



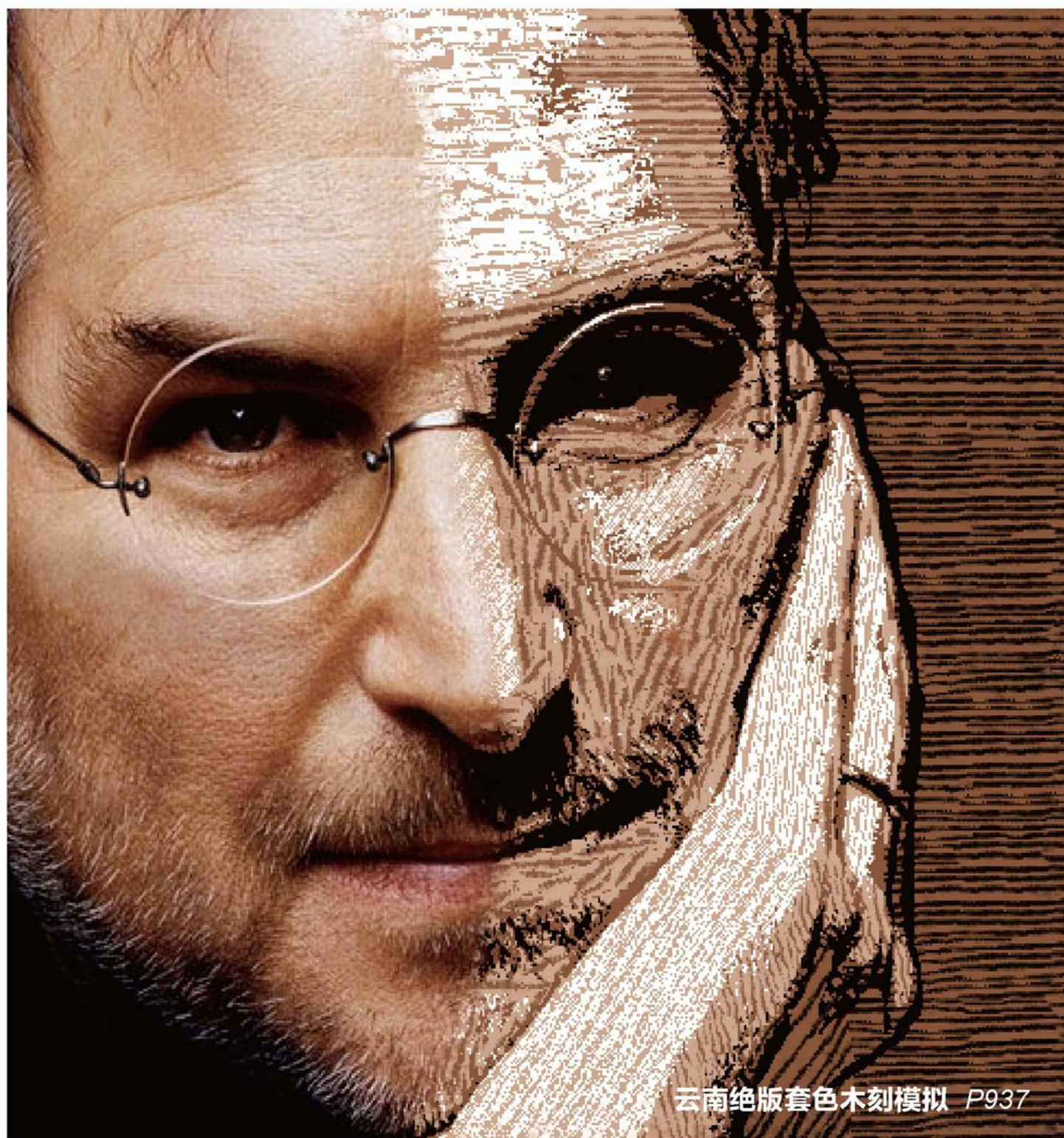
JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS

主办: 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

2015
07
VOL.20

ISSN1006-8961
CN11-3758/TB



云南绝版套色木刻模拟 P937



第20卷第7期（总第230期）

2015年7月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊
中文核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院

主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所

中国图象图形学学会

北京应用物理与计算数学研究所

主 编 李小文

编辑出版《中国图象图形学报》编辑出版委员会

邮政信箱 北京9718信箱

邮 编 100101

电子信箱 jig@radi.ac.cn

电 话 010-64807995

网 址 www.cjig.cn

广告经营许可证 京朝工商广字第0361号

总 发 行 北京报刊发行局

订 购 全国各地邮局

海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司

（邮政信箱：北京399信箱 邮编：100048）

印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian

Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences

Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS

China Society of Image and Graphics

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

Editor-in-Chief LI Xiaowen

Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of

Image and Graphics

P.O.Box 9718, Beijing, P.R.China

Zip code 100101

E-mail jig@radi.ac.cn

Telephone 010-64807995

Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals

Domestic All Local Post Offices in China

Overseas China International Book Trading Corporation

(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China))

Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

CN 11-3758/TB

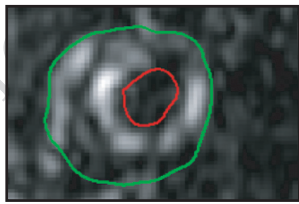
ISSN 1006-8961

CODEN ZTTXFZ

国外发行代号 M1406

国内邮发代号 82-831

国内定价 50.00元



基于颈动脉粥样硬化斑块的多
序列MR图像去噪与配准
(第0871页)



光滑拟合模型的IIPBDR图像
修复算法(第0895页)



基于暗原色先验的图像快速去
雾(第0914页)



个性化定制的虚拟健身系统设
计与实现(第0953页)

