



JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS

主办: 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象学报

2014

09

VOL.19

ISSN1006-8961
CN11-3758/TB





第19卷第9期（总第221期）

2014年9月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院

主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

主 编 李小文

编辑出版《中国图象图形学报》编辑出版委员会

邮政信箱 北京9718信箱

邮 编 100101

电子信箱 jig@irsa.ac.cn

电 话 010-64807995

网 址 www.cjig.cn

广告经营许可证 京朝工商广字第0361号

总 发 行 北京报刊发行局

订 购 全国各地邮局

海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司
(邮政信箱：北京399信箱 邮编：100048)

印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian

Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences

Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS
China Society of Image and Graphics

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

Editor-in-Chief LI Xiaowen

Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of
Image and Graphics

P.O.Box 9718, Beijing, P.R.China

Zip code 100101

E-mail jig@irsa.ac.cn

Telephone 010-64807995

Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals

Domestic All Local Post Offices in China

Overseas China International Book Trading Corporation
(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China)

Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

CN 11-3758/TB

ISSN 1006-8961

CODEN ZTTXFZ

国外发行代号 M1406

国内邮发代号 82-831

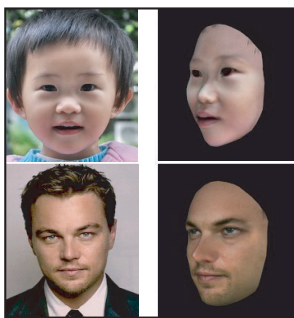
国内定价 50.00元



自适应对称自回归模型的压缩图像内插方法(第1268页)



加权局部特征结合判别式字典的目标跟踪算法(第1316页)



结合特征适配与拉普拉斯形变的3维人脸重建(第1349页)

综述

能量泛函正则化模型在图像恢复中的应用分析

李旭超, 刘海宽, 宋博 1247

图像处理和编码

融合最小化失真与模型保持的隐写算法

高瞻瞻, 汤光明, 张伟伟 1260

自适应对称自回归模型的压缩图像内插方法

刘婧, 干宗良, 崔子冠, 陈昌红, 朱秀昌 1268

基于能量泛函和视觉特性的全变分图像降噪模型

郭从洲, 秦志远, 时文俊 1282

分块策略实现图像椒盐噪声密度估计

林亚明, 李佐勇, 林叶郁 1288

图像分析和识别

Dempster-Shafer证据融合金字塔韦伯局部特征的表情识别

王晓华, 金超, 任福继, 胡敏 1297

运动捕捉数据中足迹的谱聚类检测方法

刘晓平, 陆劲挺, 谢文军 1306

加权局部特征结合判别式字典的目标跟踪

王飞, 房胜 1316

面向瓦当文字识别的改进水平集骨架提取

邓茜芸, 周明全, 武仲科, 王醒策 1324

改进复杂网络模型的形状特征提取

阮瑞, 江波, 汤进, 罗斌 1332

几何特性二元关系的直线匹配

胡海霞, 李钢 1338

图像理解和计算机视觉

结合特征适配与拉普拉斯形变的3维人脸重建

张剑, 何骅, 詹小四, 肖俊 1349

利用背景加权和选择性子模型更新的视觉跟踪算法

黄安奇, 侯志强, 余旺盛, 刘翔 1360

计算机图形学

对可控Bézier曲线的改进

严兰兰, 韩旭里 1368

医学图像处理

结合区域生长与灰度重建的CT图像肺气管树分割

彭双, 肖昌炎 1377

检测肺结节的3维自适应模板匹配

高婷, 龚敬, 王远军, 聂生东, 孙希文 1384

CONTENTS

JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Novel compression image interpolation method using adaptive symmetrical autoregressive models(P1268)



Visual tracking based on discriminative dictionary and weighted local features (P1316)



Three dimensional face reconstruction via feature adaptation and Laplace deformation (P1349)

Review

- Application analysis of regularization model of energy functional to image restoration
Li Xuchao, Liu Haikuan, Song Bo 1247

Image Processing and Coding

- Steganographic method combining minimum embedding distortion and model preservation
Gao Zhanzhan, Tang Guangming, Zhang Weiwei 1260
- Novel compression image interpolation method using adaptive symmetrical autoregressive models
Liu Jing, Gan Zongliang, Cui Ziguan, Chen Changhong, Zhu Xiuchang 1268
- TV image denoising model based on energy functionals and HVS
Guo Congzhou, Qin Zhiyuan, Shi Wenjun 1282
- Image salt-and-pepper noise estimation based on partitioning strategy
Lin Yaming, Li Zuoyong, Lin Yeyu 1288

Image Analysis and Recognition

- Research on facial expression recognition based on pyramid Weber local descriptor and the Dempster-Shafer theory of evidence
Wang Xiaohua, Jin Chao, Ren Fuji, Hu Min 1297
- Foot plant detection based on spectral clustering algorithm for motion capture data
Liu Xiaoping, Lu Jintong, Xie Wenjun 1306
- Visual tracking based on the discriminative dictionary and weighted local features
Wang Fei, Fang Sheng 1316
- Skeleton extraction using improved level set methods in eaves' text recognition
Deng Qianyun, Zhou Mingquan, Wu Zhongke, Wang Xingce 1324
- Improved shape feature extraction using complex network model
Ruan Rui, Jiang Bo, Tang Jin, Luo Bin 1332
- Line matching based on binary relations of geometric attributes
Hu Haixia, Li Gang 1338

Image Understanding and Computer Vision

- Three dimensional face reconstruction via feature adaptation and Laplace deformation
Zhang Jian, He Hua, Zhan Xiaosi, Xiao Jun 1349
- Visual object tracking method based on weighted background and selective sub-model update strategy
Huang Anqi, Hou Zhiqiang, Yu Wangsheng, Liu Xiang 1360

Computer Graphics

- Improvement of the modifiable Bézier curves
Yan Lanlan, Han Xuli 1368

Medical Image Processing

- Segmentation of pulmonary airway tree in CT images by combining region growing and grayscale reconstruction algorithms
Peng Shuang, Xiao Changyan 1377
- Three dimensional adaptive template matching algorithm for lung nodule detection
Gao Ting, Gong Jing, Wang Yuanjun, Nie Shengdong, Sun Xiwen 1384

中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2014)09-1247-13

论文引用格式: Li X C, Liu H K, Song B. Application analysis of regularization model of energy functional to image restoration[J]. Journal of Image and Graphics, 2014, 19(9): 1247-1259. [李旭超, 刘海宽, 宋博. 能量泛函正则化模型在图像恢复中的应用分析[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(9): 1247-1259.] [DOI:10. 11834/jig. 20140901]

能量泛函正则化模型在图像恢复中的应用分析

李旭超, 刘海宽, 宋博

江苏师范大学电气工程及自动化学院, 徐州 221116

摘要: 目的 能量泛函正则化模型是图像恢复研究的热点。为使更多工程领域的研究者对正则化技术进行探索和应用, 推动不适定问题的研究, 对能量泛函正则化模型的进展进行了分析。方法 首先建立图像整体坐标与局部坐标的关系, 分析图像恢复正则化模型的基本原理, 给出并证明正则化模型各向同性与各向异性扩散定理。然后结合函数空间、图像分解和紧框架, 评述能量泛函正则化模型国内外发展现状, 并对正则化模型解的适定性进行分析。结果 推导出图像恢复正则化模型扩散基本原理, 给出正则化模型通用表达式, 讨论正则化模型存在的问题及未来的发展方向。结论 正则化技术在解决图像恢复、修复等反问题起着重要作用。目前, 国内外学者对该问题的研究取得了一些成果, 但许多理论问题有待进一步研究。

关键词: 图像恢复; 正则化模型; 偏微分方程; 能量泛函

Application analysis of regularization model of energy functional to image restoration

Li Xuchao, Liu Haikuan, Song Bo

School of Electrical Engineering and Automation, Jiangsu Normal University, Xuzhou 221116, China

Abstract: **Objective** Energy functional regularization model is an active research field in image restoration. To draw more attention from researchers of engineering community, and to push forward the research of the ill-posed problem, the paper provides a comprehensive analysis of recent development on regularization model of image restoration. **Method** Firstly, the relationship between total coordinate and local coordinate of image is established, and the principle of regularization term of image restoration is analyzed, and the isotropic and anisotropic diffusion theorems of regularization model are given. Secondly, based on functional space, image decomposition and tight frame, the disadvantages and advantages of the regularization models are analyzed, and the state of the art methods are reviewed. Furthermore, the well-posed properties of solution of regularization model are analyzed. **Result** The basic diffusion principles of image restoration regularization model are deduced, the general formulas of regularization model are given, the potential problems and future development trends are discussed. **Conclusion** Regularization technology plays a key role in opposite problem research, such as image restoration and inpainting, currently, though some excellent results have been reported, many theory challenges still need to be investigated.

