



JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS

主办: 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象学报

2014

09

VOL.19

ISSN1006-8961
CN11-3758/TB





第19卷第9期（总第221期）

2014年9月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院

主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所

中国图象图形学学会

北京应用物理与计算数学研究所

主 编 李小文

编辑出版《中国图象图形学报》编辑出版委员会

邮政信箱 北京9718信箱

邮 编 100101

电子信箱 jig@irsa.ac.cn

电 话 010-64807995

网 址 www.cjig.cn

广告经营许可证 京朝工商广字第0361号

总 发 行 北京报刊发行局

订 购 全国各地邮局

海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司

（邮政信箱：北京399信箱 邮编：100048）

印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian

Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences

Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS

China Society of Image and Graphics

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

Editor-in-Chief LI Xiaowen

Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of
Image and Graphics

P.O.Box 9718, Beijing, P.R.China

Zip code 100101

E-mail jig@irsa.ac.cn

Telephone 010-64807995

Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals

Domestic All Local Post Offices in China

Overseas China International Book Trading Corporation

(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China)

Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

CN 11-3758/TB

ISSN 1006-8961

CODEN ZTTXFZ

国外发行代号 M1406

国内邮发代号 82-831

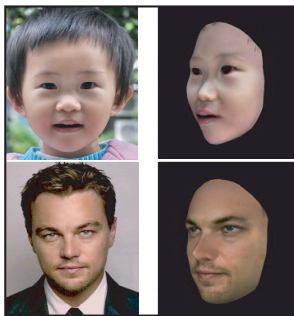
国内定价 50.00元



自适应对称自回归模型的压缩图像内插方法(第1268页)



加权局部特征结合判别式字典的目标跟踪算法(第1316页)



结合特征适配与拉普拉斯形变的3维人脸重建(第1349页)

综述

能量泛函正则化模型在图像恢复中的应用分析

李旭超, 刘海宽, 宋博 1247

图像处理和编码

融合最小化失真与模型保持的隐写算法

高瞻瞻, 汤光明, 张伟伟 1260

自适应对称自回归模型的压缩图像内插方法

刘婧, 干宗良, 崔子冠, 陈昌红, 朱秀昌 1268

基于能量泛函和视觉特性的全变分图像降噪模型

郭从洲, 秦志远, 时文俊 1282

分块策略实现图像椒盐噪声密度估计

林亚明, 李佐勇, 林叶郁 1288

图像分析和识别

Dempster-Shafer证据融合金字塔韦伯局部特征的表情识别

王晓华, 金超, 任福继, 胡敏 1297

运动捕捉数据中足迹的谱聚类检测方法

刘晓平, 陆劲挺, 谢文军 1306

加权局部特征结合判别式字典的目标跟踪

王飞, 房胜 1316

面向瓦当文字识别的改进水平集骨架提取

邓茜芸, 周明全, 武仲科, 王醒策 1324

改进复杂网络模型的形状特征提取

阮瑞, 江波, 汤进, 罗斌 1332

几何特性二元关系的直线匹配

胡海霞, 李钢 1338

图像理解和计算机视觉

结合特征适配与拉普拉斯形变的3维人脸重建

张剑, 何骅, 詹小四, 肖俊 1349

利用背景加权和选择性子模型更新的视觉跟踪算法

黄安奇, 侯志强, 余旺盛, 刘翔 1360

计算机图形学

对可控Bézier曲线的改进

严兰兰, 韩旭里 1368

医学图像处理

结合区域生长与灰度重建的CT图像肺气管树分割

彭双, 肖昌炎 1377

检测肺结节的3维自适应模板匹配

高婷, 龚敬, 王远军, 聂生东, 孙希文 1384

CONTENTS

JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Novel compression image interpolation method using adaptive symmetrical autoregressive models(P1268)



Visual tracking based on discriminative dictionary and weighted local features (P1316)



Three dimensional face reconstruction via feature adaptation and Laplace deformation (P1349)

Review

- Application analysis of regularization model of energy functional to image restoration
Li Xuchao, Liu Haikuan, Song Bo 1247

Image Processing and Coding

- Steganographic method combining minimum embedding distortion and model preservation
Gao Zhanzhan, Tang Guangming, Zhang Weiwei 1260
- Novel compression image interpolation method using adaptive symmetrical autoregressive models
Liu Jing, Gan Zongliang, Cui Ziguan, Chen Changhong, Zhu Xiuchang 1268
- TV image denoising model based on energy functionals and HVS
Guo Congzhou, Qin Zhiyuan, Shi Wenjun 1282
- Image salt-and-pepper noise estimation based on partitioning strategy
Lin Yaming, Li Zuoyong, Lin Yeyu 1288

Image Analysis and Recognition

- Research on facial expression recognition based on pyramid Weber local descriptor and the Dempster-Shafer theory of evidence
Wang Xiaohua, Jin Chao, Ren Fuji, Hu Min 1297
- Foot plant detection based on spectral clustering algorithm for motion capture data
Liu Xiaoping, Lu Jintong, Xie Wenjun 1306
- Visual tracking based on the discriminative dictionary and weighted local features
Wang Fei, Fang Sheng 1316
- Skeleton extraction using improved level set methods in eaves' text recognition
Deng Qianyun, Zhou Mingquan, Wu Zhongke, Wang Xingce 1324
- Improved shape feature extraction using complex network model
Ruan Rui, Jiang Bo, Tang Jin, Luo Bin 1332
- Line matching based on binary relations of geometric attributes
Hu Haixia, Li Gang 1338

Image Understanding and Computer Vision

- Three dimensional face reconstruction via feature adaptation and Laplace deformation
Zhang Jian, He Hua, Zhan Xiaosi, Xiao Jun 1349
- Visual object tracking method based on weighted background and selective sub-model update strategy
Huang Anqi, Hou Zhiqiang, Yu Wangsheng, Liu Xiang 1360

Computer Graphics

- Improvement of the modifiable Bézier curves
Yan Lanlan, Han Xuli 1368

Medical Image Processing

- Segmentation of pulmonary airway tree in CT images by combining region growing and grayscale reconstruction algorithms
Peng Shuang, Xiao Changyan 1377
- Three dimensional adaptive template matching algorithm for lung nodule detection
Gao Ting, Gong Jing, Wang Yuanjun, Nie Shengdong, Sun Xiwen 1384