图像处理和编码

融合视觉感知特性的HEVC率失真优化

费马燕, 彭宗举, 李持航, 陈芬, 郁梅, 蒋刚毅 0857

结合空间信息的模糊聚类侧扫声纳图像分割

李阳, 庞永杰, 盛明伟 0865

基于颈动脉粥样硬化斑块的多序列MR图像去噪与配准

李军伟, 汪晓妍, 张剑华, 何俊丽, 管秋, 陈胜勇 0871

小波变换与纹理合成相结合的图像修复

张东, 唐向宏, 张少鹏, 黄俊泽 0882

光滑拟合模型的IIPBDR图像修复算法

鱼江, 翟东海, 聂洪玉, 李同亮 0895

图像分析和识别

噪声方差未知条件下的视频目标跟踪

陈金广, 任冰青, 马丽丽, 温静 0906

基于暗原色先验的图像快速去雾

曾浩, 尚媛园, 丁辉, 周修庄, 付小雁 0914

人体运动分析的实例学习方法

李毅, 刘兴川, 孙亭 0922

图像理解和计算机视觉

多参数加权的无缝纹理映射算法

刘彬, 陈向宁, 薛俊诗 0929

交互式云南绝版套色木刻数字化合成

王雪松, 李杰, 侯剑侠, 徐丹, 普园媛 0937

计算机图形学

基于像素的多边形等距区域子分算法

严志刚, 寿华好 0945

个性化定制的虚拟健身系统设计与实现

赵汉理, 孟庆如, 韩丽贞, 潘志庚 0953

遥感图像处理

LANDSAT-8卫星影像长条带数据处理

李亚林, 李山山, 冯钟葵, 张洪群, 陈勃 0963

MapReduce模式下高光谱图像端元提取算法加速

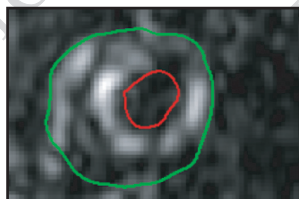
曲海成, 籍瑞庆, 刘万军, 梁雪剑 0973

基于GA-BP神经网络模型的登革热时空扩散模拟

李卫红, 陈业滨, 闻磊 0981

CONTENTS

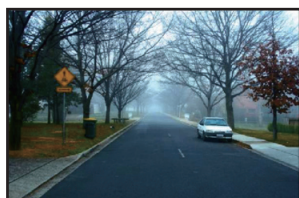
JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Multiple sequence MR image de-noising and registration method based on carotid atherosclerosis plaque (P0871)



Improved IIPBDR algorithm based on smooth-fitting model (P0895)



Fast image haze removal base on dark channel prior (P0914)



Design and implementation of the personalized virtual fitness system(P0953)

Image Processing and Coding

- Human perception features based rate distortion optimization for HEVC
Fei Mayan, Peng Zongju, Li Chihang, Chen Fen, Yu Mei, Jiang Gangyi 0857
- Side-Scan sonar image segmentation via fuzzy clustering with spatial constrains
Li Yang, Pang Yongjie, Sheng Mingwei 0865
- Multiple sequence MR image de-noising and registration method based on carotid atherosclerosis plaque
Li Junwei, Wang Xiaoyan, Zhang Jianhua, He Junli, Guan Qiu, Chen Shengyong 0871
- Image inpainting based on combination of wavelet transform and texture synthesis
Zhang Dong, Tang Xianghong, Zhang Shaopeng, Huang Junze 0882
- Improved IIPBDR algorithm based on smooth-fitting model
Yu Jiang, Zhai Donghai, Nie Hongyu, Li Tongliang 0895

Image Analysis and Recognition

- Video target tracking algorithm with the noise variance unknown
Chen Jinguang, Ren Bingqing, Ma Lili, Wen Jing 0906
- Fast image haze removal base on dark channel prior
Zeng Hao, Shang Yuanyuan, Ding Hui, Zhou Xiuzhuang, Fu Xiaoyan 0914
- Example-based approach for human motion analysis from videos
Li Yi, Liu Xingchuan, Sun Ting 0922

Image Understanding and Computer Vision

- Seamless texture mapping algorithm based on multi parameter weighted
Liu Bin, Chen Xiangning, Xue Junshi 0929
- Interactive digital synthesis of Yunnan out-of-print woodcuts
Wang Xuesong, Li Jie , Hou Jianxia, Xu Dan, Pu Yuanyuan 0937

Computer Graphics

- Pixel based domain subdivision algorithm for polygon offsetting
YAN Zhigang, SHOU Huahao 0945
- Design and implementation of the personalized virtual fitness system
Zhao Hanli, Meng Qingru, Han Lizhen, Pan Zhigeng 0953

Remote Sensing Image Processing

- Study on processing method of LANDSAT-8 long strip satellite imagery
Li Yalin, Li Shanshan, Feng Zhongkui, Zhang Hongqun, Chen Bo 0963
- Acceleration of hyperspectral image endmember extraction based on MapReduce pattern
Qu Haicheng, Ji Ruiqing, Liu Wanjun, Liang Xuejian 0973
- Simulation of spatio-temporal diffusion of dengue fever based on the GA-BP neural network model
Li Weihong, Chen Yebin, Wen Lei 0981

中图法分类号: TP301.6 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2015)07-0945-08

论文引用格式: Yan Z G, Shou H H. Pixel based domain subdivision algorithm for polygon offsetting[J]. Journal of Image and Graphics, 2015, 20(7): 0945-0952. [严志刚, 寿华好. 基于像素的多边形等距区域子分算法[J]. 中国图象图形学报, 2015, 20(7): 0945-0952.] [DOI: 10.11834/jig.20150711]