Key words: image restoration; regularization model; partial differential equation (PDE); energy functional

收稿日期: 2014-03-19; 修回日期: 2014-05-07

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61104221); 江苏师范大学博士人才基金项目 (10XLR27); 江苏省高校自然科学基金项目 (10KJB120004)

第一作者简介: 李旭超 (1974—), 男, 副教授, 2006 年于浙江大学电气工程学院获控制理论与控制工程专业博士学位, 主要研究方向为图像处理与调和分析。E-mail: bsx7096@sohu.com

0 引言

近十年来,能量泛函正则化模型在反问题处理中获得了较大的发展^[1],逐渐成为一门十分具有吸引力的研究课题^[2]。能量泛函正则化模型处理技术经历了线性到非线性^[3]、各向同性到各向异性^[4]、常指数函数空间到变指数函数空间的发展^[5],在图像处理^[6]、最小秩矩阵恢复^[7]、宇宙资源探测和计算机视觉领域得到广泛应用^[8]。一方面,得益于能量泛函变分获得的偏微分方程(PDE)已成为数学分析的重要分支^[9],理论体系和数值计算方法已经初步形成;另一方面,图像恢复正则化模型的建立得益于传统图像处理所积累的经验。

能量泛函正则化模型常用的建模方法有:1) 选择合理的函数空间、图像特征和势函数建立图像恢复正则化模型,变分能量泛函获得 PDE 方程,利用数值代数算法计算 PDE 的解^[10]。此类方法比较灵活,难点是建立的能量泛函正则化模型,要保证解的唯一性和数值解演化的稳定性。2) 借鉴已有的数学物理方程建立图像恢复正则化模型,如椭圆型 PDE^[11]、抛物型 PDE^[12] 和 Navier-Stokes 方程等^[13],这些都在图像处理中得到了成功应用。但此种方法受制于方程形式,难点是方程的物理含义与图像特征有机地结合。

能量泛函正则化模型的主要优点:1) 具有较强的局部自适应性。能量泛函模型是在连续函数空间上建立的,图像的离散变换被视为连续的微分算子,像素的值依赖于时间的一个无穷小邻域,具有“无穷”的局部自适应能力,使得非线性分析易于实现^[14]。2) 利用连续函数逼近数字图像,其处理精度远超过图像的分辨率,而小波变换的分辨率受尺度的制约^[15]。3) 函数空间选择的多样性,使得扩散函数具有多样性^[16],能有效地保护图像的边缘、纹理等特征。4) 建立的能量泛函具有明确的物理意义。根据所研究的问题,恰当地选择势函数,将图像的梯度、曲率和统计分布特性等^[17]与能量泛函正则化模型有机地结合在一起。5) 离散化 PDE 得到几个线性或非线性方程组,方程的求解易于用数值代数算法实现。

本文对能量泛函正则化模型在图像恢复中的应用进行分析。首先建立图像的整体坐标系与局部坐标系的关系,给出并证明正则项的各向同性和各向

异性扩散判定定理;结合函数空间、图像分解和紧框架,给出 3 种通用正则化模型表达式,以函数空间正则化模型为例分析正则化模型扩散原理;然后结合 3 种通用正则化模型表达式,评述国内外发展现状,并对能量泛函正则化模型解的适定性进行分析。在评述能量泛函正则化模型现有成果的同时,报告一些新的研究成果。最后,对能量泛函正则化模型存在的问题及未来发展趋势进行展望,以期起到抛砖引玉的作用。

1 正则项扩散原理分析

1.1 能量泛函模型整体坐标与局部坐标的关系

图像处理中,在整体坐标系下,即 x, y 坐标系,一幅图像用函数表示为 $u(x, y): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $u(x, y)$ 表示图像的灰度值。由于图像恢复是对局部像素进行处理,在恢复过程中沿边缘的切线与法线方向进行扩散,为表征图像的局部特性,必须利用任意点的切线方向与法线方向建立局部坐标系,即 τ, n 坐标系,其中 n 轴与该像素点的梯度方向平行, τ 轴与该像素点的切线方向平行。整体坐标与局部坐标的关系如图 1 所示。

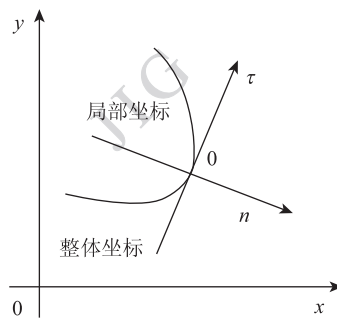


图 1 整体坐标系与局部坐标系

Fig. 1 Total coordinate and local coordinate

根据上述建立过程,选取局部坐标系为

$$\begin{bmatrix} \tau \\ n \end{bmatrix} = \frac{1}{|\nabla u|} \begin{bmatrix} -u_y & u_x \\ u_x & u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\nabla^\perp u}{|\nabla u|} & \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中, $\nabla u = [u_x, u_y]^T$ 表示 $u(x, y)$ 的梯度,幅值为 $|\nabla u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$, $\nabla^\perp u = [-u_y, u_x]^T$, $\nabla^\perp u \cdot \nabla u = 0$ 。

图像是在整体坐标系 (x, y) 下给定的,像素恢复是在局部坐标系 (τ, n) 下进行的,像素在两种坐标系之间的转化关系表示为

$$\begin{bmatrix} \tau \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\nabla^\perp u}{|\nabla u|}, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2)$$

令 $\cos(\beta) = -u_y/|\nabla u|$, $\sin(\beta) = u_x/|\nabla u|$, β 表示边缘的切线 τ 与 x 轴的夹角, 则整体坐标系与局部坐标系之间的转换关系表示为

$$\begin{bmatrix} \tau \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & -\cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3)$$

能量泛函变分是在整体坐标系上进行的, 图像恢复是在局部坐标系中有选择地对图像进行扩散, 具有方向性。像素在局部坐标中沿某一方向的变化率与在整体坐标系中沿梯度方向的变化率之间关系可归结为如下定理。

定理1 函数 $u(\tau, n)$ 在点 (τ, n) 处沿 h 方向 (β 方向) $\beta = (\cos(\beta), \sin(\beta))$, 表示为整体坐标系下的梯度 ∇u 在 h 方向的投影, 即函数的局部坐标与整体坐标方向导数之间的关系, 梯度 ∇u 与方向 β 的内积, 表达式为

$$\frac{\partial u(\tau, n)}{\partial h} = \nabla u \cdot \beta \quad (4)$$

1.2 正则项各向同性与各向异性扩散原理分析

图像恢复是在局部坐标系沿切线与法线方向进行扩散, 通过调节正则项的扩散系数来控制图像在局部坐标系上某一方向的平滑程度。假定正则项用整体坐标系与局部坐标系来描述, 表达式为

$$\text{div}[\phi(s) \nabla u] = \phi(s) u_{\tau\tau} + \varphi(s) u_{nn} \quad (5)$$

式中, s 表示图像的特征, $\phi(s)$ 和 $\varphi(s)$ 分别表示沿切线与法线方向的扩散函数, $\phi(s)$ 具有连续的二阶偏导数。

在式(5)中, 若 $\phi(s) = \varphi(s)$, 则有

$$\text{div}[\phi(s) \nabla u] = \phi(s) \Delta_{(\tau, n)} u \quad (6)$$

式中, $\Delta_{(\tau, n)} u = \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial n^2} \right) u = u_{\tau\tau} + u_{nn}$ 。

从式(6)推断 $\phi(s)$ 为常数, 从而有

$$\text{div}[\nabla u] = \Delta_{(\tau, n)} u \quad (7)$$

即 $\Delta_{(x, y)} u(x, y) = \Delta_{(\tau, n)} u(\tau, n)$ 。

定理2 在整体坐标系 (x, y) 下的拉普拉斯算子记为 $\Delta_{(x, y)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, 在局部坐标系 (τ, n) 下的拉普拉斯算子记为 $\Delta_{(\tau, n)} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial n^2}$, 则像素在整体坐标系下的拉普拉斯变换与局部坐标系下的拉普拉斯变换相等, 即

$$\Delta_{(x, y)} u(x, y) = \Delta_{(\tau, n)} u(\tau, n)$$

证明 由定理1可知, 函数 $u(x, y)$ 沿切向 τ 与法向 n 的一阶方向导数分别为

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \tau} = \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} \sin(\beta) \\ -\cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (9)$$

对式(8)(9)分别再次应用定理1, 则

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial \tau^2} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] \left(\left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{bmatrix}$$

整理有

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial \tau^2} = u_{xx} \cos^2(\beta) + 2u_{xy} \cos(\beta) \sin(\beta) + u_{yy} \sin^2(\beta) \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial n^2} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] \left(\left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} \sin(\beta) \\ -\cos(\beta) \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} \sin(\beta) \\ -\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

整理有

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial n^2} = u_{xx} \sin^2(\beta) - 2u_{xy} \cos(\beta) \sin(\beta) + u_{yy} \cos^2(\beta) \quad (11)$$

将式(10)(11)相加, 则有

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \quad (12)$$

即 $\Delta_{(x, y)} u(x, y) = \Delta_{(\tau, n)} u(\tau, n)$, 证毕。

从定理2可知, 各向同性算子沿切线与法线方向同幅度扩散, 具有旋转不变的特性。但由于各向同性扩散不区分图像的边缘与平稳区域, 容易造成边缘模糊。为了有利于保护图像的边缘, 必须有选择地沿边缘的切线与法线方向进行扩散。

