



JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS

主办: 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

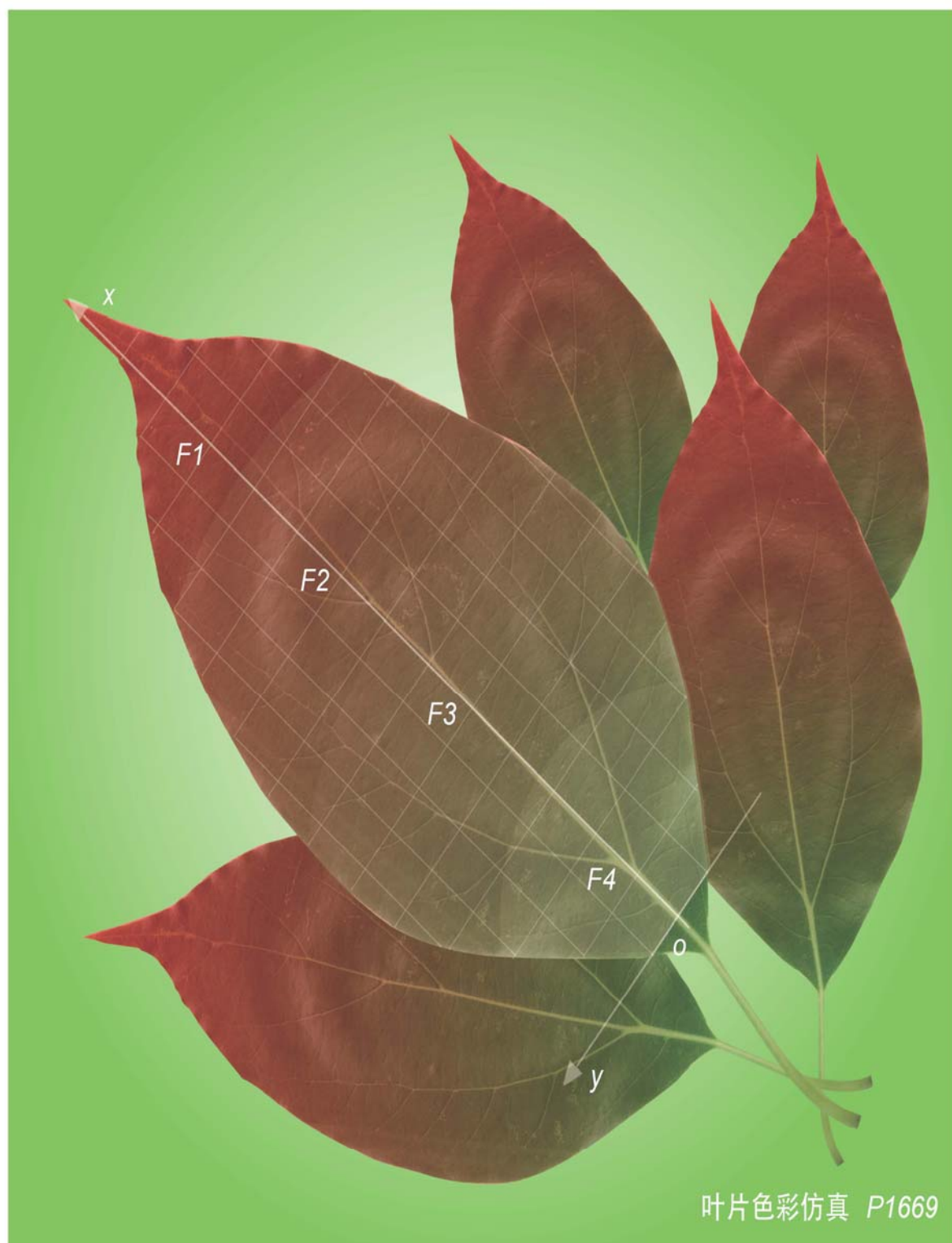
2014

11

VOL.19

ISSN1006-8961

CN11-3758/TB



叶片色彩仿真 P1669



第19卷第11期（总第223期）

2014年11月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院

主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

主 编 李小文

编辑出版《中国图象图形学报》编辑出版委员会

邮政信箱 北京9718信箱

邮 编 100101

电子信箱 jig@irsa.ac.cn

电 话 010-64807995

网 址 www.cjig.cn

广告经营许可证 京朝工商广字第0361号

总 发 行 北京报刊发行局

订 购 全国各地邮局

海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司
(邮政信箱：北京399信箱 邮编：100048)

印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian

Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences

Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS
China Society of Image and Graphics

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

Editor-in-Chief LI Xiaowen

Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of
Image and Graphics

P.O.Box 9718, Beijing, P.R.China

Zip code 100101

E-mail jig@irsa.ac.cn

Telephone 010-64807995

Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals

Domestic All Local Post Offices in China

Overseas China International Book Trading Corporation
(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China))

Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

CN 11-3758/TB

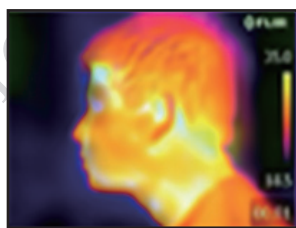
ISSN 1006-8961

CODEN ZTTXFZ

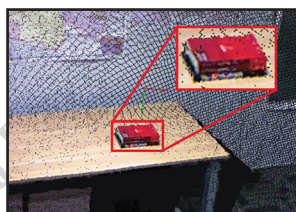
国外发行代号 M1406

国内邮发代号 82-831

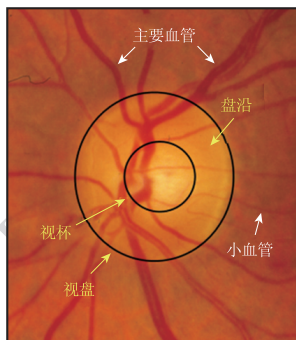
国内定价 50.00元



红外热像视频的细微变化放大(第1577页)