基于像素的多边形等距区域子分算法

严志刚, 寿华好

浙江工业大学理学院, 杭州 310023

摘要: 目的 多边形等距是计算机图形学、计算几何、计算机辅助几何设计领域的一个基础性问题, 并且有着广泛的应用。为了有效地处理各种类型的多边形等距问题, 提出一种基于像素的多边形等距区域子分算法。方法 利用四叉树数据结构对给定区域进行子分, 再利用区间算术计算出符合等距要求的全体像素集。针对只是由线段组成的多边形采用点到线段的最短距离算子加快计算速度。结果 利用区域子分算法处理了不同类型的多边形等距问题, 并传统的基于像素的多边形等距膨胀算法进行了比较。本文算法能有效处理各种多边形的等距问题, 相对于传统的基于像素的膨胀算法, 在顶点处的处理效果上更好, 并且耗时也更短。所提区域子分算法比传统边等距方法适用范围更广, 能够有效地处理一些边等距算法不能处理的多边形等距问题。结论 本文算法其优点是不需要考虑自交和连接问题, 并且可以处理其他许多常规方法处理不了的各种类型的多边形等距问题, 包括带有弧段和孤岛的情况。

关键词: 多边形等距; 区域子分算法; 区间算术; 四叉树

Pixel based domain subdivision algorithm for polygon offsetting

Yan Zhigang, Shou Huahao

College of Science, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China

Abstract: **Objective** Polygon offsetting is a fundamental problem in the field of computer graphics, computational geometry, and computer-aided geometry design, and it has many applications. A pixel-based domain subdivision algorithm is proposed in this paper to deal with various types of polygon offsetting effectively. **Method** The given domain is subdivided with quadtree data structure, and the sets of all those pixels that are on polygon offsets are calculated with interval arithmetic. For polygons that are composed of line segments only, the shortest distance operator is used between point and line to speed up calculations. **Result** Pixel-based domain subdivision algorithm for polygon offsetting can handle different types of polygon offsetting problems, and it is compared with traditional pixel-based polygon offsetting expansion algorithm. The experimental results show that the proposed algorithm can deal with all kinds of polygon offsetting problems effectively. The performance of the proposed algorithm is better on the processing of vertices than that of traditional expansion algorithm. The proposed algorithm is also less time consuming than traditional expansion algorithm. Compared with traditional edge offsetting algorithm, the proposed algorithm has more extensive applicable scope, and it can effectively deal with various types of polygon offsetting problems that traditional edge offsetting algorithm fails. **Conclusion** A new pixel-based domain subdivision algo-

收稿日期: 2015-01-28; 修回日期: 2015-03-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(61272309, 61472366, 61379077); 浙江省自然科学基金项目(LY13F030010)

第一作者简介: 严志刚(1989—), 男, 浙江工业大学应用数学专业硕士研究生, 主要研究方向为计算机辅助几何设计与图形学。

E-mail: 398025092@qq.com

通信作者: 寿华好, 教授, E-mail: shh@zjut.edu.cn

Supported by: National Natural Science Foundation of China (61272309, 61472366, 61379077); Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (LY13F030010)

rithm for polygon offsetting is proposed in this paper. The proposed algorithm does not need to consider intersection and connection problems, and it can handle various types of polygon offsetting problems that many other conventional algorithms fail, such as when polygon contains arcs and islands.

Key words: polygon offsetting; domain subdivision algorithm; interval arithmetic; quadtree

0 引言

等距线一直都是计算机辅助设计、计算机辅助制造、计算机辅助几何设计等领域中的一个重要问题,并且有着广泛的应用。等距线也称平行或位差线,它是基线沿法向距离为 d 的点的轨迹,其中 d 是等距距离。尽管等距线在概念上是简单的,但是想要精确有效的计算出各种类型的等距线还是比较复杂。等距线现有画法大致可分为矢量方式和栅格方式两种。矢量方式是按矢量的几何关系计算坐标获得等距线位置,算法复杂,但精度高。栅格方式一般采用“距离变换”等算子实现,算法精简,但精确度相对要差。多边形的等距就是其中的一个重要的问题,并在型腔环切加工刀具轨迹生成^[1-3]以及机器人的路径规划^[4]等领域中起着重要作用。已有多边形的等距算法大致可以分为3类:采用矢量方式的边等距法^[3,5-7]和基于Voronoi图法^[8-9]以及采用栅格方式的像素法^[10]。在文献[3]中提到边等距法的一般方法可大致分成以下3个步骤:1)对多边形的每条边沿法向作等距边,然后用圆弧段拼接断开的等距边生成初步等距多边形;2)检查初步等距边的自交点;3)找出和删除无效环。该方法比较复杂,特别是自交点的判别和无效环的删除^[5-7],计算量大且数值计算稳定性差,并对有些带有孤岛或弧段的情况不能有效处理。同样的基于Voronoi图法也需要处理自交点和无效环问题,不过效率相对要高,但算法也是很复杂计算量大且计算稳定性不好。采用栅格法方式的算法与采用矢量方式的算法相比,其思想要简单些,更容易向三维空间扩展,并且这类方法可以处理各种复杂的情况,但是由于受到栅格单元大小的限制,它的精确度相对要差,而且一般耗时长。在文献[10]中就提出了一种采用栅格方式的基于闭球的像素膨胀方法,但其速度不够快,在顶点处的处理上也不够精确。本文提出的是一种新的采用栅格方式的多边形等距的区域子分算法,算法思想简单并且能处理各种类型多边形的等距问

题,包括带有弧段和孤岛等多边形等距问题。由于在所提区域子分算法中采用了四叉树数据结构和区间算术^[11-14],在计算过程中是对各个区域进行操作,在判断某一区域中是否包含多边形等距线的时候可利用区间算术,从而可以一次性丢弃整个不可能包含多边形等距线的区域,无需对区域内栅格逐一地处理,从而极大地减少了算法的计算时间,在此基础上还针对完全由线段组成的多边形提出了特殊子分算法,利用点到线段的距离算子极大地提升了特殊子分算法速度。本文所提一般子分算法在最坏情况下的复杂度为 $O(m^{3/2}n)$,而特殊子分算法的复杂度为 $O(mn)$,这里 m 是栅格总数, n 是多边形的顶点数。由于本文提出的区域子分算法充分利用了四叉树数据结构和区间算术,从而在实际计算等距线的时候计算复杂度要远远小于这个数。