定理3 在式(5)中, 若 $s\phi'(s) \neq 0$ 成立, 则

$$\phi(s) \neq \varphi(s) \quad (13)$$

那么正则项式(5)具有各向异性扩散特性。

证明 令图像的特征 $s = |\nabla u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$, 对其求偏导数有

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{u_{xx}u_x + u_{xy}u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}, \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{u_{xy}u_x + u_{yy}u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}$$

式(5)左边表达式为

$$\operatorname{div}[\phi(s) \nabla \mathbf{u}] = \phi'(s) \frac{u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_y^2}{s} + \phi(s) \Delta \mathbf{u} \quad (14)$$

由式(11)可知

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial n^2} = u_{xx} \left[\frac{u_x}{|\nabla \mathbf{u}|} \right]^2 + 2u_{xy} \frac{u_x}{|\nabla \mathbf{u}|} \frac{u_y}{|\nabla \mathbf{u}|} + u_{yy} \left[\frac{u_y}{|\nabla \mathbf{u}|} \right]^2 \quad (15)$$

将式(15)和式(12)分别代入式(14),则有

$$\operatorname{div}[\phi(s) \nabla \mathbf{u}] = s\phi'(s)u_{nn} + \phi(s)(u_{\tau\tau} + u_{nn}) = \phi(s)u_{\tau\tau} + [s\phi'(s) + \phi(s)]u_{nn} \quad (16)$$

由式(5)可知, $\varphi(s) = s\phi'(s) + \phi(s)$ 。因为 $s\phi'(s) \neq 0$, 所以 $\phi(s) \neq \varphi(s)$, 命题成立, 证毕。

当 $\phi(s) = \varphi(s)$ 时, 由式(16)可知 $s\phi'(s) = 0$, 由于 s 是图像的特征, 所以 s 不恒为零, 因此可知 $\phi'(s) = 0$, 所以 $\phi(s)$ 为常数, 式(5)变为式(12)。

2 图像恢复能量泛函正则化模型的类型

2.1 图像恢复能量泛函正则化模型的起源

在自然科学与工程技术领域, 如宇航成像、放射显微镜成像、原子放射成像(PET)、压缩感知^[18]、生物器官分析、资源勘探等, 许多问题可以表述为第1种类的 Fredholm 积分方程^[19], 表达式为

$$f(x, y) = \int_{\Omega} k(x, y, x', y') u(x', y') dx' dy' \quad (17)$$

式中, Ω 是实平面的一个有界开子集, $f(x, y)$ 表示获得的采样数据, 即降质的图像, $u(x', y')$ 表示原始图像, $k(x, y, x', y')$ 表示成像过程中的核函数, 也称为点扩散函数, 对式(17)进行离散化, 获得的图像退化模型表达式为

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta} \quad (18)$$

式中, $\boldsymbol{\delta}$ 表示噪声, $\mathbf{K}$ 表示线性紧算子, 该算子的条件数较大, 造成无法获得式(18)的准确解。此外, 成像设备的电路转化误差、大气扰动以及测量的随机性都对式(18)的理想图像产生不利影响, 很难获得精确图像, 这就促使人们对不适定问题进行研究。图像恢复就是要尽可能地降低或消除观察图像的失真, 得到理想的图像 $u(x', y')$ 。为获得理想图像, 用

能量泛函表示式(18), 表达式为

$$\inf_{\mathbf{u}} \left\{ E_0(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u}|^2 d\boldsymbol{\mu} \right\} \quad (19)$$

式中, $d\boldsymbol{\mu}$ 为 Lebesgue 测度。若式(19)最小值存在, 通过变分获得 PDE 表达式

$$\mathbf{K}^* \mathbf{f} - \mathbf{K}^* \mathbf{K} \mathbf{u} = 0 \quad (20)$$

式中, $\mathbf{K}^*$ 表示 $\mathbf{K}$ 的伴随矩阵。因为 $\mathbf{K}$ 是紧算子, 所以 $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$ 不可能总是满秩矩阵, 造成式(20)的解不唯一; 即使 $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$ 是满秩矩阵, 若矩阵的条件数较大, 造成数值解 $\mathbf{u}$ 不稳定, 此问题在 Hadamard 意义下是典型的不适定问题。目前解决式(19)不适定问题的最好方法是 Tikhonov 正则化^[18], 利用图像的附加信息引入正则项, 使能量泛函具有唯一稳定解, 将图像处理的病态问题转化为适定性问题^[20], 表达式为

$$E(\mathbf{u}) = E_0(\mathbf{u}) + \lambda \Phi(\mathbf{D}\mathbf{u}) \quad (21)$$

式中, $E_0(\mathbf{u})$ 是逼近项, $\Phi(\mathbf{D}\mathbf{u})$ 是正则项, $\mathbf{D}$ 是线性微分算子, λ 是正则项参数。按正则化模型发展的先后顺序, 经历了3个阶段: 不同函数空间正则化模型阶段、图像分解正则化模型阶段和紧框架域正则化模型阶段。

2.2 不同函数空间建立的正则化模型

将式(18)转化为通用能量泛函正则化模型, 表达式为

$$\inf \left\{ E(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u}|^2 d\boldsymbol{\mu} + \lambda \int_{\Omega} \phi(|\nabla^m \mathbf{u}|^p) d\boldsymbol{\mu} \right\} \quad (22)$$

式中, $\mathbf{u}(x, y) \in \mathbf{W}^{m,p}$, $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega) = \{ \mathbf{u}(x, y) \mid \mathbf{u}(x, y) \in L^p(\Omega), \mathbf{D}^{\alpha} \mathbf{u}(x, y) \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m \}$, 第1项是逼近项, 拟合图像的统计分布; 第2项是正则项, 主要有两个作用: 一是保证图像恢复的光滑性, 消除噪声; 二是保证式(22)的解是适定的。 λ 调节正则项和逼近项的权重, ∇^m 为 m 阶弱导数 (weak derivative) 算子, 若经典意义下的导数存在, 则 ∇ 为梯度算子, $\phi(\cdot) \in C^{\infty}(\Omega)$ 为选取的势函数, $C^{\infty}(\Omega)$ 表示函数 $\phi(\cdot)$ 具有任意阶导数函数集合, $|\cdot|$ 表示范数。当式(22)中的 $m=1$ 时, ∇ 对应一阶弱导数, 变分式(22)获得二阶 PDE^[21]; $m=2$ 时, ∇^2 对应的是曲率, 变分获得4阶 PDE^[22]。 $m>2$ 时, 对应的是高阶椭圆型或抛物型 PDE^[23]。式(22)中的 m 与 p 取不同的数值, 获得不同函数空间能量泛函正则化模型^[24]。

下面结合具体参数阐述式(22)正则化模型的扩散原理。当 $m=1, p=1$ 时, 对应的 Sobolev 函数

空间为 $W^{1,1}(u(x,y))$, 对式(22)进行变分获得PDE, 表达式为

$$K^*Ku - \lambda \left(\frac{\phi(|\nabla u|)}{|\nabla u|} u_{\tau\tau} + \phi''(|\nabla u|) u_{nn} \right) = K^*f \quad (23)$$

式中, $u_{\tau\tau}$ 和 u_{nn} 如式(10)(11)所示。下面结合定理2与定理3, 对式(23)进行图像恢复原理分析:

1) 在平稳区域, $|\nabla u| \rightarrow 0$ 。根据定理2, 若式(23)具有各向同性扩散特性, 则需对式(23)施加条件

$$\phi'(0) = 0 \quad (24)$$

$$\lim_{|\nabla u| \rightarrow 0^+} \frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} = \lim_{|\nabla u| \rightarrow 0^+} \phi'(|\nabla u|) = \phi'(0) > 0 \quad (25)$$

利用条件式(24)(25), 则式(23)变为

$$K^*Ku - \lambda \phi'(0)(u_{\tau\tau} + u_{nn}) = K^*f \quad (26)$$

由式(6)可知, 式(26)具有各向同性扩散特性。

2) 在非平稳区域, $|\nabla u| \rightarrow \infty$ 。为保护图像边缘, 根据定理3, 为使式(23)具有各向异性扩散特性, 需施加条件

$$\lim_{|\nabla u| \rightarrow \infty} \phi'(|\nabla u|) = 0 \quad (27)$$

此式表示区域是非平稳的, 不沿法线方向进行扩散。

$$\lim_{|\nabla u| \rightarrow \infty} \phi''(|\nabla u|) / \frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} = 0 \quad (28)$$

此式表示沿法线方向的扩散速度比切线方向的扩散速度慢, 有利于保护图像的边缘。若同时满足条件式(27)(28), 则式(23)变为

$$K^*Ku - \lambda \frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} u_{\tau\tau} = K^*f \quad (29)$$

由式(13)可知, 式(29)具有各向异性扩散特性。

2.3 图像分解能量泛函正则化模型

针对上述模型对图像的纹理信息保持较差的缺点, Meyer等人^[25]提出图像分解的正则化模型, 把图像分解为卡通部分和振荡部分(纹理和噪声)^[26]。不同模型的主要区别是描述振荡部分采用的函数空间。