中图法分类号: TP391.72 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2014)09-1368-09

论文引用格式: Yan L L, Han X L. Improvement of the modifiable Bézier curves[J]. Journal of Image and Graphics, 2014, 19(9): 1368-1376. [严兰兰, 韩旭里. 对可控 Bézier 曲线的改进[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(9): 1368-1376.] [DOI:10.11834/jig.20140914]

对可控 Bézier 曲线的改进

严兰兰^{1,2}, 韩旭里²

1. 东华理工大学理学院, 南昌 330013; 2. 中南大学数学与统计学院, 长沙 410083

摘要: 目的 在用 Bézier 曲线表示复杂形状时, 相邻曲线的控制顶点间必须满足一定的光滑性条件。一般情况下, 对光滑度的要求越高, 条件越复杂。通过改进文献中的“可控 Bézier 曲线”, 以构造具有多种优点的自动光滑分段组合曲线。**方法** 首先给出了两条位置连续的曲线 G^l 连续的一个充分条件, 进而证明了“可控 Bézier 曲线”在普通 Bézier 曲线的 G^l 光滑拼接条件下可达 G^l (l 为曲线中的参数) 光滑拼接。然后对“可控 Bézier 基”进行改进得到了一组新的基函数, 利用该基函数按照 Bézier 曲线的定义方式构造了一种新曲线。分析了该曲线的光滑拼接条件, 并根据该条件定义了一种分段组合曲线。**结果** 对于新曲线而言, 只要前一条曲线的最后一条控制边与后一条曲线的第 1 条控制边重合, 两条曲线便自动光滑连接, 并且在连接点处的光滑度可以简单地通过改变参数的值来自由调整。由新曲线按照特殊方式构成的分段组合曲线具有类似于 B 样条曲线的自动光滑性和局部控制性。不同的是, 组合曲线的各条曲线段可以由不同数量的控制顶点定义, 选择合适的参数, 可以使曲线在各个连接点处达到任何期望的光滑度。另外, 改变一个控制顶点, 至多只会影响两条曲线段的形状, 改变一条曲线段中的参数, 只会影响当前曲线段的形状, 以及至多两个连接点处的光滑度。**结论** 本文给出了构造易于拼接的曲线的通用方法, 极大简化了曲线的拼接条件。此基础上, 提出的一种新的分段组合曲线定义方法, 无需对控制顶点附加任何条件, 所得曲线自动光滑, 且其形状、光滑度可以或整体或局部地进行调整。本文方法具有一般性, 为复杂曲线的设计创造了条件。

关键词: 曲线设计; Bézier 曲线; 光滑拼接; 分段组合; 连续性

Improvement of the modifiable Bézier curves

Yan Lanlan^{1,2}, Han Xuli²

1. College of Science, East China Institute of Technology, Nanchang 330013, China;
 2. School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China

Abstract: **Objective** When a Bézier curve is used to describe complex shapes, the problem of joining curve segments smoothly has to be solved. To maintain the continuity of the whole curve, adjacent curve segments must meet strict continuity conditions. A higher the requirement for continuity usually causes conditions to become more complex and involves a larger number of control points. This study improves the modifiable Bézier curve in the literature to achieve smooth connection between curves automatically and to construct a piecewise composite curve with numerous merits. **Method** We first present a sufficient condition of G^l continuity for two curves with continuous position. On the basis of the sufficient condition G^l , we prove that the modifiable Bézier curve can achieve a smooth connection under conditions that usually guarantee G^l continuity only for the usual Bézier curve and most Bézier-like curves in the literature. We then use a transition matrix to convert the modifiable Bézier basis to a new set of basis functions. We employ this set of basis functions to define a new kind of curve

收稿日期: 2014-01-22; 修回日期: 2014-05-07

基金项目: 国家自然科学基金项目(11261003; 11271376; 60970097); 江西省教育厅项目(GJJ14493)

第一作者简介: 严兰兰(1982—), 女, 讲师, 2013 年于中南大学攻读数学专业博士学位, 主要研究方向为计算机辅助几何设计。E-mail: yxh821011@aliyun.com

according to the definition mode of the standard Bézier curve. We then analyze the smooth connection conditions of the new curve. Considering these smooth connection conditions and by using a special definition mode, we construct a kind of piecewise composite curve. The connection of the control points between adjacent curve segments is apparently similar to that of the classical B-spline curve. However, the connections are actually different. The B-spline curve only has one edge between the control polygons of two adjacent curve segments, that is, only one control point is different. Nevertheless, the composite curve defined in this study only has one edge. Thus, only two control points are the same. **Result** The new curve defined by the new basis function has relatively simple and special smooth connection conditions. Two neighboring curves can be smoothly joined automatically as long as the last control edge of the former coincides with the first control edge of the latter. Furthermore, the degree of smoothness at the meeting point can be freely adjusted by simply changing the value of the parameter. The piecewise composite curve of the new curve possesses numerous desirable properties, such as geometric invariance, symmetry, automatic smoothness property, and local control capability similar to that of the classical B-spline curve. However, the main difference between the newly defined piecewise curve and the standard B-spline curve is that in the new composite curve, each segment can be defined by different numbers of control points. By contrast, the number of segments must be equal for the usual B-spline curve. This difference is the main reason that the new piecewise curve has a stronger local control capability than the B-spline curve. Furthermore, a suitable parameter can enable the new composite curve to achieve the expected smoothness at each connection point. In addition, changing one control point can alter the shape of two curve segments. When the parameter of one curve segment is changed, only the shape of the current curve and the degree of smoothness at two connection points will change. **Conclusion** This study presents the general method to construct curves. This method can easily achieve a smooth connection. We further present the general method to construct composite curves. This method can achieve a smooth connection automatically.