Kinect传感器的彩色和深度相机标定(第1584页)



多相主动轮廓模型的眼底图像杯盘分割(第1604页)

综述

多媒体技术研究: 2013——面向智能视频监控的视觉感知与处理

黄铁军, 郑锦, 李波, 傅慧源, 马华东, 薛向阳, 姜育刚, 于俊清 1539

图像处理和编码

基于高阶奇异值分解和均方差迭代的图像去噪

胡文锐, 谢源, 张文生 1563

小波域中双稀疏的单幅图像超分辨

杨波, 吴纪桃, 谢晓振 1570

红外热像视频的细微变化放大

付传卿, 谷小婧, 顾幸生 1577

图像理解和计算机视觉

Kinect传感器的彩色和深度相机标定

郭连朋, 陈向宁, 刘彬 1584

空间统一调制模型的轮廓检测

肖洁, 蔡超, 郭照立 1591

图像分析和识别

结合相似性拟合与空间约束的图像分割

张峥嵘, 詹天明, 韦志辉 1596

多相主动轮廓模型的眼底图像杯盘分割

郑嫻, 范慧杰, 唐延东, 王琰 1604

精确局部特征描述的表情识别

胡敏, 江河, 王晓华, 陈红波, 李堃, 任福继 1613

Gabor小波和改进LBP的零件表面粗糙度识别

胡海锋, 陈苏婷 1623

可扩展的花卉种类识别

苗金泉, 曹卫群 1630

医学图像处理

基于提升小波变换的医学图像融合

李俊峰, 姜晓丽, 戴文战 1639

遥感图像处理

基于压缩感知的SAR图像鲁棒编码传输

侯兴松, 田文文, 龚晨 1649

第11届全国智能CAD与数字娱乐学术会议专栏

大规模DVE场景对等传输机制研究新进展

王明飞, 贾金原, 张晨曦 1657

自然环境下的植物叶片智能色彩推理仿真

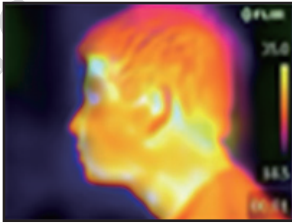
宋建文, 邱锦明 1669

3个控制顶点的类三次Bézier螺线

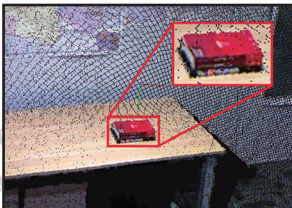
高晖, 寿华好, 缪永伟, 王丽萍 1677

CONTENTS

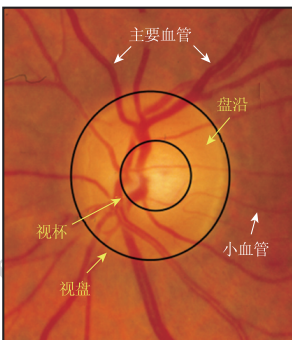
JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Magnifying imperceptible variations in infrared thermal videos(P1577)



Calibration of Kinect sensor with depth and color camera (P1584)



Automatic segmentation of optic disc and cup using multiphase active contour model in fundus images(P1604)

Review

Visual perception and processing for intelligent video surveillance:a review

Huang Tiejun, Zheng Jin, Li Bo, Fu Huiyuan, Ma Huadong, Xue Xiangyang, Jiang Yugang, Yu Junqing

1539

Image Processing and Coding

Image denoising based on high order singular value decomposition and mean square error iteration

Hu Wenrui, Xie Yuan, Zhang Wensheng

1563

Single image super-resolution in wavelet domain with double sparse

Yang Bo, Wu Jitao, Xie Xiaozhen

1570

Magnifying imperceptible variations in infrared thermal videos

Fu Chuanqing, Gu Xiaojing, Gu Xingsheng

1577

Image Understanding and Computer Vision

Calibration of Kinect sensor with depth and color camera

Guo Lianpeng, Chen Xiangning, Liu Bin

1584

Contour detection based on spatially unified modulation model

Xiao Jie, Cai Chao, Guo Zhaoli

1591

Image Analysis and Recognition

Image segmentation by integrating similarity fitting and spatial constraint

Zhang Zhengrong, Zhan Tianming, Wei Zhihui

1596

Automatic segmentation of optic disc and cup using multiphase active contour model in fundus images

Zheng Shan, Fan Huijie, Tang Yandong, Wang Yan

1604

Precise local feature description for facial expression recognition

Hu Min, Jiang He, Wang Xiaohua, Chen Hongbo, Li Kun, Ren Fuji

1613

Recognition of work piece surface roughness based on Gabor wavelet and improved LBP

Hu Haifeng, Chen Suting

1623

The scalable flowers category recognition

Miao Jinqun, Cao Weiqun

1630

Medical Image Processing

Medical image fusion based on lifting wavelet transform

Li Junfeng, Jiang Xiaoli, Dai Wenzhan

1639

Remote Sensing Image Processing

Robust coding transmission for SAR image based on compressive sensing

Hou Xingsong, Tian Wenwen, Gong Chen

1649

Column of CIDE' 2014

Survey on transmission mechanism of large scale DVE scene based on P2P overlay network

Wang Mingfei, Jia Jinyuan, Zhang Chenxi

1657

Intelligent color reasoning simulation of plant leaf based on the natural environment

Song Jianwen, Qiu Jinming

1669

The quasi-cubic Bézier spirals with three control points

Gao Hui, Shou Huahao, Miao Yongwei, Wang Liping

1677

中图法分类号: TP391.7 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2014)11-1677-07