若 f 表示已知图像, u 表示图像的卡通部分, v 表示图像的振荡部分, 则图像分解表达式为

$$f = u + v \quad (30)$$

由式(18)可知, 若 K 为单位算子, 则式(18)与式(30)具有相同的表达形式。

基于图像分解的通用正则化数学模型为

$$\inf_{(u,v) \in BV(\Omega) \times \Theta(\Omega)} \{E(u) =$$

$$\lambda \|v\|_{\Theta(\Omega)} + \int_{\Omega} \phi(|Du|) d\mu \} \quad (31)$$

式中, 卡通部分用有界变差函数 $|Du|$ 表示, $\phi(\cdot)$ 为选取的势函数, $\|v\|_{\Theta(\Omega)} = \|f - u\|_{\Theta(\Omega)}$ 表示振荡部分在 $\Theta(\Omega)$ 函数空间的范数, 且 $L^2(\Omega) \subset \Theta(\Omega)$ 。

从式(22)与式(31)对比来看, 式(22)用 $L^2(\Omega)$ 空间范数描述图像的噪声, 而式(31)用比 $L^2(\Omega)$ 空间更弱的函数空间 $\Theta(\Omega)$ 来刻画振荡部分; 式(22)成功恢复图像的关键是设计正则项, 而式(31)成功恢复图像的关键是高频部分能否用容易计算的函数空间来精确描述; 式(31)的解是恢复的图像, 而式(31)的解是图像的卡通部分与振荡部分。

2.4 紧框架域图像分解能量泛函正则化模型

随着国内外对大数据处理的重视, 最近几年, 紧框架理论的发展引人注目。目前, 紧框架理论已在图像降噪、修复和恢复中得到广泛应用^[27], 一方面, 紧框架能准确地描述图像的特征^[28]; 另一方面, 紧框架能对图像进行稀疏表示^[29], 从而使得海量数据处理成为可能。在紧框架域下, 图像退化模型式(18)表示为

$$f = KV^Tz + \delta \quad (32)$$

式中, $z = Vu$, V 表示紧框架算子, 也称为分解算子, V^T 表示合成算子。若 $V^TV = I$, 则紧框架域中的图像分解与合成完全同构, I 表示单位矩阵。在紧框架域, 图像恢复通用能量泛函正则化模型表达式为

$$\inf_{z \in \mathbb{R}^n} \left\{ E(z) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f - TV^Tz|^2 d\mu + \lambda \int_{\Omega} \phi(Dz) d\mu \right\} \quad (33)$$

式中, 正则项符号的含义如式(31)所示。

3 图像恢复正则化模型发展现状

3.1 不同函数空间能量泛函正则化模型

3.1.1 经典 Sobolev 空间能量泛函正则化模型

文献[30]最早提出在 Sobolev 空间 $W^{1,2}(\Omega)$ 中引入正则项, 将正则项设置为 $\phi(|\nabla^m u|^p) = |\nabla u|^2$, 代入式(22), 对能量泛函变分, 获得著名的非线性反应-扩散方程^[14], 表达式为

$$K^*Ku - \lambda \Delta u = K^*f \quad (34)$$

由定理2中的式(12)可知, 该模型具有各向同性, 容易造成图像的边缘模糊。为有利于保护图像的边缘, 降低在边缘附近的扩散, 文献[31]提出一种 P-M 图像恢复模型, 将正则项设置为 $\phi(|\nabla^m u|^p) =$

$\phi(|\nabla \mathbf{u}|)$, 变分获得的 PDE 如式(23)所示。若选取的势函数表达式为 $\phi(|\nabla \mathbf{u}|) = \exp[-|\nabla \mathbf{u}|^2/C]$, 代入式(23)就有 P-M 模型的具体表达形式。在平稳区域, 若势函数同时满足式(24)(25), 由式(26)可知 P-M 模型对图像进行各向同性扩散; 在边缘附近, 若势函数同时满足式(27)、(28)的条件, 由式(29)可知, P-M 模型具有各向异性。综合这两种情况可知, P-M 模型在滤除噪声的同时在某种程度上保护图像的边缘。Catte 等人指出 P-M 模型是“病态的”^[32], 当 $|\nabla \mathbf{u}| \rightarrow 0$ 时, 输入的微小变化导致输出的完全改变, 使得扩散函数 $\frac{\phi'(|\nabla \mathbf{u}|)}{|\nabla \mathbf{u}|} \rightarrow \infty$, 实际应用不稳定。针对 P-M 模型对噪声敏感的特点, 文献[32]将正则项设置为 $\phi(|\nabla^m \mathbf{u}|^p) = \phi(|\nabla \mathbf{G}_\sigma * \mathbf{u}|)$, 变分能量泛函得到模型

$$K^* K \mathbf{u} - \operatorname{div}[\phi(|\nabla \mathbf{G}_\sigma * \mathbf{u}|) \nabla \mathbf{u}] = K^* f \quad (35)$$

式中, $\mathbf{G}_\sigma$ 是高斯核函数。调节核函数的尺度 σ , 使得模型对平稳区域与边缘具有自适应平滑能力。但该模型依赖图像的导数, 容易受到噪声的影响。文献[33]对此进行改进, 将图像恢复中的非线性项设置为 $|\nabla \mathbf{G}_\sigma * \mathbf{u}| \operatorname{div} \left[\frac{\nabla \mathbf{G}_\sigma * \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{G}_\sigma * \mathbf{u}|} \right]$, 但此模型对高斯核函数尺度 σ 的选取比较敏感。若尺度 σ 过大, 则导致图像过平滑。文献[34]提出一种自适应正则项模型, 将正则项设置为 $|\nabla \mathbf{u}|/C^{\alpha(x)}$, $\alpha(x)$ 是边缘检测函数, 随着图像区域的变化而变化, 将其应用于图像恢复, 获得较高的峰值信噪比, 图像边缘保持比较理想。

3.1.2 $BV(\Omega)$ 函数空间能量泛函正则化模型

针对 Sobolev 函数空间正则化模型容易导致图像过平滑, Rudin, Osher 和 Fatemi 首次将 $BV(\Omega)$ 函数空间的半范数引入图像恢复能量泛函正则化模型中^[35] (简称 ROF 模型)。ROF 模型将式(22)的正则项设置为 $\phi(|\nabla^m \mathbf{u}|^p) = |\mathbf{D} \mathbf{u}|$ 。对能量泛函变分得到一种各向异性非线性扩散方程, 用发展型 PDE 表示为

$$\frac{\partial \mathbf{u}(x, y)}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} \right) + \lambda (\mathbf{u}(x, y) - f(x, y)) \quad (36)$$

由式(5)左边可知, 式(36)中的切向扩散函数为 $\phi(|\nabla \mathbf{u}|) = \frac{1}{|\nabla \mathbf{u}|}$; 根据式(16)法向 u_{nn} 的扩散系数表达式, 有 $\varphi(|\nabla \mathbf{u}|) = 0$ 。由定理3可知, ROF 模型

仅沿图像边缘切线方向进行扩散, 具有各向异性, 能有效地保护图像的边缘, 但容易在平坦区域产生阶梯效应。针对此缺点, 文献[36]在 ROF 模型的基础上提出广义全变分正则化图像复原模型, 正则项设置为 $\phi(|\nabla^m \mathbf{u}|^p) = |\nabla \mathbf{u}|^p, 1 < p < 2$ 。该模型的正则项指数大于 ROF 模型但小于反应-扩散模型^[26]的正则项指数, 只要选取合适的 p , 该模型能有效地克服图像恢复产生的阶梯效应, 但 p 的选取比较困难。文献[37]根据图像平稳区域与非平稳区域弱导数的幅值 $|\nabla \mathbf{u}|$ 不同, 将正则项设置为分段函数, 使能量泛函在平稳区域表现为反应-扩散模型, 能有效地滤除噪声; 在非平稳区域表现为 ROF 模型, 能有效地保护图像的边缘。

总体来说, 上述模型都是利用二阶 PDE 有选择地对图像进行滤波。由于二阶 PDE 解空间的固有特性, 如 Sobolev 空间对图像的光滑性要求很高, 不允许图像中存在间断点, 很难保持图像的边缘; $BV(\Omega)$ 函数空间不利于图像的平稳区域, 很难在根本上消除图像的阶梯效应。

3.1.3 $BV^2(\Omega)$ 函数空间能量泛函正则化模型

为克服二阶 PDE 在 Sobolev 函数空间导致边缘过平滑和 $BV(\Omega)$ 函数空间产生的阶梯效应, 近几年, 通过提高正则项模型的阶次, 发展起来一种四阶 PDE 图像恢复模型^[38]。四阶 PDE 在阻止边缘扩散方面比二阶 PDE 的速度快, 而且四阶 PDE 用光滑图像逼近平稳区域, 这比二阶 PDE 用分段常函数逼近光滑区域更容易满足视觉效果。关于这一方面, 文献[39-40]已经给出了理论分析, 文献[41-42]用数字实验进行了验证。文献[43]将描述图像的函数空间拓展为 $BV^2(\Omega)$ 函数空间, 将式(22)的正则项设置为 $\phi(|\nabla^m \mathbf{u}|^p) = |\mathbf{D}^2 \mathbf{u}|$, 通过对能量泛函变分获得一种四阶 PDE 图像恢复模型。此模型在有效地去除噪声的同时, 在一定程度上克服了 ROF 模型产生的阶梯效应, 但容易导致边缘过平滑。针对此缺点, 文献[22]将文献[35]扩散系数选取的自适应性和文献[43]正则项的高阶性有效地结合在一起, 将式(22)的正则项设置为 $\alpha(x) |\mathbf{D}^2 \mathbf{u}|$, 通过变分获得一种具有自适应权系数的四阶 PDE 图像恢复模型^[44], 应用于图像滤波, 图像的阶梯效应明显消除, 边缘保持效果也比较理想。文献[45]通过权重把 $BV(\Omega)$ 函数空间有利于保护图像的边缘和 $BV^2(\Omega)$ 函数空间有利于克服图像恢复产生的阶梯