Key words: curve design; Bézier curve; smooth stitching; piecewise combination; continuity

0 引言

在计算机辅助几何设计(CAGD)中,Bézier曲线一直占有重要地位。近年来,对Bézier曲线进行含参数的扩展引起了研究者的广泛关注。许多学者提出了具备Bernstein基函数的基本性质,但含一个或者多个参数新的基函数。例如:齐从谦等人^[1]通过将 $m = l(n-1) + 1$ 次Bernstein基函数重新分配给 $n+1$ 个函数,得到了一组含一个参数的多项式基函数,它包含 n 次Bernstein基函数。Wang等人^[2]在初始函数的基础上通过积分递推的方式构造了含一个参数的基函数,对任意次Bernstein基函数进行了扩展。刘植等人^[3]通过先将相邻的两个 $n+1$ 次Bernstein基函数进行线性组合,再将结果与 n 次Bernstein基函数重新进行线性组合,构造了以 n 次Bernstein基函数为特例,含多个形状参数的基函数。Han等人^[4]和Yang等人^[5]都构造了比较特殊的含 n 个参数的基函数,都推广了任意次的Bernstein基。通过将多项式的次数提升一次,在文献[6]中,吴晓勤等人给出了两组含一个参数的五次多项式基函数,它们都包含四次Bernstein基函数;在文献[7]中,吴晓勤给出了含一个参数的 $n+1$ 次多项式基函

数,它以 n 次Bernstein基函数为特例;而杭后俊等人^[8]则构造了含两个参数的四次多项式基函数,它以三次Bernstein基函数为特例。通过将多项式的次数提升两次,Yan等人^[9-10]构造了含一个参数的多项式基函数,扩展了任意次的Bernstein基函数;姜岳道等人^[11]则构造了含两个参数的多项式基函数,扩展了二次Bernstein基函数。而Qin等人^[12]则在保持多项式次数不变的条件下,引入多个形状参数,构造了任意次Bernstein基函数的扩展基。

文献[1-12]中定义的曲线有一个共同特点:它们在保留Bézier曲线基本性质的同时,都可以在不改变控制顶点的情况下,通过改变形状参数的值来调整形状。虽然如此,还是注意到,文献[1]中定义曲线有别于文献[2-12]中的曲线。文献[1-12]中的曲线都和Bézier曲线一样,具有端点插值、端边相切性。除此之外,文献[1]中的曲线还多了一个文献[2-12]中的曲线没有的特征:和一阶导矢一样,曲线在首末端点处的2至 l 阶导矢也都与端边平行, l 为曲线中的参数。正因为具备这种特征,文献[1]中提到:如果两条可调控Bézier曲线的控制顶点之间满足普通Bézier曲线的 G' 光滑拼接条件,则它们在公共连接点处直到 l 阶的导矢都共线,这对于拼接时要求较高阶光滑性的曲线造型十分方便。但文献

[1]中并未说明为什么可调控 Bézier 曲线会方便拼接。为此,这里从理论上证明了普通 Bézier 曲线的 G^1 光滑拼接条件恰好是可调控 Bézier 曲线的 G^1 光滑拼接条件。比较发现:对于普通 Bézier 曲线和大部分扩展 Bézier 曲线(如文献[2-12]中的曲线)而言,拼接时对光滑度的要求越高,条件就越复杂从而难以实现;但对于可调控 Bézier 曲线而言,只要选择恰当的参数 l ,便可以保证它在简单的条件下实现较高阶的光滑拼接。因此,这里从理论上解释了可调控 Bézier 曲线易于拼接的性质。

虽然可调控 Bézier 曲线的拼接条件比较简单,但它毕竟是 Bézier 型的曲线,用它来进行复杂曲线造型时始终都面临着光滑拼接的问题,而 B 样条曲线却可以轻松地解决这一问题。考虑到这一点,思考能否对可调控 Bézier 曲线进行改进,使之像 B 样条曲线一样可以自动实现光滑拼接?为此,在文献[1]中基函数的基础上构造了一组新的基函数,并定义了相应的曲线,分析了曲线的光滑拼接条件,根据条件给出了一种特殊的分段组合曲线的定义方式。不需要对控制顶点施加任何条件,这种分段组合曲线在各个连接点处自动光滑,而且从理论上讲,光滑度可以达到任意阶。注意到 B 样条曲线的自动光滑性实际上是有条件的,就是要求各条曲线段的次数(或者说阶、控制点数量)必须相等,否则同样会遇到像 Bézier 曲线一样的拼接问题。比如:若想用一条二次 B 样条曲线和一条三次 B 样条曲线来表达一个形状,首先就需要根据拼接要求计算两条曲线的控制顶点之间的关系。另外,作为分段组合曲线,B 样条曲线必然具有局部控制性,但其定义方式决定 B 样条曲线的局部控制能力与次数有关,而且随着次数的升高而减弱。比如:移动二次 B 样条曲线的一个控制顶点,至多只会改变 3 条曲线段的形状;但如果移动六次 B 样条曲线的一个控制顶点,则受影响的曲线段数量会升至 7 条。相比较而言:这里给出的分段组合曲线的自动光滑性是完全无条件的;其局部性是固定的,移动一个控制顶点,始终至多只会改变两条曲线段的形状;其含有控制形状和光滑度的局部参数。因此,这里定义的组合曲线不仅满足预期的自动光滑性,而且还具备很多方便应用的性质。

1 可调控 Bézier 基

首先介绍文献[1]中给出的基函数。文献[1]

中未给基函数命名,为了叙述方便,这里将其命名为可调控 Bézier 基,并将其记做 $\sigma_i(t;l)$ 以体现其中所含的参数 l 。

定义 1 对自变量 $t \in [0,1]$, 整数 $n \geq 2$, 参数 $l \in \mathbf{N}^+$, 称表达式

$$\begin{cases} \sigma_0(t;l) = B_{0,m}(t) \\ \sigma_i(t;l) = \sum_{k=(i-1)l+1}^{il} B_{k,m}(t), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \sigma_n(t;l) = B_{m,m}(t) \end{cases} \quad (1)$$

为含参数 l 的 n 阶可调控 Bézier 基,式中 $B_{k,m}(t)$ 为 m 次 Bernstein 基函数,且 $m = l(n-1) + 1$ 。