论文引用格式: Gao H, Shou H H, Miao Y W, Wang L P. The quasi-cubic Bézier spirals with three control points, 2014, 19(11): 1677-1683. [高晖, 寿华好, 缪永伟, 王丽萍. 3 个控制顶点的类三次 Bézier 螺线[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(11): 1677-1683.] [DOI: 10. 11834/jig. 20141116]

3 个控制顶点的类三次 Bézier 螺线

高晖¹, 寿华好¹, 缪永伟², 王丽萍³

1. 浙江工业大学理学院, 杭州 310023; 2. 浙江工业大学计算机科学与技术学院, 杭州 310023;
 3. 浙江工业大学经贸管理学院, 杭州 310023

摘要: **目的** 为了使得过渡曲线的设计更为简单高效。提出基于 3 个控制顶点的类三次 Bézier 螺线。**方法** 通过对基函数的研究首先构造了 3 条在一定条件下曲率单调递减的类三次 Bézier 曲线, 并由参数的对称性得另 3 条曲率单调递增的曲线。它们具有端点性、凸包性、几何不变性等三次 Bézier 曲线的基本性质, 特点是只有 3 个控制顶点。接着严格地证明了此类曲线曲率单调的充分条件。**结果** 有两条曲线比三次 Bézier 曲线的曲率单调条件范围大, 且类三次 Bézier 螺线与三次 Bézier 螺线存在一定的位置关系。这 6 条曲线中有 4 条曲线的一个端点处曲率为零, 可组合成 4 对类三次 Bézier 螺线来构造两圆弧间半径比例不受限制的 S 型和 C 型 G^2 连续过渡曲线; 剩下的两条曲线在两圆弧半径相差较大的情况下都可做不含曲率极值点的过渡曲线。最后用实例表明了此类曲线的有效性。**结论** 在过渡曲线设计中基于 3 个控制顶点的类三次 Bézier 螺线比三次 Bézier 螺线更为简单高效。

关键词: 三次 Bézier 曲线; 类三次 Bézier 曲线; 曲率单调; G^2 连续; 过渡曲线

The quasi-cubic Bézier spirals with three control points

Gao Hui¹, Shou Huahao¹, Miao Yongwei², Wang Liping³

1. College of Science, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China
 2. College of Computer Science and Technology, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China
 3. College of Business and Administration, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China

Abstract: **Objective** This study aims to design a simple and effective transition curve. **Method** First, three quasi-cubic Bézier curves with monotone decreasing curvature are constructed after studying the base functions. Three other quasi-cubic Bézier curves with monotone increasing curvature are then obtained by parameter symmetry. These new curves have similar properties with the cubic Bézier curves, including endpoint, convex hull, and geometry invariability properties. However, unlike the cubic Bézier curves, the quasi-cubic Bézier curves only have three control points. We then provide strict mathematical proofs in relation to the sufficient conditions of the monotone curvature of these curves. **Result** Two of the quasi-cubic Bézier curves covered a broader scope than the cubic Bézier curves with monotone curvature. The specific positional relationship between the quasi-cubic Bézier spiral curves and the cubic Bézier spiral curves were determined. Four of the six quasi-cubic Bézier curves had zero curvature at one endpoint and can therefore be combined into four pairs of S-shaped or C-shaped transition curves for separated circles; the ratio of two radii had no restriction. The remaining two quasi-cubic Bézier curves can be used to form a single transition curve with no curvature extreme for separated circles when the difference of two radii is large. Finally, examples were given to show the effectiveness of these curves. **Conclusion** In transition

收稿日期: 2014-03-20; 修回日期: 2014-06-27

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61272309, 61472366)

第一作者简介: 高晖 (1988—), 男, 浙江工业大学理学院应用数学专业硕士研究生, 主要研究方向为计算机辅助几何设计与图形学。

E-mail: huigao0813@163.com

通信作者: 寿华好, E-mail: shh@zjut.edu.cn

curve design, the quasi-cubic Bézier spiral curve with three control points is more simple and effective than the cubic Bézier spiral curve.

Key words: cubic Bézier curve; quasi-cubic Bézier curve; curvature monotony; G^2 continuity; transition curve

0 引言

曲线的曲率单调变化(monotone curvature variation)是指曲率单调递增或单调递减,它与曲线的几何连续性、光顺性等密切相关。开展曲率单调性方面的研究有利于进一步认识曲线的性质,并为光顺性理论奠定基础。由于 G^2 连续过渡曲线要求曲率单调,即使无法保证曲率单调,一般也要求尽可能地减少曲率极值点,使得曲线整体较为广顺。 G^2 连续过渡曲线常用于两圆弧的光滑拼接,在计算机辅助设计(CAD)、工业数控加工、道路线形设计和机器人行走轨迹等领域都有重要应用,因此对过渡曲线的研究具有十分重要的意义。

关于曲线曲率的单调性,国内外学者做了很多的研究。如文献[1-3]分别对二次 Bézier 曲线、二次有理 Bézier 曲线、二次有理 B 样条曲线的曲率单调性进行了研究,得到了曲率单调的充分必要条件;文献[4]对平面均匀有理 B 样条曲线的曲率单调性进行了研究,得到了曲率单调的一个充分条件;文献[5]提出了高次 Bézier 曲线曲率单调的充分条件;文献[6-8]对平面三次 Bézier 螺线进行了研究及推广;文献[9]用待定系数法来求解平面两相离圆弧间 G^2 连续的过渡曲线;文献[10]提出了基于曲线曲率的网格简化算法,获得了良好的视觉效果;文献[11]把 G^2 连续的低次避障代数样条曲线用于机器人的高速前进,具有便于控制、灵活度高等优点;文献[12-14]中不同类型的过渡曲线被应用于正齿轮牙的设计,如 S 型和 C 型过渡曲线。