效应有机地结合在一起, 将式(22)的正则项设置为 $\int_{\Omega} [1 - \alpha(x)] |Du| dx + \int_{\Omega} \alpha(x) |D^2 u| dx$, 通过变分得到一种二阶 PDE 与四阶 PDE 加权组合的图像滤波模型, 将其应用于图像恢复, 消除二阶 PDE 在平稳区域产生的阶梯效应和四阶 PDE 导致边缘过平滑的缺点, 取得了比较理想的图像复原效果。当正则项的权系数 $\alpha(x) = 0$ 时, 文献[45]的模型变为 ROF 模型^[35]; 当正则项的权系数 $\alpha(x) = 1$ 时, 文献[45]的模型变为文献[43]提出的四阶 PDE 模型。

3.1.4 变指数函数空间能量泛函正则化模型

在 Sobolev $BV(\Omega)$ 和 $BV^2(\Omega)$ 函数空间中, 能量泛函正则项指数是固定的, 满足常指数非线性增长条件, 但图像是非平稳的, 为准确地体现图像的特征, 能量泛函应满足变指数非线性增长条件。近来, 发展起一种变指数 Sobolev 函数空间图像恢复模型值得关注^[46]。

变指数 Sobolev 空间是建立在变指数 Lebesgue 函数空间基础上发展起来的。德国数学家 Ruzicka 首先将变指数 Sobolev 空间应用于电流学^[47], 随后, 变指数函数空间的应用得到了国内外越来越多研究者的关注, 研究的广度与深度不断增加, 并且广泛应用于解决各种实际问题, 如最优控制、电流变学和图像处理等。

在变指数函数空间, 文献[7]将式(22)的正则项设置为 $|\nabla u|^{p(\nabla u)}$ 。在边缘附近, $\lim_{|\nabla u| \rightarrow \infty} p(|\nabla u|) = 1$, 模型退化为 $BV(\Omega)$ 函数空间中的 ROF 模型; 在平稳区域, $\lim_{|\nabla u| \rightarrow \infty} p(|\nabla u|) = 2$, 模型退化为 Sobolev 函数空间中的反应-扩散模型; 在其他区域, 扩散系数随着弱导数幅值变化而变化, 由于变指数 $(|\nabla u|)$ 依赖于图像的弱导数, 能量泛函呈现变指数非线性增长, 能准确地反映图像的结构特征, 取得了较好的图像恢复效果。但受变指数理论发展的制约, 很难证明此能量泛函是下半连续的, 导致能量泛函解的适定性问题悬而未决。文献[48]在 $BV(\Omega)$ 函数空间将式(22)的正则项设置为变指数分段函数, 即

$$\phi(|\nabla^m u|^p) = \begin{cases} \frac{1}{p(x)} |Du|^{p(x)} & |Du| \leq \gamma \\ |Dx| - \frac{\beta p(x) - \beta^{p(x)}}{p(x)} & |Du| > \gamma \end{cases} \quad (37)$$

式中, γ 为大于零的常数。对能量泛函变分, 得到了

适应平稳区域各向同性扩散函数 $|p(x) - 1| \Delta u(x, y)$ 、非平稳区域各向异性扩散函数 $2 - p(x) |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ 和介于二者之间的自适应扩散函数 $\nabla p \cdot \nabla u \ln |\nabla u|$ 。仿真表明该模型能有效地恢复图像, 但阈值 β 的选取比较困难, 不具有自适应性。此外, 尽管通过引入松弛函数, 使松弛函数的解逼近能量泛函的解, 间接地解决具有变指数线性增长特性能量泛函模型解的适定性问题, 但该变指数正则化模型是建立在函数空间 $BV(\Omega)$ 中而不是在 Sobolev 函数空间中, 能量泛函不是真正意义上的非线性变指数增长。文献[49]利用伪解对文献[48]模型解的适定性问题证明进行了改进, 但能量泛函仍然呈线性增长。文献[24]将式(22)的正则项设置为 $\frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)}$, 尽管正则项中的指数 $p(x)$ 与文献[48]相同, 但该模型不需要阈值常数 γ 。能量泛函是真正意义上的变指数非线性增长, 对图像特征的描述具有自适应性, 并且利用 Sobolev 空间变指数理论发展的成果, 论证了该能量泛函解的适定性。通过对能量泛函变分, 得到各向异性扩散函数 $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)$ 。但文献[24]论证变指数模型解的适定性仅适用 $1 < p(x) \leq 2$ 的情形, 对于临界指数 $p(x) = 1$ 是否成立无法给出理论证明。2013 年, 文献[50]从理论上论证文献[24]提出的变指数图像恢复正则化模型存在临界指数。经过众多研究者的努力, 目前, 基本解决了具有特殊形式的变指数正则项能量泛函理论与应用问题, 但对变指数正则项势函数的一般形式还不是很清楚。

3.2 图像分解能量泛函正则化模型

3.2.1 空域图像分解能量泛函正则化模型

在式(31)中, 若 $\|v\|_{\Theta(\Omega)} = \|f - u\|_{L^2(\Omega)}^2$, 正则项设置为 $|Du|$, 则图像分解正则化模型变为 ROF 模型^[35]。由图像分解式(30)可知, ROF 模型能提取图像的卡通部分。然而由于用 $L^2(\Omega)$ 范数描述图像振荡部分 $\|f - u\|_{L^2(\Omega)}^2$, 导致图像包含的纹理信息可能随着噪声的消除而消除^[25]。为解决这一问题, Meyer 提出如下图像恢复模型, 表达式为

$$\inf_{(u,v) \in BV(\Omega) \times \Theta(\Omega)} \left\{ E(u) = \int_{\Omega} |Du| dx + \lambda \|v\|_{\Theta(\Omega)} \right\} \quad (38)$$

$\Theta(\Omega)$ 表示用函数空间 $G(\Omega)$ 、 $F(\Omega)$ 、 $E(\Omega)$ 刻画图像的振荡部分^[25]。尽管这 3 个函数空间能准确地

描述图像的振荡部分,但是其范数计算比较困难,因此后来的学者主要是利用对偶空间的范数或具有共轭特性的函数来近似 Meyer 给出的 3 个函数空间范数,使得模型容易计算。

在函数空间 $G(\Omega)$ 的近似上, Vese 和 Osher 提出^[51]模型

$$\inf_{u \in BV(\Omega), g \in L^\infty(\Omega)} \{ \lambda_0 \|Du\| + \|u + \operatorname{div}(g) - f\|_{L^2}^2 + \lambda \|g\|_{L^p} \} \quad (39)$$

式中, $\lambda_0 > 0, \lambda > 0$ 是正则项的权系数, $v(x, y) = \operatorname{div}(g(x, y)) = \partial_x g_1 + \partial_y g_2$ 是图像的振荡部分, 迫使 $f \approx u + \operatorname{div}(g)$ 满足式(30)图像分解原理; 式(39)中的最后一项表示对高频振荡部分的惩罚, 当 $p \rightarrow \infty$ 时, 使得 $\lim_{p \rightarrow \infty} \|g_1^2 + g_2^2\|_{L^p} = \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$, 逼近式(38)中的 $\|v\|_{G(\Omega)}$ 范数, 这说明 $G(\Omega)$ 空间的本质是 $L^1(\Omega)$ 空间的对偶空间 $L^\infty(\Omega)$ ^[52]。文献[53]用负整数指数函数 $H^{-1}(\Omega)$ 空间描述图像的振荡部分, $H^{-1}(\Omega)$ 是 $H^1(\Omega)$ 的对偶空间, 将正则项设置为 $\lambda \|v\|_{H^{-1}}^2, H^{-1}(\Omega) = W^{-1,2}(\Omega)$, 此模型比 Vese 和 Osher 提出的模型简单, 只有一个未知量。通过对能量泛函变分获得的 Euler-Lagrange 方程是一个四阶 PDE, 将其应用于图像恢复, 图像的阶梯效应明显消除, 恢复性能优于 ROF 模型。Aujol 等人提出用 Legendre-Fenchel 变换意义下的共轭函数描述图像的振荡部分^[54], 表达式为

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n} \left\{ \|Du\| + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_{L^2}^2 + J^* \left(\frac{|v|}{\mu} \right) \right\} \quad (40)$$

