



JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS

主办：中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

2015
03
VOL.20

ISSN1006-8961
CN11-3758/TB

非真实感图像处理 P437





第20卷第3期（总第227期）

2015年3月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院

主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所

中国图象图形学学会

北京应用物理与计算数学研究所

主 编 李小文

编辑出版《中国图象图形学报》编辑出版委员会

邮政信箱 北京9718信箱

邮 编 100101

电子信箱 jig@radi.ac.cn

电 话 010-64807995

网 址 www.cjig.cn

广告经营许可证 京朝工商广字第0361号

总 发 行 北京报刊发行局

订 购 全国各地邮局

海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司

（邮政信箱：北京399信箱 邮编：100048）

印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian

Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences

Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS

China Society of Image and Graphics

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

Editor-in-Chief LI Xiaowen

Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of

Image and Graphics

P.O.Box 9718, Beijing, P.R.China

Zip code 100101

E-mail jig@radi.ac.cn

Telephone 010-64807995

Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals

Domestic All Local Post Offices in China

Overseas China International Book Trading Corporation

(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China))

Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

CN 11-3758/TB

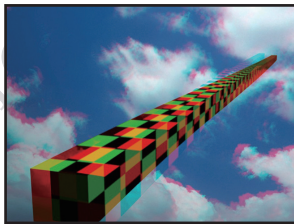
ISSN 1006-8961

CODEN ZTTXFZ

国外发行代号 M1406

国内邮发代号 82-831

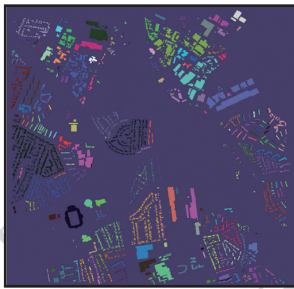
国内定价 50.00元



实时立体视觉系统中的深度映射(第0366页)



基于辐照度的运动模糊图像去模糊(第0395页)



面向智慧城市的3维城市在线可视化(第0445页)

综述

面向血管疾病诊断及预测分析的血流动力学模拟综述

徐梦佳, 杨金柱, 赵宏, 赵大哲 0297

图像处理和编码

多特征融合的车辆阴影消除

邱一川, 张亚英, 刘春梅 0311

图像分析和识别

基于局部时空特征方向加权的人体行为识别

李俊峰, 张飞燕 0320

对表情鲁棒的面部轮廓线3维人脸识别

常朋朋, 达飞鹏, 梅俊 0332

融合双层信息的显著性检测

姜霞霞, 李宗民, 匡振中, 刘玉杰 0340

面向动摄像机的高速运动目标检测

穆春迪, 谢剑斌, 闫玮, 刘通, 李沛秦 0349

匹配滤波在SAR目标单个散射部件检测中的应用

丁柏圆, 文贡坚, 钟金荣, 马聪慧 0357

图像理解和计算机视觉

实时立体视觉系统中的深度映射

李大锦, 白成杰 0366

遥感图像处理

GPU支持的SAR影像几何校正大规模并行处理

杨景辉, 程春泉, 张继贤, 黄国满 0374

基于正则化约束的遥感图像多尺度去模糊

谭海鹏, 曾炫杰, 牛四杰, 陈强, 孙权森 0386

第十届中国计算机图形学大会专栏

基于辐照度的运动模糊图像去模糊

方贤勇, 阚未然, 周健, 李黎, 郭延文 0395

对比度、颜色一致性和灰度像素保持的消色算法

王勋, 罗婷婷, 刘春晓, 彭浩宇 0408

结合因子图的多目的地地图布局优化

罗振珊, 张俊松, 范接鹏 0418

高阶连续的形状可调三角多项式曲线曲面

严兰兰, 韩旭里 0427

改进的自然图像铅笔画效果生成

黄志勇, 姚远, 张晶晶, 马凯, 任东 0437

面向智慧城市的3维城市在线可视化

潘斌, 郭小明, 陈明明, 陈为, 彭群生 0445

CONTENTS

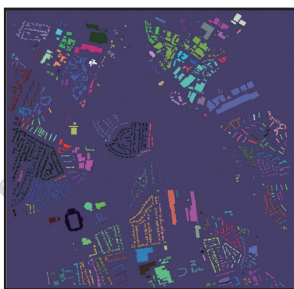
JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Depth mapping in real-time stereoscopic systems (P0366)



Deblurring of motion blurred images based on the irradiance(P0395)



Online 3D city visualization for smarter cities(P0445)

Review

Survey of hemodynamics simulation for diagnosis and prediction in vascular disease

Xu Mengjia, Yang Jinzhu, Zhao Hong, Zhao Dazhe 0297

Image Processing and Coding

Vehicle shadow removal with multi-feature fusion

Qiu Yichuan, Zhang Yaying, Liu Chunmei 0311

Image Analysis and Recognition

Human behavior recognition based on directional weighting local space-time features