本文提出了一种新的类三次 Bézier 曲线,通过一种有效的放缩法推导了 6 条此类曲线曲率单调的充分条件,得出其中两条类三次 Bézier 曲线比三次 Bézier 曲线曲率单调条件范围大的重要结论,并讨论了类三次 Bézier 螺线与三次 Bézier 螺线的位置关系。通过实例作了如下工作:用 1 条类三次 Bézier 螺线做直线到圆的过渡曲线;用 1 对类三次 Bézier 螺线作只包含一个曲率极值点的 S 型和 C 型 G^2 连续过渡曲线;用 1 条类三次 Bézier 螺线做不含曲率极值点的过渡曲线。此算法简单,只要适当选取边

长和角度即可做 G^2 连续的过渡曲线。

1 类三次 Bézier 曲线的构造方法

考虑到三次 Bézier 曲线的基函数可由

$(1-t+t)^3 = (1-t)^3 + 3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t) + 3t^3$ 关系式展开得到。同理,考虑关系式

$$[(1-t)+t] \cdot [(1-t)^2+t \cdot (1-t)+t]$$

展开并插入控制顶点得满足插值两端点的曲线

$$P(t) = (1-t)^3 p'_0 + 2t(1-t)^2 p'_1 + (1-t)t^2 p'_2 + t(1-t)p'_3 + t^2 p'_4$$

对上述曲线求导得

$$P'(t) = -3(1-t)^2 p'_0 + 2(1-t)(1-3t)p'_1 + t(2-3t)p'_2 + (1-2t)p'_3 + 2tp'_4$$

进而求得

$$P'(0) = -3p'_0 + 2p'_1 + p'_3$$

$$P'(1) = -p'_2 - p'_3 + 2p'_4$$

为保证曲线插值两切线,分别合并控制顶点为

$$\begin{cases} p'_0 \rightarrow p_0 \\ p'_1, p'_3 \rightarrow p_1 \\ p'_2, p'_4 \rightarrow p_2 \end{cases}, \begin{cases} p'_0 \rightarrow p_0 \\ p'_1, p'_2, p'_3 \rightarrow p_1 \\ p'_4 \rightarrow p_2 \end{cases}, \begin{cases} p'_0, p'_1 \rightarrow p_0 \\ p'_2, p'_3 \rightarrow p_1 \\ p'_4 \rightarrow p_2 \end{cases}$$

得 3 条参数曲线为

$$P_1(t) = (1-t)^3 \cdot p_0 + (1-t)(3-2t)t \cdot p_1 + t^2(2-t) \cdot p_2 \quad (1)$$

$$P_2(t) = (1-t)^3 \cdot p_0 + (3-t)(1-t)t \cdot p_1 + t^2 \cdot p_2 \quad (2)$$

$$P_3(t) = (1-t)^2(1+t) \cdot p_0 + (1-t)(1+t)t \cdot p_1 + t^2 \cdot p_2 \quad (3)$$

在一定条件下此 3 条曲线曲率单调递减。

通过令 $t := 1-t$, 整理得另 3 条参数曲线为

$$P_4(t) = (1-t)^2(1+t) \cdot p_0 + t(1-t)(1+2t) \cdot p_1 + t^3 \cdot p_2 \quad (4)$$

$$P_5(t) = (1-t)^2 \cdot p_0 + t(1-t)(2+t) \cdot p_1 + t^3 \cdot p_2 \quad (5)$$

$$P_6(t) = (1-t)^2 \cdot p_0 + t(2-t)(1-t) \cdot p_1 + t^2(2-t) \cdot p_2 \quad (6)$$

在一定条件下此 3 条曲线曲率单调递增。

此时 $P_i(0) = p_0, P_i(1) = p_2, P'_i(0) = \alpha_i(p_1 -$

$p_0), P'_i(1) = \beta_i(p_2 - p_1)$, 其中 $\alpha_1 = \alpha_2 = 3, \alpha_3 = \alpha_4 = 1, \alpha_5 = \alpha_6 = 2, \beta_1 = \beta_6 = 1, \beta_2 = \beta_3 = 2, \beta_4 = \beta_5 = 3, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 。

标记 $h_0 = \|p_1 - p_0\|, h_1 = \|p_2 - p_1\|$, 相应的单位切向量分别为 T_0, T_1 。设 θ 为 p_0p_1 和 p_1p_2 的夹角, 如图 1 所示, 则相应的控制顶点可改写成

$$p_1 = p_0 + h_0 \cdot T_0, \quad p_2 = p_1 + h_1 \cdot T_1$$

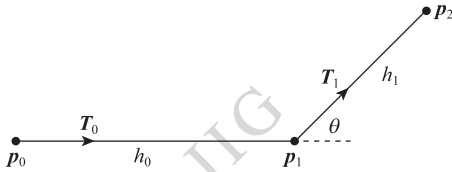


图 1 类三次 Bézier 曲线控制顶点图

Fig. 1 Control points of the quasi-cubic Bézier curves

易证基函数具有单位分解性和非负性。曲线具有凸包性、几何不变性和端点性等。

2 类三次 Bézier 螺线

若曲线的曲率值随其弧长单调变化, 则该曲线称为螺线。所以, 曲率单调的类三次 Bézier 曲线也称为类三次 Bézier 螺线。

2.1 曲率单调的条件

上面提出的 6 条类三次 Bézier 曲线需要满足什么条件才能保证曲率单调递增或递减呢? 引理 1 至引理 6 详细回答了这个问题。

引理 1 当 $h_1 > \frac{\sqrt{21}}{4}h_0$ 且 $\cos \theta \in \left(\frac{9h_0}{8h_1}, \frac{6h_1}{7h_0}\right)$

时, 式(1)曲线是一条曲率单调递减的曲线, 起点处的曲率: $k(0) = \frac{4h_1 \sin \theta}{9h_0^2}$, 终点处的曲率: $k(1) = 0$ 。