式中, $\mu > 0, J^* \left(\frac{v}{\mu} \right) = x_{B_c} \left(\frac{|v|}{\mu} \right) = \begin{cases} 0 & |v|/\mu \leq 1 \\ +\infty & \text{其他} \end{cases}$ 是式(40)中 $\|Du\|$ 的共轭函数, $B_c = \{z: \|z\|_c \leq 1\}$, 当 $\lambda \rightarrow 0, f \rightarrow u + v$ 时, 满足式(30)图像分解条件。文献[55]指出高斯白噪声属于负的分数量指数函数空间 $H^{-s}(\Omega), H^{-s}(\Omega)$ 是 $H^s(\Omega)$ 的对偶空间。文献[56]提出用负的分数量指数 Sobolev 空间 $H^{-s}(\Omega)$ 来刻画图像的振荡部分, 将式(38)的正则项设置为 $\lambda \|v\|_{H^{-s}}^2$, 参数 s 由具体图像决定, 此模型在去除噪声和保持纹理两方面都取得了较好的效果。当 $s=0$ 时, 文献[56]的模型退化为 ROF 模型; 当 $s=1$ 时, 文献[56]的模型退化为文献[53]的模型。

在函数空间 $F(\Omega)$ 的近似上, 文献[26]提出的

模型类似式(40); 在函数空间 $E(\Omega)$ 的近似上, 文献[57]给出用 Besov 空间 $B_{1,1}^1(\Omega)$ 的对偶空间 $B_{\infty,\infty}^1(\Omega)$ 设置正则项, 正则化模型类似式(41)。

3.2.2 小波域图像分解能量泛函正则化模型

空域正则化模型只利用图像的空间信息, 没有考虑图像的频域信息, 国内外学者利用小波的时频分析特性在小波域建立图像恢复正则化能量泛函模型。由式(31)可知, 小波域正则化模型的关键是寻求能准确描述图像卡通部分和振荡部分的函数空间。在小波域, $BV(\Omega)$ 函数空间很难表示, 文献[58]提出用 Besov 函数空间描述图像卡通部分。综合文献[58]对卡通部分用 $B_{p,p}^\beta(\Omega)$ 函数空间表示和文献[56]对振荡部分用负指数 Sobolev 空间的描述, 文献[59]提出能量泛函表达式为

$$\inf_u \{ E(u) = \|f - (u + v)\|_{L^2}^2 + \gamma \|v\|_{H^{-s}}^2 + \lambda \|u\|_{B_{p,p}^\beta(\Omega)}^p \} \quad (41)$$

此模型应用于图像恢复, 取得了较好的效果。但通过张量积产生的 2 维小波基无法将高频与低频分量彻底分开, 存在高频分量与低频分量混合部分, 而建立能量泛函图像分解模型的前提是将图像分解为卡通部分与振荡部分。为克服 2 维张量积小波基的缺点, 文献[60]提出在曲线波变换域建立图像分解能量泛函正则化模型, 但图像的卡通部分与振荡部分无法用 Besov 函数空间和负指数 $H^s(\Omega)$ 空间来描述。文献[61]提出用满足嵌入关系 $B_{1,1}^1(\Omega) \subset G_{1,1}^{1/2}(\Omega)$ 和 $H^s \subset G_{2,2}^{s,1/4}(\Omega)$ 的函数空间来描述图像的卡通与振荡部分, 但算法比较复杂。

3.3 紧框架域能量泛函正则化模型

在紧框架域, 能量泛函模型主要有 3 种形式。文献[62]将式(33)的正则项设置为 $\|Vu\|_{L_1(\Omega)}$, 提出基于分析的方法对图像进行恢复, 其解是恢复的图像, 将其应用于图像恢复, 图像的峰值信噪比明显提高, 但由于正则项非光滑且不可分离, 算法设计比较困难。文献[63]将式(33)的正则项设置为 $\|z\|_{L_1(\Omega)}$, 提出基于合成方法建立目标函数, 其解是变换域的系数, 将其应用于图像恢复, 图像的恢复信噪比低于文献[62]的方法。为利用紧框架变换特性, 惩罚变换域系数 z 与框架值域之间距离, 文献[64]将正则项设置为 $\lambda_1 \|(I - VV^T)z\|_{L_1(\Omega)} + \lambda \|z\|_{L_1(\Omega)}$, 提出一种权衡能量正则化模型。当 $\lambda_1=0$ 时, 文献[64]正则化模型变为文献[63]的模型。

4 能量泛函解的适定性发展现状

当能量泛函模型建立后, 其解是否具有适定性决定着图像恢复问题的成败。适定性问题最早是由法国数学家 Hadamard 在研究数学物理方程(PDE)中的定解问题时提出的^[12], 主要包括解的存在性、唯一性和稳定性 3 个方面。如果不满足适定性概念中的一条或几条, 就称该问题是不适定的。

根据式(22)(31)(33), 能量泛函通用正则化模型抽象积分的形式表示为

$$E(u(x, y)) = \int_{\Omega} h(x, u(x, y), D^m u(x, y)) d\mu \quad (42)$$

式中, $x \in X, D^m u(x, y) \in X, X$ 是能量泛函的解空间, 具体形式由研究问题决定。

4.1 能量泛函解的存在性发展现状

能量泛函解的存在性主要有 3 种判断方法:

1) 利用强制与下半连续判断解的存在性。要使式(42)的解存在, 能量泛函必须满足强制性与下半连续性条件。所谓强制性是指, 在能量泛函的解空间中, 构造一个极小化序列 $\{u_j(x, y)\}$, 使得式(42)有下界, 即 $E(u(x, y)) = \inf_{u(x, y) \in X} \{E(u(x, y)), u(x, y) \in X\}$ 有界, 或者被积函数连续有界^[65]; 下半连续性是指在能量泛函的解空间中, 假定任意给定的 $\forall u(x, y) \in X$, 使得式(42)具有下确界, 若极小化序列 $\{u_j(x, y)\}$ 收敛于给定的 $u(x, y)$, 即 $u_j(x, y) \rightarrow u(x, y)$, 则有 $E(u(x, y)) \leq \liminf_j E(u_j(x, y))$ 成立。

若建立的能量泛函解空间是自反的 Banach 空间, 上述两个条件很容易满足。如经典 Sobolev 空间中的非线性反应-扩散模型^[30]和 P-M 模型^[31]对应的能量泛函, 解空间为 $u(x, y) \in W^{1,2}(\Omega)$ 。由于 $W^{1,2}(\Omega)$ 是自反的 Banach 空间, 所以存在收敛子列 $\{u_j(x, y)\}$, 而且此极小化序列使能量泛函同时满足强制性与下半连续性, 因此能量泛函的解是存在的。文献[22]建立的能量泛函解空间为 $u(x, y) \in BV^2(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, 利用范数将 $BV^2(\Omega)$ 空间定义为完备的 Banach 空间, 表明存在收敛的子列, 然后验证收敛子列使正则项满足紧性和下半连续性条件, 从而确定能量泛函解的存在性。

若能量泛函的解空间是非自反的 Banach 空间, 导致强制性条件很难满足。如 ROF 模型^[35]的解空

间 $u(x, y) \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, 由于 $W^{1,1}(\Omega)$ 空间是非自反的, 不存在收敛子列, 因此能量泛函的强制性不成立。为解决此问题, 文献[6]在 $BV(\Omega)$ 函数空间中, 引入弱拓扑的概念, 使得 $BV(\Omega)$ 空间在 $L^p(\Omega)$ 中相对紧, $1 \leq p \leq \frac{n}{n-1}, n > 1$, 从而使 $BV(\Omega)$

函数空间中存在弱收敛子列, 然后论证 ROF 模型满足弱紧性与弱下半连续性, 从而说明解的存在性。

若建立的能量泛函解空间的紧性关系不明显, 则下半连续性不容易验证。如文献[24]的正则项能量泛函模型解空间为 $u(x, y) \in W^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, 由于在证明能量泛函解序列有界的过程中, 需要用到 Pincare's 不等式^[9], 而此不等式应用条件是两个函数空间 $W^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^{p(x)}(\Omega)$ 满足紧嵌入关系。

2) 构造松弛能量泛函证明解的存在性。若能量泛函本身不满足强制性与下半连续性条件, 则无法直接用上述方法判断能量泛函解的存在性。文献[9]在 $BV(\Omega)$ 空间建立具有 Dirichlet 边界条件能量泛函模型, 解空间 $u(x, y) \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, 但能量泛函的极小化序列取不到边界值, 造成能量泛函的解可能不存在。为处理此问题, 文献[5]在迹意义下构造松弛能量泛函, 证明构造的能量泛函满足强制性与下半连续性条件, 且松弛能量泛函的解逼近原始能量泛函的解, 从而间接证明原始能量泛函解的存在性。文献[45]建立的能量泛函正则化模型解空间为 $BV(\Omega) \cap BV^2(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, 由于解空间的非自反性, 无法找到能量泛函的一致收敛子列, 导致能量泛函解的存在性无法直接证明。为解决此问题, 文献[45]采用扰动法构造松弛能量泛函, 其解空间为 $W^{1,1+\varepsilon}(\Omega) \cap W^{2,1+\varepsilon}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, 该空间是自反的, 存在一致收敛子列, 使松弛能量泛函的解满足存在性条件。由于松弛能量泛函的解空间是原始能量泛函解空间的子空间, 利用一致收敛特性, 间接论证了原始能量泛函解的存在性。