1 基于像素的多边形等距区域子分算法

1.1 算法的流程概述

算法流程如图1所示,首先根据多边形各边的代数方程,利用区域子分算法和区间算术求出原始多边形在平面区域中的像素点集合。然后再次利用区域子分算法和区间算术计算出平面内到原始多边形距离为 d 的全体像素集,其中利用到四叉树和区间算术对其加速。最后把所得像素点集合输出即得

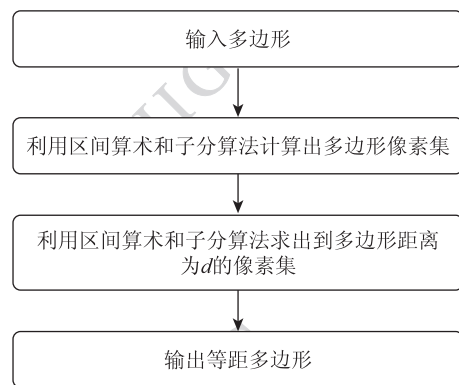


图1 算法流程

Fig. 1 Algorithm process

到了原始多边形的等距多边形。特殊子分算法省去了对各边代数方程的求解,以及图1中的第2步,即不要求出原始多边形的像素点集,只需要多边形各顶点坐标。特殊子分算法变换了距离算子,采用点到线段的距离算子,因此只能处理由线段组成的多边形。

1.2 一般子分算法

假设 $r_1(x_1, y_1), r_2(x_2, y_2), \dots, r_n(x_n, y_n)$ 是给定的2维平面上多边形 L 的 n 个顶点,所给定的平面区域为 $[x, \bar{x}] \times [y, \bar{y}]$, 像素点大小(即像素点区域的边长)是 ε 。计算该多边形 L 的等距多边形,相当于计算该平面区域内到这个多边形距离为 d (d 为等距距离)的像素点全体。

通过对平面多边形各边进行离散得到各自的像素点集合,从而平面区域 $[x, \bar{x}] \times [y, \bar{y}]$ 和多边形各边之间的区间距离计算转变为求该平面区域和像素点之间的最短距离。在求这个距离最小值过程中,采用四叉树数据结构和区间算术进行加速。

1) 首先利用四叉树数据结构和区间算术将多边形的 n 条边离散化,从而找出多边形的全体像素集 M 。先分别找出包含多边形的 n 条边的像素点的 n 个集合 $m_1 = \bigcup_{j=1}^{k_1} \{[a_{1j}, b_{1j}] \times [c_{1j}, d_{1j}]\}, \dots, m_n = \bigcup_{j=1}^{k_n} \{[a_{nj}, b_{nj}] \times [c_{nj}, d_{nj}]\}$, 其中 $[a_{ij}, b_{ij}] \times [c_{ij}, d_{ij}]$ 表示像素点所占的区域。首先通过给定顶点求出各边的代数方程 $f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = 0, \dots, f_n(x, y) = 0$, 再利用修正仿射算术^[12-13] 计算 $f_i(x, y)$ 在 $[x_i, \bar{x}_i] \times [y_i, \bar{y}_i]$ 上的取值范围 $[f_i, \bar{f}_i]$, 这里 $[x_i, \bar{x}_i] \times [y_i, \bar{y}_i]$ 是包围第 i 条边的最小正方形区域, 然后判断 $[f_i, \bar{f}_i]$ 是否包含0, 如果 $[f_i, \bar{f}_i]$ 不包含0, 说明 $[x_i, \bar{x}_i] \times [y_i, \bar{y}_i]$ 内不包含平面线段 $f_i(x, y) = 0$, 则抛弃该区域, 如果 $[f_i, \bar{f}_i]$ 包含0, 说明 $[x_i, \bar{x}_i] \times [y_i, \bar{y}_i]$ 有可能包含平面线段 $f_i(x, y) = 0$, 则采用四叉树数据结构将该平面矩形区域一分为四, 依次递归下去, 直到每个区域的大小不超过一个像素的大小 ε , 如果函数的区间值还包含0, 则区域在多边形的边上并将其存入 m_i , 从而得到多边形的全体像素集 $M = \bigcup_{i=1}^n m_i$ 。这里使用四叉树数据结构和区间算术可以提升整个计算的速度。

2) 计算平面区域 $[x, \bar{x}] \times [y, \bar{y}]$ 内到像素点集合

M 的距离为 d 的全体像素集 N 。这个问题仍然是通过采用四叉树数据结构和区间算术来解决的, 首先采用普通区间算术逐个计算平面区域 $[x, \bar{x}] \times [y, \bar{y}]$ 和各个像素 $[a_{ij}, b_{ij}] \times [c_{ij}, d_{ij}]$ 之间的区间距离 $[g_j, \bar{g}_j] = \sqrt{([x, \bar{x}] - [a_{ij}, b_{ij}])^2 + ([y, \bar{y}] - [c_{ij}, d_{ij}])^2}$, 再令 $l_i = \min_{1 \leq j \leq k_i} \{g_j\}, h_i = \min_{1 \leq j \leq k_i} \{\bar{g}_j\}$, 那么区间 $[l_i, h_i]$ 就是平面矩形区域 $[x, \bar{x}] \times [y, \bar{y}]$ 到平面线段 m_i 的最短距离区间, 再取 $l = \min_{1 \leq i \leq n} \{l_i\}, h = \min_{1 \leq i \leq n} \{h_i\}$, 从而可以得到 $[l, h]$ 是平面矩形区域 $[x, \bar{x}] \times [y, \bar{y}]$ 到多边形 L 的最短距离区间。如果 $[l, h]$ 不包含 d , 那么 $[x, \bar{x}] \times [y, \bar{y}]$ 不可能包含等距多边形的点, 从而可以抛弃 $[x, \bar{x}] \times [y, \bar{y}]$, 但是如果 $[l, h]$ 包含 d , 那么此时 $[x, \bar{x}] \times [y, \bar{y}]$ 可能包含等距多边形的点, 此时采用四叉树数据结构将 $[x, \bar{x}] \times [y, \bar{y}]$ 在中点处一分为四, 并递归这个过程, 直到各个区域的大小都不超过一个像素的大小 ε , 如果最短区间距离还是包含 d , 则该区域符合等距要求并将其存入像素集 N 。从而可得到所要计算的平面多边形 L 的等距多边形全体像素点集合 N 。