Li Junfeng, Zhang Feiyan 0320

Expression-robustness 3D face recognition based on facial profiles

Chang Pengpeng, Da Feipeng, Mei Jun 0332

Image saliency detection based on two-layer information fusion

Jiang Xiaxia, Li Zongmin, Kuang Zhenzhong, Liu Yujie 0340

Detecting high-speed moving targets in moving camera environments

Mu Chundi, Xie Jianbin, Yan Wei, Liu Tong, Li Peiqin 0349

The application of matched filter in detecting single scattering parts of SAR targets

Ding Boyuan, Wen Gongjian, Zhong Jinrong, Ma Conghui 0357

Image Understanding and Computer Vision

Depth mapping in real-time stereoscopic systems

Li Dajin, Bai Chengjie 0366

Remote Sensing Image Processing

GPU supported massively parallel processing for geometric correction of SAR imagery

Yang Jinghui, Cheng Chunquan, Zhang Jixian, Huang Guoman 0374

Remote sensing image multi-scale deblurring based on regularization constraint

Tan Haipeng, Zeng Xuanjie, Niu Sijie, Chen Qiang, Sun Quansen 0386

Column of Chinagraph'2014

Deblurring of motion blurred images based on the irradiance

Fang Xianying, Kan Weiran, Zhou Jian, Li Li, Guo Yanwen 0395

Decolorization with contrast, color consistency and grayscale pixel preservation

Wang Xun, Luo Tingting, Liu Chunxiao, Peng Haoyu 0408

Synthesizing multi-destinations map with factor graph

Luo Zhenshan, Zhang Junsong, Fan Jiepeng 0418

Higher-order continuous shape adjustable trigonometric polynomial curve and surface

Yan Lanlan, Han Xuli 0427

Improved algorithm for natural image pencil drawing production

Huang Zhiyong, Yao Yuan, Zhang Jingjing, Ma Kai, Ren Dong 0437

Online 3D city visualization for smarter cities

Pan Bin, Guo Xiaoming, Chen Mingming, Chen Wei, Peng Qunsheng 0445

中图法分类号: TP391.72 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2015)03-0427-10

论文引用格式: Yan L L, Han X L. Higher-order continuous shape adjustable trigonometric polynomial curve and surface[J]. Journal of Image and Graphics, 2015, 20(3): 0427-0436. [严兰兰, 韩旭里. 高阶连续的形状可调三角多项式曲线曲面[J]. 中国图象图形学报, 2015, 20(3): 0427-0436.] [DOI:10.11834/jig.20150314]

高阶连续的形状可调三角多项式曲线曲面

严兰兰^{1,2}, 韩旭里²

1. 东华理工大学理学院, 南昌 330013; 2. 中南大学数学与统计学院, 长沙 410083

摘要: 目的 目前使用的B样条曲线曲面存在着高连续阶与高局部调整性两者无法兼而有之的不足,且B样条曲线曲面的形状被控制顶点和节点向量唯一确定,这些因素影响着B样条方法的几何设计效果与方便性。本文旨在克服这种局限,以期构造具有高次B样条方法的高连续阶,低次B样条方法的高局部调整性,以及有理B样条方法权因子决定的形状调整性的曲线曲面。**方法** 在三角函数空间上构造了一组含参数的调配函数,进而定义具有与3次B样条曲线曲面相同结构的新曲线与张量积曲面。**结果** 新曲线曲面继承了B样条方法的凸包性、对称性、几何不变性等诸多性质。不同的是,同样是基于4点分段,3次均匀B样条曲线 C^2 连续,而对于等距节点,在一般情况下,新曲线 C^5 连续,当参数取特殊值时可达 C^7 连续。新曲线在 C^5 连续的情况下存在1个形状参数,能较好地调整曲线的形状同时又无须改变控制顶点。另外,将形状参数设为特定值,新曲线可以自动插值给定点列。新曲面具有与新曲线相应的优点。**结论** 在强局部性下实现高阶连续性的形状可调分段组合曲线曲面,为高阶光滑曲线曲面的设计提供了可能,并且新曲线实现了逼近与插值的统一表示,能较好地应用于工程实际。调配函数的构造方法具有一般性,可用相同方式构造其他具有类似性质的调配函数。

关键词: 曲线曲面设计;样条曲线曲面;三角函数;形状参数;连续性

Higher-order continuous shape adjustable trigonometric polynomial curve and surface

Yan Lanlan^{1,2}, Han Xuli²

1. College of Science, East China Institute of Technology, Nanchang 330013, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China

Abstract: Objective The widely used B-spline method is limited by its incapability to realize high-order continuity and high local adjustment simultaneously. The shape of the B-spline curve and surface is uniquely determined by the control points and knot vector. These factors influence the design effects and convenience of the B-spline method. This study aims to overcome these limitations. We construct a new curve and surface that possess the high order continuity of the high-order B-spline method, the high local adjustment of the low-order B-spline method, and the shape adjustment property of the rational B-spline method as determined by the weight factor. **Method** We first construct a set of blending functions with a parameter on the trigonometric function space. We then define the new curve and tensor product surface, which have the same structure as those of the cubic B-spline curve and surface, respectively. **Result** The new curve and surface inherit many of

