行实验,结果如图 9,从测试结果可以看出椒盐噪声达到 40% 以上仍然可以迅速地恢复出清晰的图像,对高斯噪声

的恢复也达到了理想的程度。这样就验证了改进模型的有效性,目标函数中增加的 F 范数与核范数通过参数的选择可以达到去除不同噪声的目的并且效果比较理想。

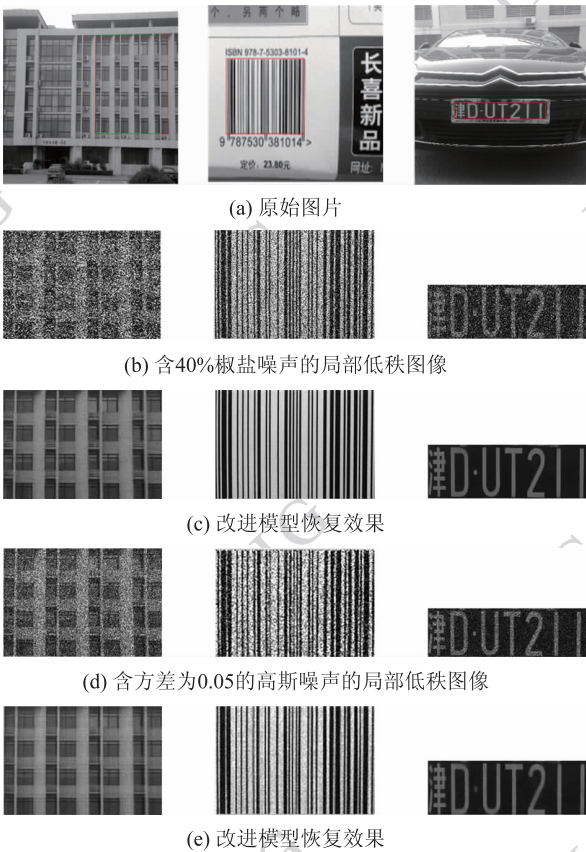


图 9 改进模型对局部低秩图像去噪结果
Fig. 9 The new model for the local of low rank image denoising

4 结 论

研究了一种改进的低秩图像恢复去噪方法,可稳定有效地从被噪声污染的稀疏差错退化图像中恢复原图像,该模型在 LRMR 模型的基础上加上 $\|A\|_F^2$ 部分,使相关性强的图像恢复结果更加稳定,对高斯噪声有较强的抑制作用,并且通过参数的选择最终达到去除稀疏误差、椒盐噪声、高斯噪声的目的,恢复效果比 LRMR 模型理想,特别是对矩阵维数大,秩相对大的相关性强的图像,恢复时间以及信噪比都有很大的提升,而差错率又明显下降。数值实验表明本文方法增强了恢复低秩图像解的稳定性,提高了恢复图像的信噪比以及具有很低的差错率。和 LRMR 方法相比,本文改进模型去噪充分,

在相关性强的低秩图像恢复上能够提升恢复速度, 改变参数值能够去除掉噪声, 并且达到高信噪比低差错率的理想效果。

参考文献 (References)