根据以上描述, 给出本文多边形等距区域子分算法的具体步骤如下:

1) 给定多边形 L 的 n 个顶点 $r_1(x_1, y_1), r_2(x_2, y_2), \dots, r_n(x_n, y_n)$ 以及所在的平面矩形区域 $[x, \bar{x}] \times [y, \bar{y}]$ 和像素的大小 ε 。

2) 根据给定的 n 个顶点计算出多边形 L 的各边代数方程 $f_i(x, y) = 0$ 以及 $[x_i, \bar{x}_i] \times [y_i, \bar{y}_i]$, 其中 $1 \leq i \leq n$, 然后利用上述区域子分算法的第1)步计算出各边的像素集 m_i , 从而得多边形 L 的全体像素集 M 。

3) 根据上述算法的第2)步计算出到原始多边形距离为 d 的像素集 N 。

4) 最后输出 M 和 N 得到原始多边形和等距多边形。

本文算法的第2)步和第3)步充分利用了四叉树数据结构和区间算术加速, 如果不用四叉树数据结构进行子分, 那么需要对每个像素进行判断, 比较费时间。而使用四叉树数据结构和区间算术, 当 $[f_i, \bar{f}_i]$ 不包含0 或者 $[l, h]$ 不包含 d 时, 可以整个地抛掉区域 $[x, \bar{x}] \times [y, \bar{y}]$, 不需要对这个区域内的像素作进一步的判断, 而能不能把一个区域成功地抛掉又取决于所使用的区间算术的精确度, 这也是

为什么选用相对比较精确的修正仿射算术的原因。总之利用四叉树数据结构和区间算术可以起到计算加速的作用。因为本文算法是基于像素的,求的是像素点之间的距离,所以在凸顶点处不需要考虑拼接的问题,在凹顶点处不需要考虑令人头痛的自交问题,并且这个算法可以处理各种类型的多边形等距问题,包括带有弧段、孤岛等情况,前提是多边形的每条边能够用代数方程表示。

1.3 特殊子分算法

对于完全由线段组成的多边形,可利用平面多边形的各边是线段的特殊性,从而可改变距离算子,利用点到线段的距离算法来计算平面矩形区域 $[\underline{x}, \bar{x}] \times [\underline{y}, \bar{y}]$ 和各边长线段之间的区间距离。从而大大减少了计算量,提升了算法的速度。

如图2所示,点到线段的最短距离的运算与点到直线的最短距离的运算二者之间存在一定的差别,即求点到线段最短距离时需要考虑参考点在沿线段方向的投影点是否在线段上。如图2(a),若投影点在线段上才可采用点到直线距离公式,即最短距离为 $|PC|$ 。如图2(b)(c),如果投影点不在线段上则其距离为点到与其最靠近的端点的距离,则最短距离分别为 $|PB|$ 和 $|PA|$ 。对于点到线段的距离问题现有很多算法,大致可以分为,定义法、面积法和矢量法。本文采用了一种新的矢量方法,主要是为了快速地判断出点到线段的投影点是否在线段上,本文算法采用通过判断矢量间的夹角来判断,如图2所示可以通过判断向量 $\vec{AP}$ 与 $\vec{AB}$ 以及向量 $\vec{BP}$ 与 $\vec{BA}$ 的夹角是否为钝角来确定投影点是否在线段上,如果都不是钝角则投影点在线段上,则最短距

离可以采用点到直线的距离公式计算,如果出现钝角则投影点在线段外,则最短距离为点与线段端点之间的距离可通过两点间的距离公式计算。

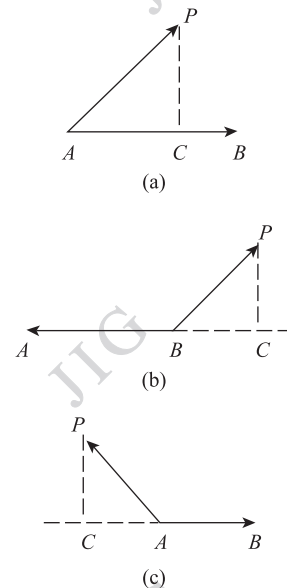


图2 点到线段的距离

Fig. 2 Distance of point to line

根据上面的区域子分算法和点到线段的最短距离算法;得到本文特殊算法的具体步骤如下:

1) 给定多边形 L 的 n 个顶点 $r_1(x_1, y_1), r_2(x_2, y_2), \dots, r_n(x_n, y_n)$ 以及所在的平面矩形区域 $[\underline{x}, \bar{x}] \times [\underline{y}, \bar{y}]$ 和像素的大小 ε 。

2) 先采用矢量的方法判断平面区域 $[\underline{x}, \bar{x}] \times [\underline{y}, \bar{y}]$ 到多边形各边线段上的投影点是否在线段上,考虑到我们是采用四叉树子分,则可通过取区域的中点来判断。如果投影点在线段上,则利用点到直线的距离公式和区间算术计算

$$[g_i, \bar{g}_i] = \begin{cases} \sqrt{\frac{(([\underline{x}, \bar{x}] - x_i)(y_{i+1} - y_i) - ([\underline{y}, \bar{y}] - y_i)(x_{i+1} - x_i))^2}{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}, & 1 \leq i \leq n-1 \\ \sqrt{\frac{(([\underline{x}, \bar{x}] - x_n)(y_n - y_1) - ([\underline{y}, \bar{y}] - y_n)(x_n - x_1))^2}{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2}}, & i = n \end{cases}$$