收稿日期:2014-09-01;修回日期:2014-10-15

基金项目:国家自然科学基金项目(11261003,11271376,60970097);江西省教育厅科技项目(GJJ14493)

第一作者简介:严兰兰(1982—),女,讲师,中南大学数学专业博士研究生,主要研究方向为计算机辅助几何设计。E-mail: yxh821011@aliyun.com

Supported by: National Natural Science Foundation of China (11261003, 11271376, 60970097)

the B-spline method properties, such as convex hull, symmetry, and geometric invariability. The difference is that although both the new and cubic B-spline curves are based on a four-point segment, the latter is C^2 continuous, while for equidistant knots, the new curve is generally C^5 continuous and can reach C^7 continuity when taking a special parameter. A new curve that is C^5 continuous has one shape parameter, which can be used to adjust the shape of the curve without changing the control points. In addition, taking the special parameter, the new curve can automatically interpolate the given set of points. The new surface has properties corresponding to the new curve. **Conclusion** This study presents a kind of shape-adjustable piecewise combination curve and surface, which can achieve high-order continuity under strong local control capability. These features can be used for the possible design of a high-order smooth curve and surface. The new curve realizes the uniform representation of approximation and interpolation. The construction method of the blending function is general and can be used to construct other functions with similar properties.

Key words: curve and surface design; spline curve and surface; trigonometric function; shape parameter; continuity

0 引言

在计算机辅助几何设计中, B 样条方法是描述自由曲线曲面的重要方法。B 样条方法保留了 Bézier 方法的优点, 同时克服了其由于整体表示带来不具有局部性质的缺点, 以及解决在描述复杂形状时带来的连接问题。因此除了具有 Bézier 方法的凸包性、对称性、几何不变性、仿射不变性、变差缩减性等性质以外, B 样条方法还具有较好的局部性和自动光滑性, 这些性质决定了 B 样条方法在实际工程应用中的地位。虽然 B 样条方法具有如此多的优点, 但任何方法都不可能完美无缺, 所以人们一直没有放弃对 B 样条方法进行改进, 以期获得性质更多更好的方法。

例如在多项式函数空间上, 王文涛等人^[1]采用积分递推的方式构造了含一个形状参数的 $n+1$ 次均匀 B 样条曲线; 通过将多项式的次数提升一次, Han^[2] 定义了带一个局部形状参数的分段 4 次多项式曲线; 夏成林等人^[3]构造了两种含多个形状参数的 3 次、4 次分段多项式曲线。在三角函数空间上: 韩旭里^[4]构造了 3 种次数分别为 1、2、3 的分段三角多项式曲线; 尹池江等人^[5]利用分段积分的思想构造了含多个形状参数的三角多项式均匀 B 样条曲线; 严兰兰^[6]和李明珠等人^[7]分别定义了含一个形状参数的三次三角、二次三角多项式样条曲线。在双曲函数空间上, 采用积分递推的方式, Lu 等人^[8]和钱天胜等人^[9]分别构造了含一个、多个形状参数的双曲多项式均匀 B 样条曲线。在代数三角混合函数空间上: 谢进等人^[10]构造了含一个形状参数的二次非均匀 B 样条曲线; Yan 等人^[11]定义了含两个

形状参数的三次均匀 B 样条曲线。在指数函数空间上, 张莉等人^[12]构造了含多个形状参数的均匀 B 样条曲线。文献[1-12]中的曲线都具有 B 样条曲线凸包性、对称性、局部性等基本性质。此外, 文献[1-12]中的曲线均可以在不改变控制顶点的情况下调整曲线的形状, 文献[4-6, 10-11]中的曲线均可以精确表示椭圆, 文献[8, 12]中的曲线都可以表示双曲线、悬链线。另外, 文献[5]中的曲线还可以表示直线、抛物线、螺旋线, 文献[11]中的曲线可以表示抛物线、正(余)弦曲线、摆线、圆柱螺线、星形线。这些文献从不同角度改进了传统的 B 样条方法。

在 B 样条方法中, 3 次 B 样条曲线曲面最常用。一般情况下, 3 次 B 样条曲线曲面可达 C^2 连续, 这可以满足工程中大多数的需求。但是如果对连续性有更高的要求, 就必须采用 3 次以上的曲线曲面。注意到 B 样条方法的连续性和局部性与曲线曲面的次数有直接联系, 次数越高, 连续阶越高, 但局部性就越弱。所以为了满足达到高阶连续的特殊需求而采用高次 B 样条方法时, 其占支配地位的局部性质必然削弱。为此, 考虑能否构造基于 4 点分段的曲线, 以及基于 16 点分片的曲面, 使之具有与 3 次 B 样条曲线、曲面相同的结构, 从而具有相同的局部性, 即改变一个控制顶点至多只会影响 4 条曲线段、16 张曲面片, 但却能达到比 C^2 更高的连续性? 实际上, 文献[4, 6, 11]已经在这个问题上做了一些工作。对于等距节点向量, 文献[4]中定义的 2 次分段三角多项式曲线可达 C^3 连续, 3 次分段三角多项式曲线可达 C^5 连续; 文献[6]中定义的含一个参数的 3 次分段三角多项式曲线一般情况下 C^3 连续, 当形状参数取特殊值时可达 C^5 连续; 文献[11]中定义的含两个参数的 3 次分段代数三角混合多项式曲