证明 关键是对任意的 $t \in [0, 1]$, 能否判断下文中的 $v(t)$ 恒大于零或恒小于零。针对此问题给出一种有效的放缩法, 即在保证两端点 $v(0)$ 和 $v(1)$ 同号的前提下放大或缩小 $v(t)$, 得出曲率单调的另一半条件。

对曲线 $P_1(t)$ 求导知

$$\begin{aligned} P'_1(t) &= 3(1-t)^2 \cdot (p_1 - p_0) + \\ &\quad t(4-3t) \cdot (p_2 - p_1) \\ P''_1(t) &= 6(t-1) \cdot (p_1 - p_0) + \\ &\quad (4-6t) \cdot (p_2 - p_1) \end{aligned}$$

记

$$P'_1(t) = A_1 h_0 T_0 + B_1 h_1 T_1$$

$$P''_1(t) = C_1 h_0 T_0 + D_1 h_1 T_1$$

式中, $A_1 = 3(1-t)^2, B_1 = t(4-3t), C_1 = 6(t-1), D_1 = 4-6t$, 由 $T_0 \times T_1 = \sin \theta$ 知

$$\begin{aligned} P'_1(t) \times P'_2(t) &= (A_1 D_1 - B_1 C_1) h_0 h_1 \sin \theta \\ \|P'_1(t)\|^2 &= A_1^2 h_0^2 + B_1^2 h_1^2 + 2A_1 B_1 h_0 h_1 \cos \theta \end{aligned} \quad (7)$$

再根据曲率公式 $K(t) = \frac{P'_1(t) \times P''_1(t)}{\|P'_1(t)\|^3}$, 求导化简得

$$K'(t) = \frac{-6h_0 h_1 v(t) \sin \theta}{\left[\begin{aligned} &9h_0^2(1-t)^4 + h_1^2(4-3t)^2 t^2 + \\ &6h_0 h_1(4-3t)(1-t)^2 t \cdot \cos \theta \end{aligned} \right]^{5/2}}$$

式中, $v(t)$ 是关于 t 的五次方程。通过令 $h_0 = h_1 \cdot x$, $v(t)$ 可简化成

$$\begin{aligned} v(t) &= h_1^2 \cdot (t(3t-4)(-24+60t-49t^2+12t^3) + \\ &\quad 9(t-1)^4(4t-9)x^2 + (-12)(t-1)^2 \\ &\quad (-6+24t-23t^2+6t^3)x \cdot \cos \theta) \end{aligned} \quad (8)$$

由于 $k(0) = \frac{4h_1 \sin \theta}{9h_0^2}, k(1) = 0$, 为保证曲率单调递减必须满足: $v(t) > 0, \forall t \in [0, 1]$ 。显然 $v(1) = h_1^2 > 0$, 为满足 $v(0) = -91h_1^2 x(9x-8\cos \theta) > 0$, 必须保证 $9x-8\cos \theta < 0$ 。由于 $v(t)$ 中 x^2 项的系数对任意的 $t \in (0, 1)$ 都小于零, 所以有

$$9x^2(t-1)^4(4t-9) > (t-1)^4(4t-9)8x\cos \theta$$

整理得

$$v(t) > h_1^2 t(t-1)^2(28-35t+10t^2)(g(t)-4x\cos \theta)$$

式中

$$g(t) = \frac{(3t-4)(-24+60t-49t^2+12t^3)}{(t-1)^2(28-35t+10t^2)} \quad (9)$$

$$\text{由 } g'(t) = \frac{2(160t-370t^2+311t^3-113t^4+15t^5)}{(1-t)^3(28-35t+10t^2)^2} > 0$$

知 $g(t)$ 是单调递增的, 则 $g_{\min}(t) = g(0) = \frac{24}{7}$, 即

$$\frac{24}{7} - 4x \cdot \cos \theta > 0, \frac{9}{8}x < \cos \theta < \frac{6}{7x}.$$

为保证有解需满足: $\frac{9h_0}{8h_1} < \frac{6h_1}{7h_0}$ 和 $\frac{9h_0}{8h_1} < 1$, 整理得 $h_1 > \frac{\sqrt{21}}{4}h_0$ 。证毕。

引理 2 当 $h_1 > 3h_0$ 且 $\cos \theta \in \left(\frac{3h_0}{h_1}, 1\right)$ 时,

式(2)曲线是一条曲率单调递减的曲线, 起点处的曲率 $k(0) = \frac{2h_1 \sin \theta}{9h_0^2}$, 终点处的曲率 $k(1) = 0$ 。

引理 3 当 $h_1 > 2h_0$ 且 $\cos \theta \in \left(\frac{h_0}{h_1}, \frac{h_1}{4h_0}\right)$ 时,

式(3)曲线是一条曲率单调递减的曲线,起点处的曲率 $k(0) = \frac{2h_1 \sin \theta}{h_0^2}$, 终点处的曲率 $k(1) = \frac{h_0 \sin \theta}{h_1^2}$ 。

引理4 当 $h_0 > \frac{\sqrt{21}}{4}h_1$ 且 $\cos \theta \in \left(\frac{9h_1}{8h_0}, \frac{6h_0}{7h_1}\right)$ 时, 式(4)曲线是一条曲率单调递增的曲线, 起点处的曲率 $k(0) = 0$, 终点处的曲率 $k(1) = \frac{4h_0 \sin \theta}{9h_1^2}$ 。

引理5 当 $h_0 > 3h_1$ 且 $\cos \theta \in \left(\frac{3h_1}{h_0}, 1\right)$ 时, 式(5)曲线是一条曲率单调递增的曲线, 起点处的曲率 $k(0) = 0$, 终点处的曲率 $k(1) = \frac{2h_0 \sin \theta}{9h_1^2}$ 。