如果投影点在线段之外则利用两点之间的距离公式和区间算术计算 $[g_i, \bar{g}_i] = \sqrt{([\underline{x}, \bar{x}] - x_i)^2 + ([\underline{y}, \bar{y}] - y_i)^2}$,然后令 $[g, \bar{g}] = [\min_{1 \leq i \leq n} \{g_i\}, \min_{1 \leq i \leq n} \{\bar{g}_i\}]$,如果 $[g, \bar{g}]$ 不包含 d ,那么抛弃 $[\underline{x}, \bar{x}] \times [\underline{y}, \bar{y}]$,如果 $[g, \bar{g}]$ 包含 d ,则对区域 $[\underline{x}, \bar{x}] \times [\underline{y}, \bar{y}]$ 采用四叉树数据结构,将其一分为四,对4个小区域重复步骤2)的操作,直到区域的

大小不超过一个像素的大小 ε 为止,如果区间距离还是包含 d ,则将其存入像素集 N 。

3) 输出多边形 L 和像素集 N 组成的等距多边形,算法结束。

特殊算法不但在一般算法的基础上充分利用了四叉树和区间算术加速,而且不需求得各边的代数方程,也不需对各边进行离散化,只需要多边形各项

点即可。在采用了点到线段的距离算子后,大大减少了求距离的次数,从而对算法的速度提升了很多。但是特殊算法只能处理完全由线段组成的多边形,并且也无法处理带有孤岛的情况。

2 算法的计算复杂度分析

假设所考虑的平面区域中总的栅格数量为 $m = 2^k \times 2^k$, 假设多边形顶点个数为 n 。对于一般区域子分算法中两次用到了子分, 那么在最坏的情况下, 也就是说在子分算法的执行过程中一个区域都抛不掉的情况下, 并且假设每一条边都包含最多个栅格 $\sqrt{2m}$, 第1次子分的计算复杂度为

$$n + 4n + 4^2n + \cdots + 4^kn = n \left(\frac{4^{k+1} - 1}{4 - 1} \right) = O(mn)$$

第2次子分的计算复杂度为

$$\sqrt{2mn} + 4\sqrt{2mn} + 4^2\sqrt{2mn} + \cdots + 4^k\sqrt{2mn} = \sqrt{2mn} \left(\frac{4^{k+1} - 1}{4 - 1} \right) = O(2^{2k} \sqrt{2mn}) = O(m^{3/2}n)$$

那么对于一般算法总的计算复杂度为 $O(mn) + O(m^{3/2}n) = O(m^{3/2}n)$ 。同样考虑在最坏情况下特殊子分算法总的计算复杂度为

$$n + 4n + 4^2n + \cdots + 4^kn = n \left(\frac{4^{k+1} - 1}{4 - 1} \right) = O(2^{2k}n) = O(mn)$$

其计算复杂度仅与多边形顶点个数成线性关系。因为在实际计算的时候由于算法是直接对每个区域采用区间算术, 判断完后可以丢弃不可能包含多边形的区域和区间距离不可能包含 d 的区域, 从而实际

计算复杂度远小于这个数。而具体能降低到多少, 要看实际操作中能成功的丢弃多少区域, 而具体能丢弃多少区域是不可预知的, 是由图形的形状以及所在的区域决定的。这里计算的是最坏情况下的算法复杂度, 也就是假设一个区域都不能成功丢弃。以上复杂度分析表明, 本文所提区域子分算法的计算复杂度跟多边形顶点的个数 n 和栅格的总数量 m 都有关。

3 实验

基于 Mathematica8.0 编程实现了上面提出的两种算法, 同时也实现了文献[10]中的膨胀方法, 并在处理器为 Intel(R) Core(TM) CPU i3-2330M @ 2.20 GHz 的电脑上运行程序进行了一些实例的计算和比较, 实验结果如图3—图6所示。

从图3和图4可以直观地看出, 本文所提的两种基于像素的区域子分算法在处理效果上是要优于传统的基于像素的膨胀算法, 特别是在凹顶点的处理上, 从图4可以清楚地看出传统膨胀法在凹点的处理效果要比我们的子分算法差。表1的数据也反应出了在速度上特殊子分算法比传统的膨胀法快很多。根据表1中对应图3和图4的数据, 特殊子分算法快了至少50倍, 这得益于区间距离计算的简化和采用了二叉树数据结构以及区间算术进行加速。如图5所示, 一般子分算法可以处理各种复杂的多边形等距问题, 包括带有弧段和孤岛的情况, 这是一些传统的边等距方法所不能处理的, 并且本文算法

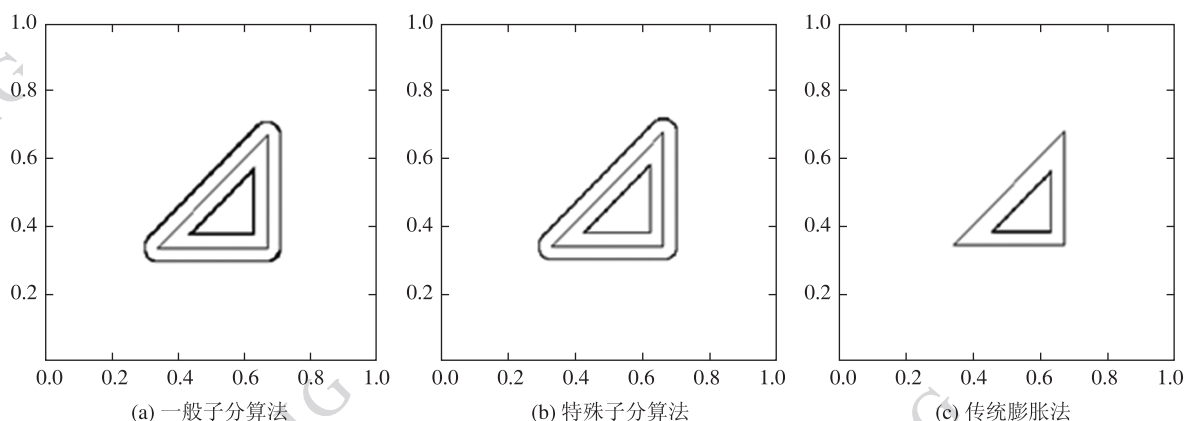


图3 简单三角形的等距($d=0.04$)