线一般情况下 C^2 连续, 当取不同的特殊参数时分别可达 C^3 连续、 C^5 连续。这些文献中的方法都突破了3次B样条方法的 C^2 连续性, 最高可达 C^5 连续。但在达到 C^5 连续时, 文献中曲线曲面的形状相对于控制多边形都是固定的。而在曲线曲面的设计中, 很少可以一步到位, 通常需要经过多次反复调整才能得到满意的形状。传统B样条方法只能通过修改控制顶点来进行形状调整。这种方式不仅工作量大, 而且当控制顶点是取自实物的精确点时, 这种做法显得有些牵强。因此, 设计者们更希望可以在控制顶点固定的情况下调控曲线曲面的形状。所以, 在兼顾高阶连续性的同时引入形状控制参数有理论和应用价值。

本文在三角函数空间 $\{1, \sin t, \cos t, \sin^2 t, \sin^3 t, \cos^3 t, \sin^5 t, \cos^5 t\}$ 上定义了含参数的函数组, 该函数组包含文献[4]中的3次三角多项式调配函数为特例。由新函数组定义的结构与3次B样条曲线曲面相同的三角多项式曲线曲面含一个形状参数。对于等距节点, 在一般情况下新曲线曲面 C^5 连续, 当参数取特殊值时 C^7 连续。新方法不仅可以满足工程上对连续性的特殊需求, 而且为曲线曲面设计过程中的形状调整提供了方便。

1 调配函数的构造与性质

为了构造满足预期性质的调配函数, 首先推导了两组函数, 即

$$\begin{cases} x_0(t) = \frac{1}{4} - \frac{15}{32}s + \frac{5}{16}s^3 - \frac{3}{32}s^5 \\ x_1(t) = \frac{1}{4} + \frac{15}{32}c - \frac{5}{16}c^3 + \frac{3}{32}c^5 \\ x_2(t) = \frac{1}{4} + \frac{15}{32}s - \frac{5}{16}s^3 + \frac{3}{32}s^5 \\ x_3(t) = \frac{1}{4} - \frac{15}{32}c + \frac{5}{16}c^3 - \frac{3}{32}c^5 \\ y_0(t) = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}s + \frac{3}{10}s^2 - \frac{1}{10}s^3 \\ y_1(t) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}c + \frac{3}{10}c^2 + \frac{1}{10}c^3 \\ y_2(t) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}s + \frac{3}{10}s^2 + \frac{1}{10}s^3 \\ y_3(t) = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}c + \frac{3}{10}c^2 - \frac{1}{10}c^3 \end{cases}$$

式中, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $s = \sin t$, $c = \cos t$ 。由这两组函数定

义的结构与3次B样条曲线相同的均匀三角多项式曲线都具有 C^5 连续性。将这两组函数进行线性组合

$$b_i(t) = (1 - \lambda)x_i(t) + \lambda y_i(t), \quad i = 0, 1, 2, 3$$

并进行整理, 即得调配函数。

定义1 设 $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 记 $s = \sin t$, $c = \cos t$, 称

$$\begin{cases} b_0(t) = \frac{(1-s)^3}{160} [40 - 24\lambda + 15(1-\lambda)s(3+s)] \\ b_1(t) = \frac{(1+c)^3}{160} [40 - 24\lambda - 15(1-\lambda)c(3-c)] \\ b_2(t) = \frac{(1+s)^3}{160} [40 - 24\lambda - 15(1-\lambda)s(3-s)] \\ b_3(t) = \frac{(1-c)^3}{160} [40 - 24\lambda + 15(1-\lambda)c(3+c)] \end{cases} \quad (1)$$

为含参数 λ 的三角多项式调配函数, 简称 λT 函数。

当 $\lambda \in [0, \frac{25}{21}]$ 时, 称 λT 函数为 λT 逼近函数; 当 $\lambda = \frac{5}{3}$ 时, 称 λT 函数为 λT 插值函数。

定义1中的 $\frac{25}{21}$ 是使 $b_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) 非负的

λ 的最大取值; $\frac{5}{3}$ 是使 $b_1(0) = b_2(\frac{\pi}{2}) = 1$, $b_i(0) =$

$b_j(\frac{\pi}{2}) = 0$ ($i = 0, 2, 3; j = 0, 1, 3$) 的 λ 值。

容易证明函数组 $x_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) 以及 $y_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) 均线性无关, 而 $b_i(t)$ 是 $x_i(t)$ 和 $y_i(t)$ 的线性组合, 故 $b_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) 也线性无关。