接下来列举可调控 Bézier 基的性质,并对它的端点导数值进行简单证明。

1)退化性。当参数 $l=1$ 时,有 $m=n$,此时 n 阶可调控 Bézier 基即 n 次 Bernstein 基函数。

2)非负性。当 $t \in [0,1]$ 时,对所有 $0 \leq i \leq n$,有 $\sigma_i(t;l) \geq 0$ 。

3)规范性。对整数 $n \geq 2$,有 $\sum_{i=0}^n \sigma_i(t;l) = 1$ 。

4)对称性。当 $t \in [0,1]$ 时,对所有 $0 \leq i \leq n$,有 $\sigma_i(t;l) = \sigma_{n-i}(1-t;l)$ 。

5)端点函数值。对整数 $n \geq 2$ 及 $0 \leq i \leq n$,有

$$\begin{cases} \sigma_0(0;l) = \begin{cases} 1 & i=0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases} \\ \sigma_0(1;l) = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ 1 & i=n \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

6)端点导数值。当 $1 \leq j \leq l$ 时,对整数 $n \geq 2$ 以及 $0 \leq i \leq n$,有

$$\begin{cases} \sigma_i^{(j)}(0;l) = \begin{cases} (-1)^j \frac{m!}{(m-j)!} & i=0 \\ (-1)^{j-1} \frac{m!}{(m-j)!} & i=1 \\ 0 & i \neq 0,1 \end{cases} \\ \sigma_i^{(j)}(1;l) = \begin{cases} 0 & i \neq n-1, n \\ -\frac{m!}{(m-j)!} & i=n-1 \\ \frac{m!}{(m-j)!} & i=n \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

证明 由式(1)易知当 $2 \leq i \leq n$ 时, $\sigma_i(t;l)$ 均可写成 $\sigma_i(t;l) = f(t)g(t)$ 的形式,其中 $f(t) = t^{l+1}$, $g(t)$ 为多项式函数。由于对 $0 \leq j \leq l$,有 $f^{(j)}(0) = 0$,所以

由莱布尼茨公式可知, 当 $1 \leq j \leq l$ 时, 对 $2 \leq i \leq n$, 有

$$\sigma_i^{(j)}(0; l) = 0 \quad (4)$$

又由 Bernstein 基函数的性质可知

$$\sigma_0^{(j)}(0; l) = B_{0,m}^{(j)}(0) = (-1)^j \frac{m!}{(m-j)!} \quad (5)$$

再由 $\sum_{i=0}^n \sigma_i(t; l) = 1$ 可知

$$\sum_{i=0}^n \sigma_i^{(j)}(0; l) = 0 \quad (6)$$

故由式(4)~(6)可知

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(j)}(0; l) &= -\sigma_0^{(j)}(0; l) = \\ &(-1)^{j-1} \frac{m!}{(m-j)!} \end{aligned} \quad (7)$$

式(4)(5)(7)给出了式(3)中关于 $t=0$ 的结论。

再由 $\sigma_i(t; l) = \sigma_{n-i}(1-t; l)$ 可知 $\sigma_i^{(j)}(t; l) = (-1)^j \sigma_{n-i}^{(j)}(1-t; l)$, 故

$$\sigma_i^{(j)}(1; l) = (-1)^j \sigma_{n-i}^{(j)}(0; l) \quad (8)$$

由式(4)(5)(7)(8)可得式(3)中关于 $t=1$ 的结论。证毕。

2 可调控 Bézier 曲线

2.1 曲线的定义

定义2 给定 $n+1$ 个控制顶点 $V_i \in \mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$,

其中, $i=0, 1, \dots, n, n \geq 2$, 以及 $l \in \mathbf{N}^+$, 称

$$a(t) = \sum_{i=0}^n \sigma_i(t; l) V_i, t \in [0, 1]$$

为含参数 l 的 n 阶可调控 Bézier 曲线, 其中 $\sigma_i(t; l)$ 为含参数 l 的 n 阶可调控 Bézier 基。

由可调控 Bézier 基的性质, 易知可调控 Bézier 曲线具有凸包性、几何不变性与仿射不变性、对称性。另外, 在曲线的端点处有

$$a(0) = V_0, a(1) = V_n \quad (9)$$

当 $1 \leq j \leq l$ 时, 有

$$\begin{cases} a^{(j)}(0) = (-1)^{j-1} \frac{m!}{(m-j)!} (V_1 - V_0) \\ a^{(j)}(1) = \frac{m!}{(m-j)!} (V_n - V_{n-1}) \end{cases} \quad (10)$$

2.2 曲线的拼接

分析可调控 Bézier 曲线的光滑拼接条件。在这之前, 先给出一个引理。

引理1 设 $t \in [0, 1]$, 假设两条曲线 $f(t)$ 与 $g(t)$ 在 $f(1) = g(0)$ 处相连, 如果当 $1 \leq j \leq l$ 时

$$\begin{cases} f^{(j)}(1) = F_j (V_b - V_a) \\ g^{(j)}(0) = (-1)^{j-1} G_j (V_b - V_a) \end{cases} \quad (11)$$

式中, F_j 和 G_j 是与 j 有关的常数, 并且 $F_1 G_1 > 0$, 则两条曲线在连接点处 G^l 连续。

证明 要使两条曲线在公共连接点处 G^l 连续, 必须^[13]

$$\begin{pmatrix} g'(0) \\ g''(0) \\ g'''(0) \\ g^{(4)}(0) \\ \vdots \\ g^{(l)}(0) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} f'(1) \\ f''(1) \\ f'''(1) \\ f^{(4)}(1) \\ \vdots \\ f^{(l)}(1) \end{pmatrix} \quad (12)$$

式(12)中的关联矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & & \\ \beta_2 & \beta_1^2 & & & \\ \beta_3 & 3\beta_1\beta_2 & \beta_1^3 & & \\ \beta_4 & 4\beta_1\beta_3 + 3\beta_2^2 & 6\beta_1^2\beta_2 & \beta_1^4 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_l & \dots & \dots & \dots & \beta_1^l \end{pmatrix}$$

式中, $\beta_1 > 0$ 。将式(11)代入式(12)并约掉等式两边的公共部分 $V_b - V_a$, 得到

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ -G_2 \\ G_3 \\ -G_4 \\ \vdots \\ (-1)^{l-1} G_l \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \vdots \\ F_l \end{pmatrix} \quad (13)$$