Fig. 3 Offset of simple triangle($d=0.04$)

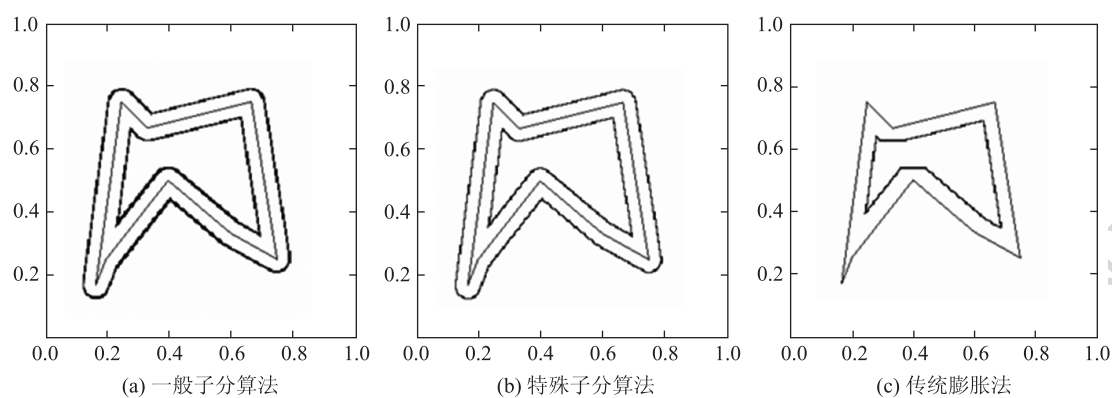
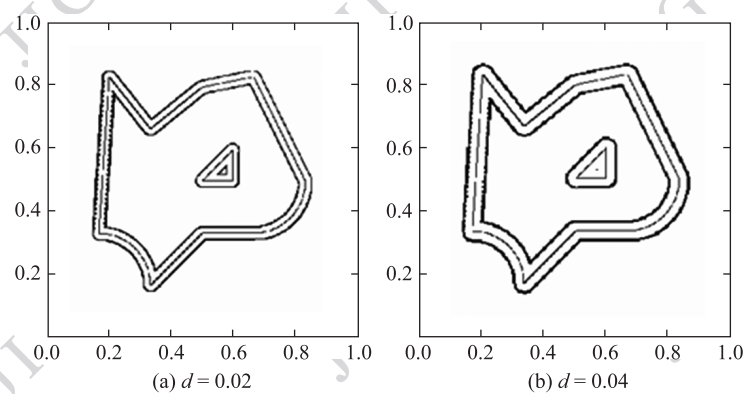
图4 八边形等距($d=0.04$)Fig. 4 Offset of octagon($d=0.04$)

图5 带孤岛和圆弧段的多边形等距(一般子分算法)

Fig. 5 Offset of polygon with island and arc (General subdivision algorithm)

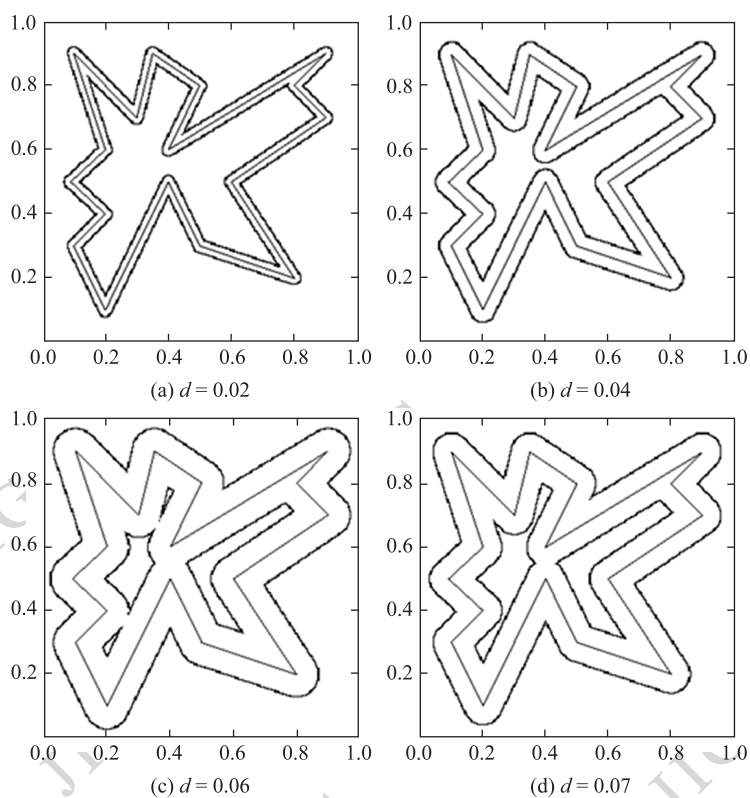


图6 任取17个点构成的多边形等距(特殊子分算法)

Fig. 6 Offset of polygon with seventeen vertices(special subdivision algorithm)

完全不必考虑自交和顶点处拼接的问题,这也优于传统的边等距方法,可见在适用范围上本文算法比传统边等距方法更广。如图6所示,特殊子分算法可以高效地处理完全由线段组成的多边形等距问题,不管是从效果上还是速度上特殊子分算法都表现得很优秀。