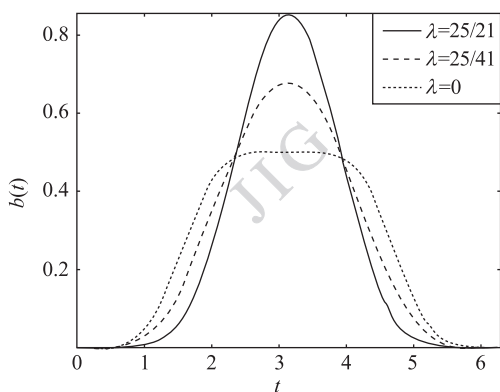
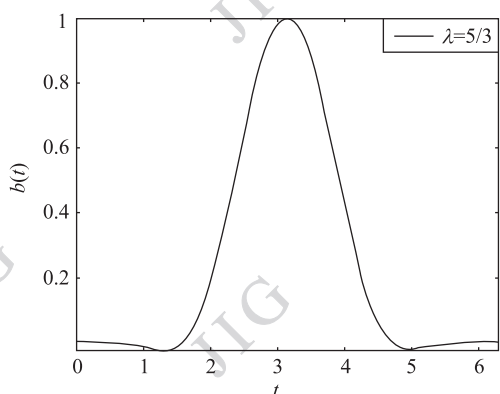
将 λT 函数中的 $b_3(t)$ 、 $b_2(t)$ 、 $b_1(t)$ 、 $b_0(t)$ 沿参数轴首尾相连, 则构成一条完整的分段三角多项式曲线, 记做 $b(t)$ 。图1为取不同参数时得到的 λT 逼近多项式曲线; 图2为 λT 插值多项式曲线。

容易验证 λT 函数具有下列性质:

1) 退化性。当 $\lambda = 1$ 时, λT 函数成为文献[4]中取 $m = 3$ 时的调配函数, 文献[6]中取 $\beta = \frac{4}{5}$ 时的 $\beta - B$ 调配函数, 以及文献[11]中取 $\lambda = 1$ 时的调配函数。

2) 对称性。 $b_i(t) = b_{3-i}(\frac{\pi}{2} - t)$, 其中 $i = 0, 1, 2, 3$ 。

3) 非负性。当 $\lambda \in [0, \frac{25}{21}]$ 时, 对任意 $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 有 $b_i(t) \geq 0$ ($i = 0, 1, 2, 3$)。

图1 λT 逼近多项式曲线Fig. 1 The λT approximating polynomial curve图2 λT 插值多项式曲线Fig. 2 The λT interpolating polynomial curve

证明 由对称性易知,只要证明 $b_0(t) \geq 0$ 和 $b_1(t) \geq 0$ 即可。记

$$f_0(s) = 15(1-\lambda)s^2 + 45(1-\lambda)s + (40-24\lambda)$$

$$f_1(c) = 15(1-\lambda)c^2 - 45(1-\lambda) + (40-24\lambda)$$

由 λT 函数的表达式(1)可知,只要 $f_0(s) \geq 0$,便有 $b_0(t) \geq 0$;只要 $f_1(c) \geq 0$,便有 $b_1(t) \geq 0$ 。下面分情况说明当 $\lambda \in [0, \frac{25}{21}]$ 时, $f_0(s) \geq 0$ 。若 $\lambda \in [0, 1]$,

则抛物线 $f_0(s)$ 开口向上,其最低点横坐标为 $-\frac{3}{2}$,

而 $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $s \in [0, 1]$,故此时 $\min f_0(s) = f_0(0) =$

$40 - 24\lambda > 0$ 。当 $\lambda \in [1, \frac{25}{21}]$ 时,抛物线 $f_0(s)$ 开口向

下,其最高点横坐标为 $-\frac{3}{2}$,同样因为 $s \in [0, 1]$,故

此时 $\min f_0(s) = f_0(1) = 100 - 84\lambda \geq 0$ 。综上可知当

$\lambda \in [0, \frac{25}{21}]$ 时有 $f_0(s) \geq 0$,同理可证 $f_1(c) \geq 0$ 。

$$4) \text{ 规范性。} \sum_{i=0}^3 b_i(t) = 1。$$

5) 端点性质。记

$$\mathbf{b}^{(k)} = [b_0^{(k)}, b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, b_3^{(k)}]^T (k=0, 1, \dots, 7)$$