显然由式(13)可以求出 $\beta_i (1 \leq i \leq l)$ 的唯一解, 并且

$\beta_1 = \frac{G_1}{F_1} > 0$, 因此两条曲线 G^l 连续。证毕。

由式(9)(10)和引理1可得到下面的结论。

定理1 设有含参数 l_1 的 n_1 阶可调控 Bézier 曲线

$$a_1(t) = \sum_{i=0}^{n_1} \sigma_i(t; l_1) V_i, t \in [0, 1] \quad (14)$$

以及含参数 l_2 的 n_2 阶可调控 Bézier 曲线

$$a_2(t) = \sum_{i=0}^{n_2} \sigma_i(t; l_2) V_i^*, t \in [0, 1] \quad (15)$$

若

$$\begin{cases} V_0^* = V_{n_1} & \text{条件1} \\ V_1^* - V_0^* = C(V_{n_1} - V_{n_1-1}) (C > 0) & \text{条件2} \end{cases} \quad (16)$$

则两条曲线在连接点处 G^l 连续, 这里 $l = \min\{l_1, l_2\}$ 。

证明 由式(9)(14)(15)可得

$$\mathbf{a}_1(1) = \mathbf{V}_{n_1}, \mathbf{a}_2(0) = \mathbf{V}_0^*$$

在式(16)中条件1下,有

$$\mathbf{a}_1(1) = \mathbf{a}_2(0) \quad (17)$$

因此两曲线位置连续。又由式(10)(14)(15)可得当 $1 \leq j \leq l_1$ 时,有

$$\mathbf{a}_1^{(j)}(1) = \frac{m_1!}{(m_1-j)!} (\mathbf{V}_{n_1} - \mathbf{V}_{n_1-1}) \quad (18)$$

当 $1 \leq j \leq l_2$ 时,有

$$\mathbf{a}_2^{(j)}(0) = (-1)^{j-1} \frac{m_2!}{(m_2-j)!} (\mathbf{V}_1^* - \mathbf{V}_0^*)$$

这里 $m_i = l_i(n_i - 1) + 1$ ($i = 1, 2$), 在式(16)中条件2下,有

$$\mathbf{a}_2^{(j)}(0) = (-1)^{j-1} \frac{m_2!}{(m_2-j)!} \times C(\mathbf{V}_{n_1} - \mathbf{V}_{n_1-1}) \quad (19)$$

记 $l = \min\{l_1, l_2\}$, 则当 $1 \leq j \leq l$ 时, 式(18)(19)同时成立。记 $F_j = \frac{m_1!}{(m_1-j)!}$, $G_j = \frac{m_2!}{(m_2-j)!} C$, 则当 $1 \leq j \leq l$ 时,有

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1^{(j)}(1) = F_j(\mathbf{V}_{n_1} - \mathbf{V}_{n_1-1}) \\ \mathbf{a}_2^{(j)}(0) = (-1)^{j-1} G_j(\mathbf{V}_{n_1} - \mathbf{V}_{n_1-1}) \end{cases} \quad (20)$$

并且注意到 $F_1 G_1 = m_1 m_2 C > 0$, 故在式(16)所给条件下, 从式(17)(20)可知曲线 $\mathbf{b}_1(t)$ 与 $\mathbf{b}_2(t)$ 满足引理1的条件, 因此两者 G^l 连续。证毕。

因为 l 可以取任意正整数, 所以在式(16)所给条件下, 总可以通过选择合适的 l 值来使相邻曲线之间达到任意阶几何连续。

2.3 曲线设计

接下来分析: 对于给定的控制多边形, 如何构造一条通过首末控制顶点的光滑组合可调控 Bézier 曲线。

首先考虑最简单的情形, 假设控制多边形有 $L = d(n-1) + 1$ ($d \geq 2$) 条边, 控制顶点为 $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_L$, 欲构造一条由 d 段 n 阶可调控 Bézier 曲线构成的组合曲线。

为实现目标, 可先在第 $i(n-1) + 1$ ($i = 1, 2, \dots, d-1$) 条边上任取一点, 特殊的, 取边的中点, 记做 $\mathbf{M}_i$ ($i = 1, 2, \dots, d-1$)。另外, 记 $\mathbf{M}_0 = \mathbf{V}_0, \mathbf{M}_d = \mathbf{V}_L$ 。然后依次用多边形 $\mathbf{M}_{i-1} \mathbf{V}_{(i-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{V}_{i(n-1)}$ 定义第 i 段曲线即可, 这里 $i = 1, 2, \dots, d$ 。这样得到的组合曲线至少 G^1 连续, 可以通过设置不同

曲线段的参数 l_i ($i = 1, 2, \dots, d$) 来达到预期的光滑度。

上述方法构造出的组合曲线的每一段都同阶, 或者说每一段都由相同数量的控制边定义, 当然我们可以去掉这一限制。

假设多边形有 $L = \sum_{i=1}^d n_i - d + 1$ ($d, n_i \geq 2$) 条边, 现欲构造由 d 条曲线段构成的组合曲线, 其中第 i 条曲线段为 n_i 阶可调控 Bézier 曲线, 则可先取第

$\sum_{s=1}^i n_s - i + 1$ 条边的中点 $\mathbf{M}_i$, 这里 $i = 1, 2, \dots, d-1$, 并记 $\mathbf{M}_0 = \mathbf{V}_0, \mathbf{M}_d = \mathbf{V}_L$ 。再用多边形

$$\mathbf{M}_{i-1} \mathbf{V}_{\sum_{s=1}^{i-1} (n_s-1)+1} \dots \mathbf{V}_{\sum_{s=1}^i (n_s-1)} \mathbf{M}_i$$

定义第 i ($i = 1, 2, \dots, d$) 段曲线即可 (当 $i = 1$ 时, 记 $\sum_{s=1}^{i-1} (n_s - 1) = 0$)。