3) 利用 Schauder 不动点定理证明解的存在性。由于变分能量泛函的等价形式是 PDE, 因此可以利用 PDE 已有的成果论证解的存在性。文献[12]将 PDE 转化成发展型 PDE, 利用抛物型 PDE 的结论论证发展型 PDE 的解空间是原始 PDE 的紧子集, 根据 Schauder 不动点定理论证 PDE 解的存在性。

4.2 能量泛函解的唯一性发展现状

1) 利用凸性确定能量泛函解的唯一性。对任

意给定的 $(x, u(x, y))$,若式(42)中的被积函数关于 $(D^m u(x, y))$ 是严格凸的,则能量泛函的解是唯一的。如文献[45]中的能量泛函是严格凸的,因此其解是唯一的。文献[24]中的能量泛函凸性不明显,但通过对被积函数微分,得到的 Hessian 矩阵是半正定的,能量泛函满足凸性条件,因此其解具有唯一性。

2) 利用 Gronwall's 不等式确定能量泛函解的唯一性。若无法直接判断能量泛函的凸性,则一般将椭圆型 PDE 转化为发展型 PDE^[12],构造具有积分或微分形式的 Gronwall's 不等式来判断解的唯一性。

3) 利用 Banach's 不动点定理证明解的唯一性。若变分能量泛函获得的偏微分算子在 Banach 空间中是一个严格的压缩映射,由 Banach's 不动点定理,判定能量泛函的解是唯一的^[3]。

4.3 能量泛函解的稳定性发展现状

变分能量泛函式(42),获得的 PDE 用算子形式表示为

$$Ku = f \quad (43)$$

式中, K 表示微分算子,对式(43)离散化后获得的 PDE 为

$$K_j u_j = f_j \quad (44)$$

若 $j \rightarrow \infty$ 时, $K_j \rightarrow K, f_j(x, y) \rightarrow f(x, y)$,方程的解序列满足 $u_j(x, y) \rightarrow u(x, y)$,则方程的解稳定。

式(43)是能量泛函解的稳态形式,而 PDE 是从运动的观点来处理图像的,即式(43)的稳态解是 PDE 随时间演化的结果。由于很难获得 PDE 稳态解的具体表达式,往往用式(44)的数值解来逼近,这就限定了离散过程必须与 PDE 随时间演化过程相吻合,因此 PDE 随时间的演化过程与离散求解过程都必须稳定。

能量泛函解的稳定性主要有 3 个发展方向:

1) 从连续的角度论证能量泛函解的稳定性。

将变分能量泛函获得的欧拉方程转化为具有初始条件的发展型 PDE,论证发展型 PDE 的解是有界的,依赖初始值。文献[33]利用黏性解理论论证了正则化模型解的估计值受初始条件的限制,具有有界性,证明连续解的稳定性。文献[49]构造松弛函数,其解具有有界性,且受初始条件的限制,而松弛能量泛函的解逼近原始能量泛函的解,间接证明了能量泛函解的稳定性。

2) 从离散的角度论证能量泛函解的稳定性。

发展型 PDE 离散化后,判断解的稳定性主要有傅里叶变换方法、矩阵方法和能量方法等,这些方法主要论证传播因子的模值是否小于 1。例如傅里叶变换方法论证离散解依赖于空间 Δh 与时间离散步长 Δt ,受初始条件的限制,用函数表示为

$$\hat{u}^{(j+1)}(x, y) = \xi(\Delta t, \Delta h) \hat{u}^{(j)}(x, y) = [\xi(\Delta t, \Delta h)]^j \hat{u}^{(0)}(x, y) \quad (45)$$

式中, $|\xi(\Delta t, \Delta h)|$ 为传播因子,当 $|\xi(\Delta t, \Delta h)| < 1$ 时,PDE 的离散解稳定。文献[10]用有限差分法对发展型 PDE 进行离散化,当时间与空间离散关系满足 $0 < \Delta t \Delta h < 1$ 时,发展型 PDE 的离散解收敛到能量泛函的稳态解。

3) 在离散化的基础上,直接构造有效的迭代算法,使方程的离散解收敛到稳态解。文献[17]利用有限差分对式(36)进行离散化,通过 Gauss-Seidel 迭代算法使数值解收敛到方程的稳态解。为逼近连续解,数值解必须满足 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件(即 $\Delta t \leq C(\Delta h)^2, C > 0$ 的常数)^[23]。但在平稳区域 $|\nabla u| \approx 0$,因为 CFL 条件要求离散时间与空间步长较小,导致迭代算法收敛很慢。为消除 CFL 条件的限制,文献[7]提出将最小能量泛函向合适的凸集进行投影,通过推导获得一种不动点迭代求解方案。

5 图像恢复正则化模型存在的问题及发展方向

5.1 能量泛函正则化模型存在的问题

能量泛函模型主要有以下不足:1) 在不同函数空间能量泛函正则化模型建立上,目前主要利用图像的弱导数,而图像的弱导数容易受到噪声的影响。2) 在图像分解模型的建立上,能否直接利用紧框架的对偶空间建模有待进一步研究,因为紧框架的对偶基有具体表达式,容易计算。3) 在正则项势函数的选取上,目前缺少对凹函数的研究,而文献[12]验证凹函数对图像的恢复效果更理想,因此势函数的选取理论有待完善。4) 图像恢复模型的非线性项具有明确的物理意义,在 PDE 离散化处理时需要保持图像的物理意义而不是数值计算中的代数意义,因此图像恢复中的非线性 PDE 数值实现的自适应性有待进一步研究。5) 对 PDE 离散化后,得到的是线性方程组,一般来说,得到的方程组条件数较大,造成数值求解不稳定,能否在建模时直接提高线

性方程组的条件数有待进一步研究。

5.2 图像恢复正则化模型发展方向

1) 将势函数设置为梯度与边缘的二元函数, 在图像恢复过程中提取图像的边缘, 打破传统滤波算法将图像恢复与提取特征相分离的局面, 因此建立依赖图像特征的多元势函数是未来的发展趋势之一。

2) 目前, 对于压缩传感和大数据处理是世界各国亟待解决的课题, 而紧框架理论为图像处理提供了一种稀疏表示, 因此建立紧框架下的正则化模型将是未来发展的必然阶段。

3) 正则化模型的对偶理论是今后一定时间发展的重要研究方向。特别是优化理论中对偶变换的发展, 为正则化模型的发展注入新的活力, 必将推动对偶模型正则化理论的发展。

4) 目前对 PDE 离散化主要使用有限差分、有限元法和多重网格法等, 这些方法的本质是利用多项式来逼近方程的解, 自适应性较差, 边界处理复杂。

目前, 有界区间紧支撑样条理论已经成熟, 随着图像区域的不同, 用不同的基底来逼近 PDE 的解, 与图像的非平稳特征相适应, 且边界样条的基函数容易建立。此外, 紧框架样条理论有具体的表达式, 能形成有效的算法。

6 结 语

本文对能量泛函正则化模型在图像恢复中的应用进行分析。从正则项的扩散原理入手, 建立图像恢复模型的整体坐标与局部坐标之间的转换关系, 给出正则化模型各向同性和各向异性扩散判定定理。结合函数空间、图像分解和紧框架, 阐述能量泛函正则化模型的建立及其优缺点, 举例分析正则化模型图像恢复扩散原理, 并结合正则项对能量泛函解的适定性进行分析。最后指出正则化模型存在的问题及发展方向。虽然国内外对图像恢复正则化模型研究取得了很多研究成果, 但一些理论问题还需要进一步分析。在今后的工作中, 将对多元能量泛函正则化模型及其求解算法进行研究。

志谢 本文研究是通信作者在美国密苏里大学和华盛顿大学的访问成果之一, 在一年多的访学过程中, 得到了斯坦福大学和密苏里大学 Charles K. Chui、Wenjie He 教授的支持以及华盛顿大学 Carl Bender 教授的帮助, 在此表示感谢。

参考文献 (References)

- [1] Issa S, Jazar M, Hamidi A EI. Ill-posedness of sublinear minimization problems [J]. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 2011, 19(1-2): 88-90.
- [2] Aubert G, Hamidi A EI, Ghannam C, et al. On a class of ill-posed minimization problems in image processing [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 352(1): 380-399.
- [3] Wu T T, Yang Y F, Pang Z F. A modified fixed-point iterative algorithm for image restoration using fourth-order PDE model [J]. Applied Numerical Mathematics, 2012, 62(2): 79-90.
- [4] Haddad A, Meyer Y. An improvement of Rudin-Osher-Fatemi model [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2007, 22(3): 319-334.
- [5] Chen Y, Levine S, Rao M. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2006, 66(4): 1383-1406.
- [6] Fang H Z, Yan L X. Parametric blind deconvolution for passive millimeter wave images with framelet regularization [J]. International Journal for Light and Electron Optics, 2014, 125(3): 1454-1460.
- [7] Lin J H, Li S. Convergence of projected landweber iteration for matrix rank minimization [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2014, 36(2): 316-325.
- [8] Hamidi A EI, Menard M, Lugiez M, et al. Weighted and extended total variation for image restoration and decomposition [J]. Pattern Recognition, 2010, 43(4): 1564-1576.
- [9] Evans Lawrence C. Partial Differential Equations [M]. USA: American Mathematical Society, 1998.
- [10] Xiao L, Huang L L, Wei Z H. Comments on "staircase effect alleviation by coupling gradient fidelity term" [J]. Image and Vision Computing, 2010, 28(11): 1569-1574.
- [11] Jia R Q, Zhao W. Riesz bases of wavelets and applications to numerical solutions of elliptic equations [J]. Mathematics of Computation, 2011, 80(275): 1525-1556.
- [12] Aubert G, Kornprobst P. Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equation and Calculus of Variations [M]. New York: Applied mathematical sciences, Springer Verlag, 2006.
- [13] Litvinov W G, Rahman T, Tai X C. A modified TV-stokes model for image processing [J]. SIAM Journal of Scientific Computing, 2011, 33(4): 1574-1597.
- [14] Wu B, Wu Y D, Zhang H Y. Image restoration based on partial differential equation [M]. Beijing: Peking University Press, 2008. [吴斌, 吴亚东, 张红英. 基于变分偏微分方程的图像复原技术[M]. 北京: 北京大学出版社, 2008.]
- [15] Jiao L C, Hou B, Wang S, et al. Image Multiscale Geometric Analysis: Theory and Applications, Beyond Wavelets [M]. Xi'