其中 $b_i^{(0)} = b_i$ ($i=0, 1, 2, 3$), 则有

$$[b^{(0)}(0) \quad b^{(1)}(0) \quad \dots \quad b^{(7)}(0)] =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5-3\lambda}{20} & \frac{27\lambda-75}{160} & \frac{3\lambda}{5} & \frac{3(125-141\lambda)}{160} & -\frac{12\lambda}{5} & \frac{3(1929\lambda-1625)}{160} & \frac{48\lambda}{5} & \frac{3(30125-33021\lambda)}{160} \\ \frac{5+3\lambda}{10} & 0 & -\frac{6\lambda}{5} & 0 & \frac{24\lambda}{5} & 0 & \frac{3(187\lambda-375)}{20} & 0 \\ \frac{5-3\lambda}{20} & \frac{75-27\lambda}{160} & \frac{3\lambda}{5} & \frac{3(141\lambda-125)}{160} & -\frac{12\lambda}{5} & \frac{3(1625-1929\lambda)}{160} & \frac{48\lambda}{5} & \frac{3(33021\lambda-30125)}{160} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9(25-21\lambda)}{4} & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$[b^{(0)}(\frac{\pi}{2}) \quad b^{(1)}(\frac{\pi}{2}) \quad \dots \quad b^{(7)}(\frac{\pi}{2})] =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9(25-21\lambda)}{4} & 0 \\ \frac{5-3\lambda}{20} & \frac{27\lambda-75}{160} & \frac{3\lambda}{5} & \frac{3(125-141\lambda)}{160} & -\frac{12\lambda}{5} & \frac{3(1929\lambda-1625)}{160} & \frac{48\lambda}{5} & \frac{3(30125-33021\lambda)}{160} \\ \frac{5+3\lambda}{10} & 0 & -\frac{6\lambda}{5} & 0 & \frac{24\lambda}{5} & 0 & \frac{3(187\lambda-375)}{20} & 0 \\ \frac{5-3\lambda}{20} & \frac{75-27\lambda}{160} & \frac{3\lambda}{5} & \frac{3(141\lambda-125)}{160} & -\frac{12\lambda}{5} & \frac{3(1625-1929\lambda)}{160} & \frac{48\lambda}{5} & \frac{3(33021\lambda-30125)}{160} \end{pmatrix} \quad (3)$$

2 曲线的构造与性质

定义2 给定控制顶点 $P_i \in \mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3, i=0, 1, 2, \dots, n$, 节点向量 $U = (u_{-2}, u_{-1}, \dots, u_{n+2})$, 其中 $u_{-2} < u_{-1} < \dots < u_{n+2}$. 对 $i=1, 2, \dots, n-2$, 定义

$$p_i(t) = \sum_{j=0}^3 P_{i+j-1} b_j(t), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (4)$$

为含参数 λ 的三角多项式曲线段, 简称 λT 曲线段, 其中 $b_j(t) (j=0, 1, 2, 3)$ 为 λT 函数. 所有曲线段构成分段组合曲线

$$p(u) = p_i \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{u - u_i}{\Delta u_i} \right) \quad (5)$$

式中, $u \in [u_i, u_{i+1}] \subset [u_1, u_{n-1}], \Delta u_i = u_{i+1} - u_i, i=1, 2, \dots, n-2$. 当所有 Δu_i 均相等时, U 为等距节点向量, 称对应的曲线为均匀 λT 曲线. 更具体地, 当

$$\begin{cases} p_{i-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) = p_i(0) = \frac{5-3\lambda}{20} P_{i-1} + \frac{5+3\lambda}{10} P_i + \frac{5-3\lambda}{20} P_{i+1} \\ p'_{i-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) = p'_i(0) = \frac{75-27\lambda}{160} (P_{i+1} - P_{i-1}) \\ p''_{i-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) = p''_i(0) = \frac{3\lambda}{5} (P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1}) \\ p'''_{i-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) = p'''_i(0) = \frac{3(141\lambda - 125)}{160} (P_{i+1} - P_{i-1}) \\ p^{(4)}_{i-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) = p^{(4)}_i(0) = -\frac{12\lambda}{5} (P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1}) \\ p^{(5)}_{i-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) = p^{(5)}_i(0) = \frac{3(1625 - 1929\lambda)}{160} (P_{i+1} - P_{i-1}) \\ p^{(6)}_{i-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{9(25-21\lambda)}{4} P_{i-2} + \frac{48\lambda}{5} P_{i-1} + \frac{3(187\lambda - 375)}{20} P_i + \frac{48\lambda}{5} P_{i+1} \\ p^{(6)}_i(0) = \frac{48\lambda}{5} P_{i-1} + \frac{3(187\lambda - 375)}{20} P_i + \frac{48\lambda}{5} P_{i+1} + \frac{9(25-21\lambda)}{4} P_{i+2} \\ p^{(7)}_{i-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) = p^{(7)}_i(0) = \frac{3(33021\lambda - 30125)}{160} (P_{i+1} - P_{i-1}) \end{cases} \quad (6)$$

式(6)表明

$$p^{(k)}_{i-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) = p^{(k)}_i(0) \quad (7)$$

当 $\lambda \neq \frac{25}{21}$ 时, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 7$; 当 $\lambda = \frac{25}{21}$ 时, $k=0, 1, \dots, 7$. 又因为对 $u \in [u_i, u_{i+1}], t = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u - u_i}{\Delta u_i}$, 有

$$p^{(k)}(u) = \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\Delta u_i} \right)^k p^{(k)}_i(t), \text{ 故}$$

$\lambda \in \left[0, \frac{25}{21}\right]$ 时, 称 $p(u)$ 为逼近曲线; 当 $\lambda = \frac{5}{3}$ 时, 称 $p(u)$ 为插值曲线.