- [1] Dai Q H, Fu C J, Ji X Y. Research on compressed sensing[J]. Chinese Journal of Computers, 2011, 34(3): 425-434. [戴琼海, 付长军, 季向阳. 压缩感知研究[J]. 计算机学报, 2011, 34(3): 425-434.] [DOI:10.3724/SP.J.1016.2011.00425]
- [2] Zhou Z H, Li X D, Wright J, et al. Stable principal component pursuit[C]//IEEE International Symposium on Information Theory. Austin, TX: IEEE, 2010: 1518-1522. [DOI: 10.05109/ISIT.2010.5513535]
- [3] Wright J, Yang A Y, Ganesh A, et al. Robust face recognition via sparse representation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine intelligence, 2009, 31(2): 210-227. [DOI: 10.05109/TPAMI.2008.79]
- [4] Peng Y, Ganesh A, Wright J, et al. Rasl: robust alignment by sparse and low-rank decomposition for linearly correlated images [C]//IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. San Francisco, CA: IEEE, 2010: 763-770. [DOI: 10.05109/CVPR.2010.5540138]
- [5] Wagner A, Wright J, Ganesh A, et al. Toward a practical face recognition system: robust alignment and illumination by sparse representation [J]. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2012, 34(2): 372-386. [DOI: 10.05109/TPAMI.2011.112]
- [6] Zhang Z G, Ganesh A, Liang X, et al. TILT: transform-invariant low-rank textures[J]. The International Journal of Computer Vision, 2012, 99(1): 1-24. [DOI: 10.05007/s11263-012-0515-x]
- [7] Candes E J, Li X D, Ma Y, et al. Robust principal component analysis? [J]. Journal of the ACM, 2011, 58(3): 11.
- [8] Peng Y G, Suo J L, Dai Q H, et al. From compressed sensing to low-rank matrix recovery: theory and applications[J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(12): 1-14. [彭义刚, 索津莉, 戴琼海, 等. 从压缩传感到低秩矩阵恢复: 理论与应用[J]. 自动化学报, 2012, 38(12): 1-14.] [DOI: 10.3724/SP.J.1004.2013.01353]
- [9] Wright J, Ganesh A, Rao S, et al. Robust principal component analysis: exact recovery of corrupted low-rank matrices via convex optimization [C]//Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems. Vancouver, Canada: NIPS, 2009: 2080-2088.
- [10] Ganesh A, Wright J, Li X D, et al. Dense error correction for low-rank matrices via principal component pursuit [C]//IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings. Austin, TX: IEEE, 2010: 1513-1517. [DOI: 10.05109/ISIT.2010.5513538]
- [11] Candes E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing [J]. Comptes Rendus Mathematique, 2008, 346(9): 589-592. [DOI: 10.05016/j.crma.2008.03.014]
- [12] Candes E J, Recht B. Exact matrix completion via convex optimization [J]. Foundations of Computational Mathematics, 2009, 9(6): 717-772. [DOI: 10.05007/s10208-009-9045-5]
- [13] Liu G C, Lin Z C, Ma Y, et al. Robust recovery of subspace structures by Low-Rank representation [J]. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(1): 171-184. [DOI: 10.05109/TPAMI.2012.88]
- [14] Beck A, Teboulle M. A fast iterative shrinkage thresholding algorithm for linear inverse problems [J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2009, 2(1): 183-202. [DOI: 10.05137/080716542]
- [15] Ganesh A, Wright J, Ma Y. Fast algorithms for recovering a corrupted low-rank matrix [C]//Proceedings of the 3rd IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing. Aruba, Dutch Antilles: IEEE, 2009: 213-216. [DOI: 10.05109/CAMSAP.2009.5413299]
- [16] Boyd S, Parikh N, Chu E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers [J]. Foundations and Trends in Machine Learning, 2011, 3(1): 1-122. [DOI: 10.05561/2200000016]
- [17] Ren X, Lin Z C. Linearized alternating direction method with adaptive penalty and warm starts for fast solving transform invariant low-rank textures [J]. International Journal of Computer Vision, 2013, 104(1): 1-14. [DOI: 10.05007/s11263-013-0611-6]
- [18] Lin Z C, Chen M M, Ma Y. The augmented Lagrange multiplier method for exact recovery of a corrupted low-rank matrix [EB/OL] [2013-07-15] <http://arxiv.org/abs/1009.5055> [DOI: 10.1016/j.jsb.2012.10.010]
- [19] Cai J F, Candes E J, Shen Z W. A singular value thresholding algorithm for matrix completion [J]. SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(4): 1956-1982. [DOI: 10.05137/080738970]
- [20] Zou H, Zhang H H. On the adaptive elastic-net with a diverging number of parameters [J]. Annals of Statistics, 2009, 37(4): 1733-1751. [DOI: 10.05214/08-AOS625]
- [21] Zou H, Hastie T. Regularization and variable selection via the elastic net [J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 2005, 67(2): 301-320. [DOI: 10.05111/j.1467-9868.2005.00503.x]
- [22] Mol C D, Vito E D, Rosasco L. Elastic-net regularization in learning theory [J]. Journal of Complexity, 2009, 25(2): 201-230.
- [23] Li H, Chen N, Li L Q. Error analysis for matrix elastic-net regularization algorithms [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(5): 737-748. [DOI: 10.1109/TNNLS.2012.2188906]
- [24] Afonso M V, Bioucas-Dias J M, Figueiredo M A T. Fast image recovery using variable splitting and constrained optimization [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(9): 2345-2356. [DOI: 10.1109/TIP.2010.2047910]