引理6 当 $h_0 > 2h_1$ 且 $\cos \theta \in \left(\frac{h_1}{h_0}, \frac{h_0}{4h_1}\right)$ 时, 式(6)曲线是一条曲率单调递增的曲线, 起点处的曲率 $k(0) = \frac{h_1 \sin \theta}{h_0^2}$, 终点处的曲率 $k(1) = \frac{2h_0 \sin \theta}{h_1^2}$ 。

引理2至引理6的证明关键步骤详见附录。

总结引理1—引理6, 得到:

定理1 本文给出的6条类三次 Bézier 曲线在满足一定条件下(具体条件分别见引理1—引理6)曲率单调, 从而可用来构造过渡曲线。

2.2 曲率单调条件的对比

假设三次 Bézier 曲线的参数方程为

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^3 \mathbf{B}'_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{B}'_1 + 3t^2(1-t) \mathbf{B}'_2 + t^3 \mathbf{B}'_3$$

式中, $\mathbf{B}'_i (i=0, 1, 2, 3)$ 为曲线的控制顶点。由文献[9]知, 当取 $\alpha = 0$ (向量 $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$ 的夹角), $h'_0 = h'_1$, $h'_2 < 1.2h'_0 \cos \theta$ 时曲线的曲率单调。令 $\mathbf{B}'_1 = (\mathbf{B}'_0 + \mathbf{B}'_2)/2$, 三次 Bézier 曲线可重新标记成

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{2}(1-t)^2(2+t)\mathbf{B}_0 + \frac{3}{2}t(1-t)(1+t)\mathbf{B}_1 + t^3\mathbf{B}_2 \quad (10)$$

式中, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}'_0, \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}'_2, \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}'_3$ 。

引理7^[9] 当 $h_0 > \frac{5}{3}h_1$ 且 $\cos \theta \in \left(\frac{5h_1}{3h_0}, 1\right)$ 时, 式(10)曲线是一条曲率单调递增的曲线, 起点处的曲率 $k(0) = 0$, 终点处的曲率 $k(1) = \frac{h_0 \sin \theta}{3h_1^2}$ 。

仔细观察引理7与引理4: 式(10)曲线满足条件 $h_0 > 1.6667h_1$ 和 $\cos \theta > 1.6667h_1/h_0$ 时曲率单

调, 而式(4)曲线只需满足 $h_0 > 1.14564h_1$ 和 $\cos \theta > 1.125h_1/h_0$ 条件曲率就单调。明显式(4)曲线比式(10)曲线的曲率单调条件范围大。如取 $h_0 = 3, h_1 = 2, \theta = 30^\circ$ 时, 式(4)曲线能保证曲率单调而式(10)曲线却无法保证曲率单调, 如图2所示。

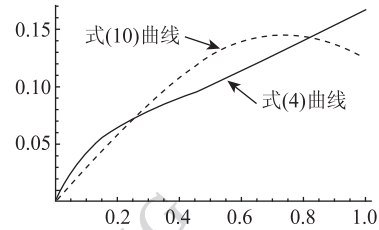


图2 曲率单调对比图

Fig. 2 Comparison of curvature monotone

同理可证式(1)曲线比三次 Bézier 曲线的曲率单调条件范围大。

3 位置关系的讨论

以曲率单调递增的曲线 $\mathbf{P}_4(t)$ 、 $\mathbf{P}_5(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 为例, 在控制多边形相同的条件下有如下关系:

两条类三次 Bézier 螺线分别位于三次 Bézier 螺线的两侧。即与曲线 $\mathbf{B}(t)$ 相比, 曲线 $\mathbf{P}_5(t)$ 离控制多边形相对较近, 曲线 $\mathbf{P}_4(t)$ 离控制多边形相对较远。

当取 $h_0 = 4, h_1 = 1, \theta = 30^\circ$ 时, 有图3所示关系(此时图形显示的高与宽比为0.3)。

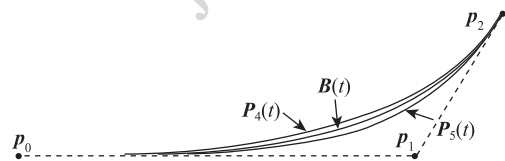


图3 3条曲线间的位置关系图

Fig. 3 Positional relationship of three curves

证明 比较 $\mathbf{P}_5(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 、 $\mathbf{P}_4(t)$ 3条曲线在控制顶点 p_1 前的系数, 有

$t(1-t)(2+t) > \frac{3}{2}t(1-t)(1+t) > t(1-t)(1+2t)$, 对任意的 $t \in (0, 1)$ 成立。证毕。

4 实例

图4所示为本文引理4的算法中取 $\theta = 30^\circ$, $h_0 = 3, h_1 = 1$ 时生成直线到圆过渡曲线的例子, 图5

所示为该过渡曲线曲率单调递增的变化图。

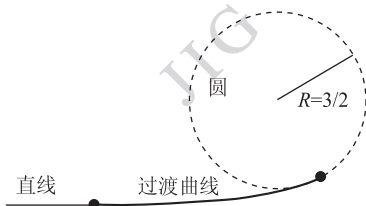


图4 直线到圆的过渡曲线

Fig. 4 Transition curve of straight line to circle

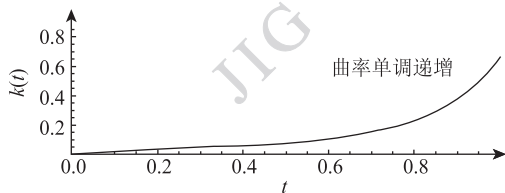


图5 曲率单调递增图

Fig. 5 Monotone increasing of curvature

对引理中有一端点处曲率为零的特点,有如下4对曲线可进一步构造两圆弧半径比例不受限制的S型和C型 G^2 连续过渡曲线: $P_1(t)$ 与 $P_4(t)$ 、 $P_1(t)$ 与 $P_5(t)$ 、 $P_2(t)$ 与 $P_4(t)$ 、 $P_2(t)$ 与 $P_5(t)$ 。下以第一对曲线为例:图6所示为引理1中取 $h_0=3/2$, $h_1=3$, $\theta=30^\circ$ 和引理4中取 $h_0=3$, $h_1=1$, $\theta=30^\circ$ 时生成S型 G^2 连续过渡曲线的例子。图7所示为该曲线段的曲率变化图,可以看出整条过渡曲线上只有一个曲率极值点(公共端点处),曲线整体较为光顺。同理C型 G^2 连续的过渡曲线,如图8、图9所示。