- an; Xi'an Electronic Science and Technology University Press, 2008. [焦李成, 侯彪, 王爽, 等. 图像多尺度几何分析理论与应用——后小波分析理论与应用[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2008.]
- [16] Jiang L L, Feng X C, Yin H Q. Image decomposition using optimally sparse representations and a variational approach [J]. *Signal, Image and Video Processing*, 2007, 1(4): 287-292.
- [17] Zhang J, Wang C, Cheng Y. Despeckling for medical ultrasound images based on wavelet and bilateral filter [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2014, 19(1): 126-132. [张聚, 王陈, 程芸. 小波域双边滤波的医学超声图像去噪[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(1): 126-132.] [DOI: 10.11834/jig.20140116]
- [18] Fei X, Wei Z H, Xiao L, et al. Compound regularized compressed sensing image reconstruction based on optimal reweighted TV [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2014, 19(2): 211-218. [费选, 韦志辉, 肖亮, 等. 优化加权TV的复合正则化压缩感知图像重建[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(2): 211-218.] [DOI: 10.11834/jig.20140206]
- [19] Bai Z J, Donatelli M, Capizzano S S. Fast preconditioners for total variation deblurring with anti-reflective boundary conditions [J]. *SIAM Journal on matrix analysis and applications*, 2011, 32(3): 785-805.
- [20] Neubauer A. Tikhonov regularization of nonlinear ill-posed problems in Hilbert scales [J]. *Applicable Analysis*, 1992, 46(2): 59-72.
- [21] Lysaker M, Tai X C. Iterative image restoration combining total variation minimization and a second-order functional [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2006, 66(1): 5-18.
- [22] Liu X W, Huang L H, Guo Z Y. Adaptive fourth-order partial differential equation filter for image denoising [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2011, 24(8): 1282-1288.
- [23] Jiang Q T. Correspondence between frame shrinkage and high-order nonlinear diffusion [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2012, 6(1): 51-66.
- [24] Li F, Li Z B, Pi L. Variable exponent functionals in image restoration [J]. *Application Mathematics and Computation*, 2010, 216(3): 870-882.
- [25] Meyer Yves. *Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equations* [M]. USA: AMS, 2001.
- [26] Le T M, Vese L A. Image decomposition using total variation and div(BMO) [J]. *Multiscale Modeling and Simulation*, 2005, 4(2): 390-423.
- [27] Daubechies I, Teschke G. Variational image restoration by means of wavelets; simultaneous decomposition, deblurring and denoising [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2005, 19(1): 1-16.
- [28] Chen F G, Jiao Y L, Ma G R, et al. Hybrid regularization image deblurring in the presence of impulsive noise [J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2013, 24(8): 1349-1359.
- [29] Fang F M, Zhang G X, Li F, et al. Framelet based pansharpening via a variational method [J]. *Neurocomputing*, 2014, 129(10): 362-377.
- [30] Tikhonov A N, Arsenin V Y. *Solutions of ill-posed Problems* [M]. Washington USA: University of Michigan, 1977.
- [31] Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 1990, 12(7): 629-639.
- [32] Catte F, Lions P L, Morel J M. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1992, 29(1): 182-193.
- [33] Shi Y Y, Chang Q S. New time dependent model for image restoration [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 179(1): 121-134.
- [34] Guo Z C, Sun J B, Zhang D Z, et al. Adaptive perona-malik model based on the variable exponent for image denoising [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, 21(3): 958-967.
- [35] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. *Physical D: Nonlinear Phenomena*, 1992, 60(1-4): 259-268.
- [36] Song B. *Topics in variational PDE image segmentation, inpainting and denoising* [D]. Ph. D. thesis, USA: University of California Los Angeles, 2003.
- [37] Prasath V B S, Singh A. A hybrid convex variational model for image restoration [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 215(10): 3655-3664.
- [38] Wu T T, Yang Y F, Pang Z F. A modified fixed-point iterative algorithm for image restoration using fourth-order PDE model [J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2012, 62(2): 79-90.
- [39] Greer J B, Bertozzi A L. Traveling wave solutions of fourth order PDEs for image processing [J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2004, 36(1): 38-68.
- [40] Greer J B, Bertozzi A L. H¹ solutions of a class of fourth order nonlinear equations for image processing [J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2004, 1(10): 349-366.
- [41] Maure P, Aujol J F, Peyre G. Locally parallel texture modeling [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2011, 4(1): 413-447.
- [42] You Y L, Kaveh M. Four-order partial differential equation for noise removal [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2000, 9(10): 1723-1730.
- [43] Lysaker M, Lundervold A, Tai X C. Noise removal using fourth order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2003, 12(12): 1579-1590.
- [44] Yi D, Lee S. Fourth-order partial differential equations for image enhancement [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 175(1): 430-440.
- [45] Li F, Shen C M, Fan J S, et al. Image restoration combining a total variational filter and a fourth-order filter [J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2007, 18(4): 322-330.

- [46] Diening L, Harjulehto P, Hasto P, et al. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents [M]. Letters Notes in Mathematics, Berlin: Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [47] Ruzicka M. Electrorheological Fluids; Modeling and Mathematical Theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
- [48] Chen Y M, Levine S, Rao M. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2006, 66(4): 1383-1406.
- [49] Wunderli T. On time flows of minimizers of general convex functionals of linear growth with variable exponent in BV space and stability of pseudosolutions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 364(2): 591-598.
- [50] Harjulehto P, Hasto P, Latvala V, et al. Critical variable exponent functionals in image restoration [J]. Applied Mathematics Letters, 2013, 26(1): 56-60.
- [51] Vese L A, Osher S J. Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing [J]. Journal of Scientific Computing, 2003, 19(1-3): 553-572.
- [52] Chan T F, Esedoglu S, Park F E. Image decomposition combining staircase reduction and texture extraction [J]. Journal of Visual Communication & Image Representation, 2007, 18(6): 464-468.
- [53] Osher S, Sole A, Vese L. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the H^1 norm [J]. SIAM J. Multiscale Modeling and Simulation, 2003, 1(3): 349-370.
- [54] Aujol J F, Aubert G, Blanc F, et al. Image decomposition into a bounded variation component and an oscillating component [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2005, 22(1): 71-88.
- [55] Mumford D, Didas B. Stochastic models for generic images [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 2001, 59(1): 85-111.
- [56] Lieu L H, Vese L A. Image restoration and decomposition via bounded total variation and negative Hilbert-Sobolev spaces [J]. Applied Mathematics and Optimization, 2008, 58(2): 167-193.
- [57] Jin Y F, Ma T H, Guan D H, et al. Review of applications of partial differential equations for image enhancement [J]. Scientific Research and Essays, 2012, 7(44): 3766-3783.
- [58] Lorenz D A. Non-convex variational denoising of images: interpolation between hard and soft wavelet shrinkage [J]. Current Development in Theory and Applications of Wavelets, 2007, 1(1): 31-56.
- [59] Li M, Feng X C. Wavelet shrinkage and a new class of variational models based on Besov spaces and negative Hilbert-Sobolev Space [J]. Chinese Journal of Electronics, 2007, 16(2): 276-280.
- [60] Jiang L L, Feng X C, Yin H Q. Variational image restoration and decomposition with curvelet shrinkage [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2008, 30(2): 125-132.
- [61] Zhang Y, Dong B, Lu Z S. Minimization for wavelet frame based image restoration [J]. Mathematics of Computation. 2013, 82(282): 995-1015.
- [62] Cai J F, Osher S, Shen Z W. Split Bregman method and frame based image restoration [J]. Multiscale Modeling & Simulation, 2009, 8(2): 337-369.
- [63] Cai J F, Ji H, Liu C Q, et al. Framelet-Based blind motion deblurring from a single image [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21(2): 562-572.
- [64] Shen Z W, Toh K C, Yun S. An accelerated proximal gradient algorithm for framed-based image restoration via the balanced approach [J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2011, 4(2): 573-596.
- [65] Wunderli T. A partial regularity result for an anisotropic smoothing functional for image restoration in BV space [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 339(2): 1169-1178.