λT 曲线具有下列性质:

1) 凸包性. 由 λT 逼近函数的非负性和规范性可知: 由式(4)确定的 λT 逼近曲线段 $p_i(t)$ 位于控制顶点 $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$ 的凸包 H_i 内, 由式(5)确定的整条 λT 逼近曲线 $p(u)$ 位于所有凸包 H_i 的并集内.

2) 几何不变性. 由 λT 函数的规范性可知: λT 曲线的形状与坐标系的选取无关.

3) 对称性. 由 λT 函数的对称性可知: 将 λT 曲线的控制多边形顺序取反, 将定义同一条曲线, 仅曲线方向取反.

4) 连续性. 由 λT 函数的端点性质式(2)(3), 以及 λT 曲线段的定义式(4)易知

$$\begin{cases} p^{(k)}(u_i -) = \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\Delta u_{i-1}} \right)^k p^{(k)}_{i-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ p^{(k)}(u_i +) = \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\Delta u_i} \right)^k p^{(k)}_i(0) \end{cases} \quad (8)$$

结合式(7)(8)有

$$p^{(k)}(u_i -) = \left(\frac{\Delta u_i}{\Delta u_{i-1}} \right)^k p^{(k)}(u_i +)$$

当 $\lambda \neq \frac{25}{21}$ 时, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 7$; 当 $\lambda = \frac{25}{21}$ 时, $k=0, 1, \dots, 7$.

1, ..., 7。这就表明 λT 曲线当 $\lambda \neq \frac{25}{21}$ 时 G^5 连续, 当 $\lambda = \frac{25}{21}$ 时 G^7 连续; 均匀 λT 曲线当 $\lambda \neq \frac{25}{21}$ 时 C^5 连续, 当 $\lambda = \frac{25}{21}$ 时 C^7 连续。

5) 形状可调性。 λT 函数中含参数 λ , 故在不改变控制顶点的情况下, λT 曲线的形状亦可通过改变 λ 的值进行调整 (图 3)。

图 3 为在相同控制顶点下, 取不同参数时得到的 λT 逼近曲线段。从图 3 中可以看出, λ 的值越大, 曲线越逼近控制多边形。

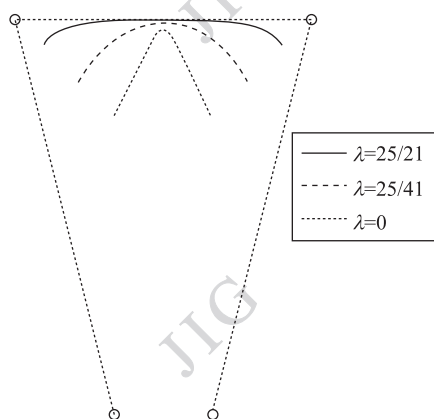


图 3 λT 逼近曲线段

Fig. 3 The λT approximating curve segment

3 曲线设计

3.1 逼近曲线

开曲线与闭曲线的构造是曲线设计中最基本的内容, 下面针对 λT 逼近曲线, 分析开曲线的端点行为和如何构造闭曲线。

由式(2)~(5)可知, 由控制点 $P_0, P_1, \dots, P_n$ 定义的 λT 曲线的起点、终点分别为

$$\begin{cases} p(u_1) = P_1 + \frac{5-3\lambda}{20}[(P_0 - P_1) + (P_2 - P_1)] \\ p(u_{n-1}) = P_{n-1} + \frac{5-3\lambda}{20}[(P_{n-2} - P_{n-1}) + (P_n - P_{n-1})] \end{cases} \quad (9)$$

由式(9)可知, λT 逼近曲线的起点位于以边 P_1P_0 和 P_1P_2 为邻边形成的平行四边形的对角线 (起点为 P_1) 上, 起点与点 P_1 的距离为该对角线

长度的 $\frac{5-3\lambda}{20}$ 倍; 终点位于以边 $P_{n-1}P_{n-2}$ 和 $P_{n-1}P_n$ 为邻边形成的平行四边形的对角线 (起点为 P_{n-1}) 上, 终点与点 P_{n-1} 的距离为该对角线长度的 $\frac{5-3\lambda}{20}$ 倍。

另外, 由式(9)可知, 若 $P_1 = \frac{1}{2}(P_0 + P_2)$, $P_{n-1} = \frac{1}{2}(P_{n-2} + P_n)$, 则不管 λ 在范围 $[0, \frac{25}{21}]$ 内取何值,