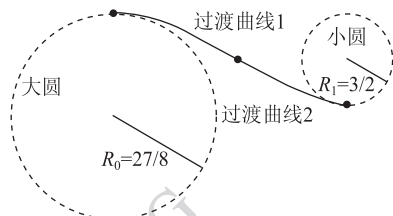


图6 S型 G^2 连续过渡曲线图

Fig. 6 S-shaped for G^2 transition curve



图7 S型过渡曲线曲率变化图

Fig. 7 Curvature changes of S-shaped transition curve

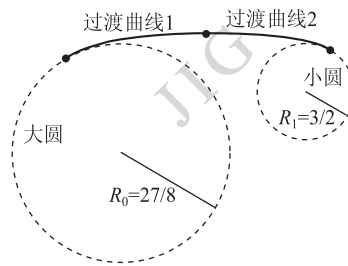


图8 C型 G^2 连续过渡曲线图

Fig. 8 C-shaped for G^2 transition curve



图9 C型过渡曲线曲率变化图

Fig. 9 Curvature changes of C-shaped transition curve

对于引理3和引理6中曲线不含曲率极值点的特性,可用一条此类曲线做圆与圆之间的过渡曲线。特点是整条曲线不含曲率极值点,缺点是要求两圆半径相差较大。分析引理3:设起点和终点处两圆的半径分别为 R_0 和 R_1 ,整理得

$$h_0 = \left(\frac{2R_0}{R_1} \right)^{\frac{2}{3}} \sin \theta \cdot R_1, \quad h_1 = \left(\frac{2R_0}{R_1} \right)^{\frac{1}{3}} \sin \theta \cdot R_1$$

由 $h_1 > 2h_0$ 知, $R_1 > 16R_0$ 。如图10所示为引理3中取 $\theta=45^\circ$, $h_0=1$, $h_1=3$ 时曲率单调递减变化图。

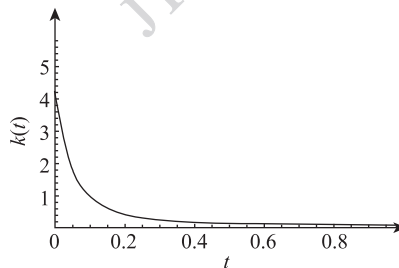


图10 曲率单调递减图

Fig. 10 Monotone decreasing of curvature

5 结 论

本文提出了一种新的类三次 Bézier 曲线。通过一种有效的放缩法推导了此类曲线曲率单调的充分条件,得出有两条类三次 Bézier 曲线比三次 Bézier 曲线曲率单调条件范围大的重要结论,并讨论了类

三次 Bézier 螺线与三次 Bézier 螺线的位置关系。最后,把此类曲线用于构造 G^2 连续的过渡曲线。实验表明了此类曲线的有效性,可更加方便地应用于 CAD、工业数控加工、道路线形设计和机器人行走轨迹等领域。

参考文献 (References)

- [1] Sapidis N S, Frey W H. Controlling the curvature of a quadratic Bézier curve [J]. Computer Aided Geometric Design, 1992, 9(2): 85-91.
- [2] Wang Y L, Wang S C, Li D, et al. Study of curvature condition for the quadratic rational Bézier curves [J]. Journal of Computer Aided Design and Computer Graphics, 2000, 12(7): 507-511. [王玉林, 汪叔淳, 李迪, 等. 二次有理 Bézier 曲线曲率单调条件的研究[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12(7): 507-511.]
- [3] Li C, Han D F. Curvature monotony condition for quadratic rational B spline curves [J]. Journal of Zhejiang University: Science Edition, 2003, 30(1): 23-26. [李重, 韩丹夫. 二次有理 B 样条曲线曲率单调条件[J]. 浙江大学学报: 理学版, 2003, 30(1): 23-26.]
- [4] Xu H X. A sufficient condition of monotone curvature variation for uniform planar rational B-spline curves [J]. Journal of Xinyu College, 2010, 15(4): 73-75. [徐慧霞. 平面均匀有理 B 样条曲线曲率单调变化的一个充分条件[J]. 新余高专学报, 2010, 15(4): 73-75.]
- [5] Higashi M, Kaneko K. Generation of high-quality curve and surface with smoothly varying curvature [C]//Proceedings of Eurographics'88 Conference. Nice, France: Elsevier, 1988: 79-92.
- [6] Walton D J, Meek D S. A planar cubic Bézier spiral [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1996, 72(1): 85-100.
- [7] Walton D J, Meek D S. Cubic Bézier spiral segments for planar G^2 curve design [C]//Proceedings of the 7th International Conference on Computer Graphics, Virtual Reality, Visualisation and Interaction in Africa. Franschhoek, South Africa: ACM, 2010: 21-23.
- [8] Walton D J, Meek D S. A further generation of the planar cubic Bézier spiral [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2012, 236(11): 2869-2882.
- [9] Li Z, Ma L Z, Meek D. Reconstruction of G^2 transition curve for two separated circular arcs [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2006, 18(2): 265-269. [李重, 马利庄, Meek D. 平面两圆弧相离情况下 G^2 连续过渡曲线构造[J]. 计算机辅助几何设计与图形学报, 2006, 18(2): 265-269.]
- [10] Tang H, Luo L M, Zhou Z D. A mesh simplification method based on curvature of curves [J]. Journal of Image and Graphics, 2008, 13(11): 2224-2230. [唐慧, 罗立民, 周正东. 基于曲线曲率的网格简化方法[J]. 中国图象图形学报. 2008, 13(11): 2224-2230.] [DOI:10.11834/jig.20081126]
- [11] Chen J. Construction of low degree algebraic spline curve with G^2 continuity to avoid obstacles [J]. Journal of Image and Graphics, 2013, 18(6): 718-723. [陈军. G^2 连续的低次避障代数学样条曲线[J]. 中国图象图形学报, 2013, 18(6): 718-723.] [DOI: 10.11834/jig.20130615]
- [12] Abbas M, Yahaya S H. Spur gear tooth design with S-shaped transition curve using T-Bézier function [J]. Procedia Engineering, 2012, 50: 211-221.
- [13] Yahaya S H, Ali J M. G^2 Bézier-like cubic as the s-transition and c-spiral curves and its application in designing a spur gear tooth [J]. Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 2013, 7(2): 109-122.
- [14] Yahaya S H, Ali J M, Abdullah T A. Parametric transition as a spiral curve and its application in spur gear tooth with FEA [J]. International Journal of Electrical and Computer Engineering, 2010, 5(1): 64-70.