图1、图2给出了由相同控制多边形按上述

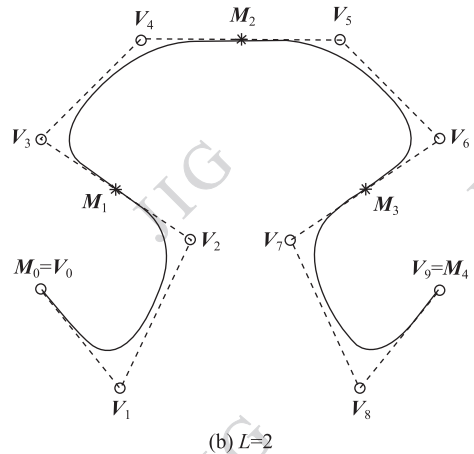
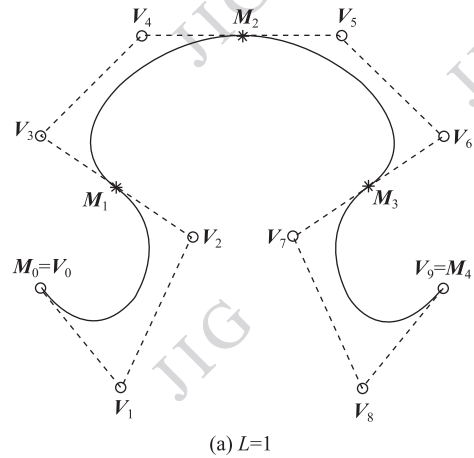


图1 各段阶相等的组合可调控 Bézier 曲线

Fig. 1 Composite modifiable Bézier curves with equal orders of each curve segment

方法定义的组合曲线, 图中 $V_0, V_1, \dots, V_9$ 为原始控制顶点。图 1 中的组合曲线包含 4 段 3 阶可调控 Bézier 曲线, 其中 M_1, M_2, M_3 为新增控制顶点。图 2 中的组合曲线包含 3 段可调控 Bézier 曲线, 阶分别为 3、4、3, 其中 M_1, M_2 为新增控制顶点。图 1(a)、图 2(a) 中各条曲线段均取参数 $l=1$, 这时每一段都是普通 Bézier 曲线, 整条曲线在连接点处 G^1 连续。图 1(b)、图 2(b) 中各条曲线段均取参数 $l=2$, 整条曲线在连接点处 G^2 连续。

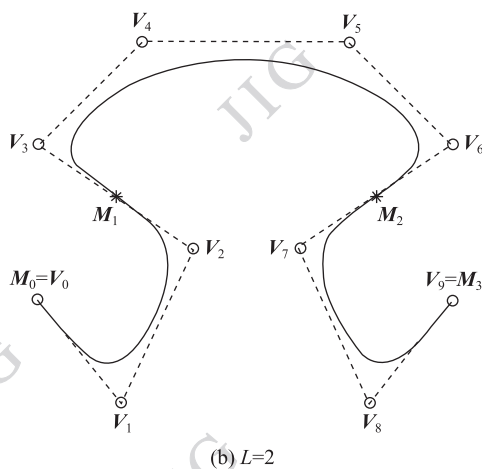
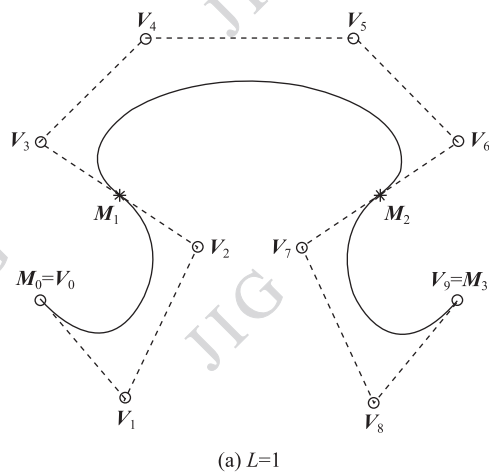


图 2 各段阶不全相等的组合可调控 Bézier 曲线

Fig. 2 Composite modifiable Bézier curves with not all equal orders of each curve segment

3 可调控 Bézier 曲线的改进

对于给定的控制顶点, 要想由之构造光滑的组合可调控 Bézier 曲线, 必须先增加一些辅助控制点。

由此思考: 能否跳过这一过程, 使得可以像 B 样条方法一样, 无需对控制顶点做任何预处理, 就能构造自动光滑的组合曲线? 曲线的性质取决于所采用的基函数的性质, 所以为了实现预期目标, 需要先对可调控 Bézier 基进行改进。

3.1 可调控 Bézier 基的改进

定义 3 对自变量 $t \in [0, 1]$, 整数 $n \geq 2$, 参数 $l \in \mathbf{N}^+$, 定义

$$[b_0(t; l), b_1(t; l), \dots, b_n(t; l)]^T = A_{(n+1) \times (n+1)} [\sigma_0(t; l), \sigma_1(t; l), \dots, \sigma_n(t; l)]^T \quad (21)$$

式中, $\sigma_i(t; l)$ ($i=0, 1, \dots, n$) 为含参数 l 的 n 阶可调控 Bézier 基, $b_i(t; l)$ ($i=0, 1, \dots, n$) 为含参数 l 的 n 阶改进可调控 Bézier 基。变换矩阵为

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_{(n+1) \times (n+1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (n \geq 3) \quad (22)$$

由式 (21) (22) 以及可调控 Bézier 基的性质, 易知改进可调控 Bézier 基同样具有非负性、规范性、对称性。另外, 对所有整数 $n \geq 2$ 以及 $0 \leq i \leq n$, 有

$$b_i(0; l) = \begin{cases} \frac{1}{2} & i = 0, 1 \\ 0 & i \neq 0, 1 \end{cases}$$

$$b_i(1; l) = \begin{cases} 0 & i \neq n-1, n \\ \frac{1}{2} & i = n-1, n \end{cases}$$

当 $1 \leq j \leq l$ 时, 有

$$b_i^{(j)}(0;l) = \begin{cases} (-1)^j \frac{m!}{2(m-j)!} & i = 0 \\ (-1)^{j-1} \frac{m!}{2(m-j)!} & i = 1 \\ 0 & i \neq 0, 1 \end{cases}$$

$$b_i^{(j)}(1;l) = \begin{cases} 0 & i \neq n-1, n \\ -\frac{m!}{2(m-j)!} & i = n-1 \\ \frac{m!}{2(m-j)!} & i = n \end{cases}$$