表1 实验分析与比较

Table 1 Experiment analysis and comparison

图号	d	时间/s
3(a)	0.04	389.615
3(b)	0.04	2.855
3(c)	0.04	221.665
4(a)	0.04	596.704
4(b)	0.04	9.861
4(c)	0.04	549.31
5(a)	0.02	2581.85
5(b)	0.04	2151.96
6(a)	0.02	24.601
6(b)	0.04	22.932
6(c)	0.06	21.906
6(d)	0.07	19.906

4 结 论

实验结果表明,基于像素的多边形等距区域子分算法能处理各种类型的平面多边形等距问题,包括带有弧段和孤岛的情况,这是大多数边等距方法所不能处理的,并且算法稳定性好。提出的特殊子分算法对处理只是由线段组成的多边形等距的情况大大地提升了速度,与膨胀法相比较速度快了很多,并且是在膨胀法只是单单地做了向内等距的情况下比较的,在效果和精确度上明显要比膨胀法好、膨胀法对顶点处的处理不够精确,特别是在处理凹点的时候。从算法复杂度上看,两种算法在最坏的情况下计算复杂度分别为 $O(m^{3/2}n)$ 和 $O(mn)$,而因为采用了二叉树数据结构和区间算术加速,实际计算时是对区域进行操作,不需要对全体栅格逐一处理,所以实际的计算量要少很多。最重要的是区域子分算法思想十分简单,非常容易编程实现,并且对于各

种复杂的情况都能处理。另外需要指出的是区域子分算法可同时生成向内和向外的等距多边形,但由于区间算术的保守性,区域子分算法得到的是一个像素集,最终得出的图像在精确度上略差,有些边可能比实际要粗一些,如何提高这个精确度还值得进一步地研究。多边形等距可以应用于数控机床加工中刀具路径的设计、机器人行走路径的规划、公路和铁路设计、艺术花纹图案设计、有限元建模与分析,以及模型设计等很多领域。区域子分算法能够很好地处理各种情况的多边形等距问题,虽然作为一种基于像素的多边形等距算法,它的精度一般比不过边等距算法,但是它能处理经典边等距算法处理不了的比如多边形包含弧段或者孤岛的复杂情况,从而当实际问题对精度要求不是太高比如艺术花纹图案设计的时候,区域子分算法有突出的优势。此外,2维的区域子分算法很容易推广到3维空间情形。

参考文献(References)

- [1] Fang X, Peng Q S, Zheng J X. 2.5 axis complicated cavity algorithm of tool path generation[J]. Journal of Engineering Graphics, 2000, 21(1): 19-27. [方向, 彭群生, 郑家骥. 2.5轴复杂型腔的刀位轨迹生成算法[J]. 工程图学学报, 2000, 21(1): 19-27.]
- [2] Zhu Z H, Gan X Y, Lin Y H. Study on the cutter radius compensation algorithm[J]. Journal of Huazhong Science and Technology University, 1993, 21(2): 99-104. [朱志红, 甘锡英, 林奕涛. 刀具半径补偿算法研究[J]. 华中理工大学学报, 1993, 21(2): 99-104.]
- [3] Chen Z M, Xu Z Q. A fast offset method for polygon[J]. Modern Manufacturing Engineering, 2004, 36(12): 7-11. [陈正鸣, 徐镇全. 一个多边形快速等距偏移方法[J]. 现代制造工程, 2004, 36(12): 7-11.]
- [4] Lozano-Pérez J, Wesley M A. An algorithm for planning collision-free paths among polyhedral obstacles[J]. Communications of the ACM, 1979, 22(10): 560-570.
- [5] Zhao J B, Liu W J, Wang Y C. Remove the invalid loops in offset algorithm of polygon[J]. Journal of Engineering Graphics, 2005, 26(3): 44-40. [赵吉宾, 刘伟军, 王越超. 多边形OFFSET中无效环的去除算法[J]. 工程图学学报, 2005, 26(3): 44-40.]
- [6] Choi B K, Park S C. A pair-wise offset algorithm for 2D point sequence curve[J]. Computer-Aided Design, 1999, 31(12):

- 735-745.
- [7] Suh Y S, Lee K W. NC milling tool path generation for arbitrary pockets defined by sculptured surfaces [J]. Computer Aided Design, 1990, 22(5): 273-284.
- [8] Qian B, Zhang L C, Huang S H. Voronoi diagrams algorithm based on polygon and in the rapid prototyping applications[J]. Journal of Huazhong University of Science & Technology: Natural Science Edition, 2008, 36(3): 414-417. [钱波, 张李超, 黄树槐. 基于平面多边形 Voronoi 图的算法与快速成形应用[J]. 华中科技大学学报:自然科学版, 2008, 36(3): 414-417.]
- [9] Kim D S. Polygon offsetting using a Voronoi diagram and two stacks [J]. Computer-Aided Design, 1998, 30(14): 1069-1076.
- [10] Gurbuz A Z, Zeid I. Offsetting operations via closed ball approximation [J]. Computer-Aided Design, 1995, 27(11): 905-910.
- [11] Moore R E, Kearfott R B, Cloud M J. Introduction to Interval Analysis [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009, 96-99.
- [12] Shou H H, Lin H W, Martin R, et al. Modified affine arithmetic in tensor form for trivariate polynomial evaluation and algebraic surface plotting [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 195(1-2): 155-171.
- [13] Shou H H, Lin H W, Martin R, et al. Modified affine arithmetic is more accurate than centered interval arithmetic or affine arithmetic [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2003, 2768: 355-365.
- [14] Shou H H, Yuan Z W, Miao Y W, et al. Subdivision algorithm for Voronoi diagram of planar point set[J]. Journal of Graphics, 2013, 34(2): 1-6. [寿华好, 袁子薇, 缪永伟, 等. 一种平面点集 Voronoi 图的细分算法[J]. 图学学报, 2013, 34(2): 1-6.]