附录 A 简证引理 2

先求得 $A_2 = 3(1-t)^2$, $B_2 = 2t$, $C_2 = 6(t-1)$, $D_2 = 2$ 。由 $v(1) = -4h_1^2 < 0$ 知需保证 $v(0) = 27h_0^2 - 9h_0h_1\cos\theta < 0$ 。通过令 $h_0 = h_1 \cdot x$ 得 $3x < \cos\theta$ 和 $v(t) = h_1^2(2t(t^2-3) + 9(t-1)^4(2t+3)x^2 + 3(t-1)^2(5t^2+6t-3) \cdot x\cos\theta)$ 。由上述 x^2 项系数大于零得: $9(t-1)^4(2t+3) \cdot x^2 < 3(t-1)^4(2t+3) \cdot x\cos\theta$ 。整理关系式得

$v(t) < 2h_1^2t(t-1)^2(1+t)^2(g(t) + 3x\cos\theta)$ 其中 $g(t) = \frac{t^2-3}{(1-t)^2(1+t)^2}$ 。又由 $g'(t) =$

$\frac{2t(t^2-5)}{(1-t)^3(1+t)^3} < 0$ 知 $g_{\max}(t) = g(0) = -3$, 即

$3x\cos\theta - 3 < 0$, 整理得 $\frac{3h_0}{h_1} < \cos\theta < \frac{h_1}{h_0}$, 在保证有解的情况下需满足 $h_1 > 3h_0$ 。证毕。

附录 B 简证引理 3

先求得 $A_3 = (1-t)(1+3t)$, $B_3 = 2t$, $C_3 = 2(1-3t)$, $D_3 = 2$ 。令 $h_1 = h_0 \cdot x$, 由 $v(1) = 4h_1^2 - 16h_0h_1\cos\theta$ 和 $v(0) = h_0^2 + h_0h_1\cos\theta$ 知, 若 $v(0) < 0$ 和 $v(1) < 0$, 则有 $1 + x\cos\theta < 0$ 和 $x - 4\cos\theta < 0$, 但 $\cos\theta$ 无解。所以只能 $v(0) > 0$ 和 $v(1) > 0$, 此时

$$v(t) = h_0^2((t-1)(1+3t)(-1+4t-t^2+6t^3) + 2t(1+t^2)x^2 + (-1)(-1-4t+10t^2-4t^3+15t^4) \cdot x \cos \theta)。$$

由于 x^2 项系数大于零, 放缩整理得: $v(t) > h_0^2(1-t) \times (1+13t+3t^2+15t^3)(x \cos \theta - g(t))$, 其中 $g(t) = \frac{(1+3t)(6t^3-t^2+4t-1)}{1+13t+3t^2+15t^3}$ 。由 $g'(t) = \frac{2(7+14t+97t^2+60t^3+273t^4+54t^5+135t^6)}{(1+13t+3t^2+15t^3)^2} > 0$

知 $g_{\max}(t) = g(1) = 1$, 即 $x \cos \theta - 1 > 0$, 整理得 $\frac{h_0}{h_1} < \cos \theta < \frac{h_1}{4h_0}$, 在保证有解的情况下需满足 $h_1 > 2h_0$, 证毕。

附录 C 简证引理 4—引理 6

同理可证曲率单调递增的曲线, 下面给出其证明的关键步骤。

引理 4 证明:

$$A_4 = (1-t)(1+3t), B_4 = 3t^2, C_4 = 2(1-3t), D_4 = 6t。令 h_0 = h_1 \cdot x。v(t) = h_1^2(9t^4(5+4t) + (t-1)(1+3t)(1-2t+13t^2+12t^3)x^2 - 12t^2(-1-4t+5t^2+6t^3) \cdot x \cos \theta)。$$

引理 5 证明:

$$A_5 = 2(1-t), B_5 = 3t^2, C_5 = -2, D_5 = 6t。令 h_0 = h_1 \cdot x, v(t) = h_1^2(2t(t^2-3) + 9(t-1)^4(2t+3)x^2 + 3(t-1)^2(5t^2+6t-3) \cdot x \cos \theta)。$$

引理 6 证明:

$$A_6 = 2(1-t), B_6 = t(4-3t), C_6 = -2, D_6 = 4-6t。令 h_0 = h_1 \cdot x, v(t) = h_1^2(t(3t-4)(-8+20t-17t^2+6t^3) + 2(t-1)(2-2t+t^2)x^2 + (16-64t+88t^2-56t^3+15t^4) \cdot x \cos \theta)。$$