3.2 曲线的拼接

定义4 给定 $n+l$ 个控制顶点 $V_i \in \mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$, $i=0, 1, \dots, n, n \geq 2$, 以及 $l \in \mathbf{N}^+$, 称

$$b(t) = \sum_{i=0}^n b_i(t;l) V_i, t \in [0, 1]$$

为含参数 l 的 n 阶改进可控 Bézier 曲线, 其中 $b_i(t;l)$ 为含参数 l 的 n 阶改进可控 Bézier 基。

易知改进可控 Bézier 曲线具有凸包性、几何不变性与仿射不变性、对称性。另外, 在曲线的端点处有

$$b(0) = \frac{1}{2}(V_0 + V_1)$$

$$b(1) = \frac{1}{2}(V_{n-1} + V_n)$$
(23)

当 $1 \leq j \leq l$ 时, 有

$$b^{(j)}(0) = (-1)^{j-1} \frac{m!}{2(m-j)!} (V_1 - V_0)$$

$$b^{(j)}(1) = \frac{m!}{2(m-j)!} (V_n - V_{n-1})$$
(24)

根据式(23)(24), 并采用与定理1相同的证明方法, 可以得到下面的结论。

定理2 设有含参数 l_1 的 n_1 阶改进可控 Bézier 曲线

$$b_1(t) = \sum_{i=0}^{n_1} b_i(t;l_1) V_i, t \in [0, 1]$$

以及含参数 l_2 的 n_2 阶改进可控 Bézier 曲线

$$b_2(t) = \sum_{i=0}^{n_2} b_i(t;l_2) V_i^*, t \in [0, 1]$$

若

$$V_0^* = V_{n_1-1}, V_1^* = V_{n_1} \quad (25)$$

则两条曲线在连接点处 G^l 连续, 这里 $l = \min\{l_1, l_2\}$ 。

3.3 曲线设计

由条件式(25)可知: 对于两条改进可控

Bézier 曲线而言, 只要前一条曲线的控制多边形的末边与后一条曲线的控制多边形的首边重合, 这两条曲线在连接点处便可达到 G^l 光滑拼接。根据这一特点, 对于任意给定的一组控制顶点, 可以采用特殊的方式来定义由改进可控 Bézier 曲线构成的分段组合曲线, 使之在分段连接点处自动实现光滑拼接。

定义5 给定控制顶点 $V_k \in \mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$, 其中 $k =$

$0, 1, \dots, \sum_{i=1}^d n_i - d + 1; d \geq 1; n_i \geq 2$, 以及参数 $l_i \in \mathbf{N}^+, i = 1, 2, \dots, d$, 可以定义由 d 条改进可控 Bézier 曲线构成的分段组合曲线, 第 i 条曲线定义为

$$b_i(t) = \sum_{j=0}^{n_i} b_j(t;l_i) V_{j+\sum_{s=1}^{i-1} (n_s-1)}, t \in [0, 1], \text{ 其中 } i = 1, 2, \dots, d, \text{ 当 } i=1 \text{ 时, } \sum_{s=1}^{i-1} (n_s-1) = 0.$$

注意到定义5中相邻曲线段的控制顶点之间的关系, 由定理2可知, 第 i 条与第 $i+1$ 条曲线在公共连接点处 $G^{\min\{l_i, l_{i+1}\}}$ 连续。

定义5中分段曲线的组合方式不同于传统的 B 样条曲线。在 B 样条曲线中, 相邻曲线段之间只有一条控制边或者说一个控制顶点不相同; 但在这里, 相邻曲线段之间只有一条控制边或者说两个控制顶点相同。和 B 样条曲线一样, 这里的分段组合曲线也具有局部控制性。但因为定义方式的不同, 在这里, 移动一个控制顶点总是至多只会改变两条相邻曲线段的形状。所以很显然, 这里给出的组合曲线的局部控制能力优于传统的 B 样条曲线。另外, 这里的组合曲线含有局部参数 l_i , 改变其值可以调整第 i 段曲线的形状, 以及第 i 段与左右邻段之间拼接的光滑度。

图3、图4给出了由相同控制多边形定义的组合曲线。图3中的组合曲线包含4段3阶改进可控 Bézier 曲线, 图4中包含3段阶分别为3、4、3的改进可控 Bézier 曲线。图3(a)、图4(a)中各条曲线段均取参数 $l=1$, 整条曲线在连接点处 G^1 连续。图3(b)、图4(b)中各条曲线段均取参数 $l=2$, 整条曲线在连接点处 G^2 连续。

从式(23)和图3、图4可以看出, 改进可控 Bézier 曲线插值于控制多边形首末边的中点而非首末控制顶点。但在曲线设计中, 常常要求曲线经过控制多边形的首末顶点, 为了满足这一需求, 只需将首末控制顶点取成重复的即可。

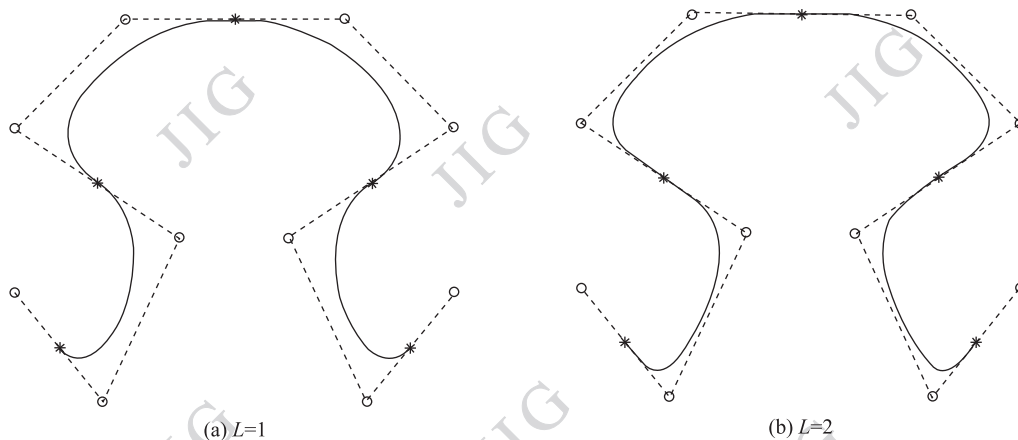


图3 各段阶相等的组合改进可调控 Bézier 曲线

Fig. 3 Composite improved modifiable Bézier curves with equal orders of each curve segment

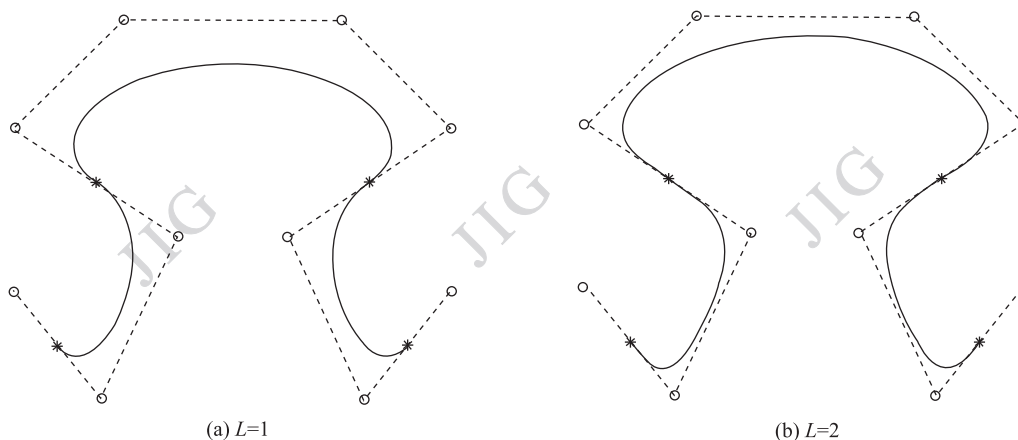


图4 各段阶不全相等的组合改进可调控 Bézier 曲线

Fig. 4 Composite improved modifiable Bézier curves with not all equal orders of each curve segment

4 结 论

引理1给出了位置连续的曲线 G^l 连续的一个充分条件,根据该条件,只要曲线在首、末端点处的前 l 阶导矢分别共线(式(10)),曲线的 G^l 条件就和普通 Bézier 曲线的 G^l 条件完全一样。而对于基函数而言,在定义区间左、右端点处的前 l 阶导数只在前、后两个基函数处不为零(式(3)),是决定曲线具备式(10)所述端点性质的一个充分条件。因此这里实际上给出了构造易拼接曲线的一个通用方法,就是构造具备式(3)所述特点的基函数。若基函数在端点处的函数值满足式(2)所述特点,则可按照3.3中所给方法构造通过首末控制顶点的平滑组合曲线,这时需添加一些辅助控制顶点;若希望组合曲线自动光滑,则只需按式(21)对基函数稍加改造即可。

由改进可调控 Bézier 曲线按照定义5的方式形

成的组合曲线具有很多优点:1)不管定义各条曲线段的控制顶点数量是否相等,曲线在各个连接点处始终光滑,而且光滑度可以任意调整;2)曲线具有比B样条曲线更强的局部控制能力,改变一个控制顶点,始终只会至多改变两条曲线段的形状;3)曲线具有同时控制着其形状和光滑度的调节参数,且参数的改变造成的影响是局部的。

本文的研究为复杂曲线的设计提供了方便,特别是对光滑度要求较高的场合,本文方法更能体现其优势。

参考文献 (References)

- [1] Qi C Q, Wu H Y. A class of modifiable Bézier curves and its approximation[J]. Journal of Hunan University, 1996, 23 (6): 15-19. [齐从谦, 邬弘毅. 一类可调控 Bézier 曲线及其逼近性[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 1996, 23 (6): 15-19.]

- [2] Wang W T, Wang G Z. Bézier curves with shape parameter [J]. Journal of Zhejiang University SCIENCE, 2005, 6A (6): 497-501.
- [3] Liu Z, Chen X Y, Jiang P. A class of generalized Bézier curves and surfaces with multiple shape parameters [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2010, 22(5): 838-844. [刘植, 陈晓彦, 江平. 带多形状参数的广义 Bézier 曲线曲面 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2010, 22(5): 838-844.]
- [4] Han X A, Ma Y C, Huang X L. A novel generalization of Bézier curve and surface [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 217 (1): 180-193.
- [5] Yang L Q, Zeng X M. Bézier curves and surfaces with shape parameters [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2009, 86 (7): 1253-1263.
- [6] Wu X Q, Han X L, Luo S M. Two different extensions of quartic Bézier curve [J]. Journal of Engineering Graphics, 2006, 27(5): 15-19. [吴晓勤, 韩旭里, 罗善明. 四次 Bézier 曲线的两种不同扩展 [J]. 工程图学学报, 2006, 27 (5): 15-19.]
- [7] Wu X Q. Bézier curves with shape parameter [J]. Journal of Image and Graphics, 2006, 11 (2): 269-274. [吴晓勤. 带形状参数的 Bézier 曲线 [J]. 中国图象图形学报, 2006, 11 (2): 269-274.]
- [8] Hang H J, Yu J, Li W G. Two parameters extension of cubic Bézier curve and its applications [J]. Computer Engineering and Applications, 2010, 46 (31): 178-181. [杭后俊, 余静, 李汪根. 三次 Bézier 曲线的一种双参数扩展及应用 [J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(31): 178-181.]
- [9] Yan L L, Liang J F. An extension of the Bézier model [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218 (6): 2863-2879.
- [10] Yan L L, Wu G G. An new extension of Bézier method [J]. Journal of Hefei University of Technology, 2013, 36 (5): 625-631. [严兰兰, 邬国根. Bézier 方法的新扩展 [J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2013, 36(5): 625-631.]
- [11] Jiang Y D, Zhi W, Bai G Z. Elevating secondary extension with the two shape parameter Bézier curve [J]. Computer engineering & science, 2012, 34(5): 112-115. [姜岳道, 植物, 白根柱. 双参数 Bézier 曲线的升二次扩展 [J]. 计算机工程与科学, 2012, 34(5): 112-115.]
- [12] Qin X Q, Hu G, Zhang N J, et al. A novel extension to the polynomial basis functions describing Bézier curves and surfaces of degree n with multiple shape parameters [J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 223 (5): 1-16.
- [13] Shi F Z. Computer-aided geometric design and non-uniform rational B-spline [M]. Beijing: Higher Education Press, 2001: 178-182. [施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 178-182.]