均有 $p(u_1) = P_1, p(u_{n-1}) = P_{n-1}$ 。因此, 要想使 λT 逼近曲线经过控制多边形 $P_0P_1 \dots P_n$ 的首末顶点, 只需要增加两个辅助顶点 $P_{-1} = 2P_0 - P_1, P_{n+1} = 2P_n - P_{n-1}$, 然后由新的控制多边形 $P_{-1}P_0 \dots P_{n+1}$ 定义曲线即可 (图 4)。若控制多边形封闭, 即 $P_0 = P_n$, 则该方法将产生封闭的曲线 (图 5(a)), 但注意此时曲线在闭合点处仅仅是位置连续, 并不光滑。若希望由封闭的控制多边形生成封闭的光滑曲线, 只需要增加 2 个辅助顶点 $P_{n+k} = P_k (k=1, 2)$, 然后由新的控制多边形 $P_0P_1 \dots P_{n+2}$ 定义曲线即可 (图 5(b))。

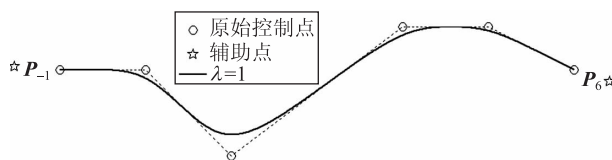


图 4 插值于首末控制顶点的开的 λT 逼近曲线

Fig. 4 Open λT approximating curve interpolating the first and the last control points

图 4、图 5 分别给出了由开的、闭的控制多边形定义的 λT 逼近曲线。图 4 中原始控制顶点横坐标为 $P_x = [1, 2, 3, 5, 6, 7]$, 纵坐标为 $P_y = [1, 1, 0, 1.5, 1.5, 1]$, 辅助点为 $P_{-1}(0, 1), P_6(8, 0.5)$ 。图 5 中原始控制顶点横、纵坐标为 $P_x = [0, 2, 1, 0, -1, -2, 0], P_y = [0, 1, 3, 2, 3, 1, 0]$ 。图 5(a) 中辅助点为 $P_7(-2, -1), P_8(2, -1)$; 图 5(b) 中辅助点为 $P_7(2, 1), P_8(1, 3)$ 。

3.2 插值曲线

由式(6)第 1 个表达式可知当 $\lambda = \frac{5}{3}$ 时, 不管控制顶点如何选取, 均有 $p_i(0) = P_i, p_i\left(\frac{\pi}{2}\right) = P_{i+1}$ 。这表明此时的 λT 曲线段插值于中间的两个

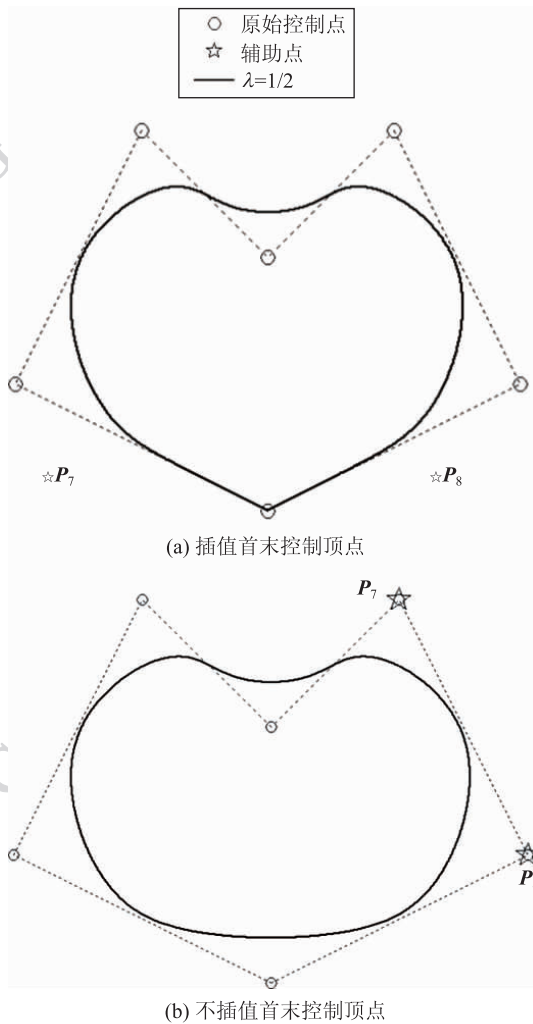


图5 封闭的 λT 逼近曲线
Fig. 5 Closed λT approximating curve

控制顶点,这也是前面将 $\lambda = \frac{5}{3}$ 时的 λT 函数称为 λT 插值函数,将对应的曲线称为 λT 插值曲线的原因。

由此可知,要想生成插值于给定点列 $P_0, P_1, \dots, P_n$ 的曲线,只需增加两个辅助顶点 P_{-1} 和 P_{n+1} ,然后由新的控制多边形 $P_{-1}P_0 \dots P_{n+1}$ 定义 λT 插值曲线即可(图6)。虽然 λT 插值函数中不再含参数,但依然可以通过调整辅助顶点 P_{-1} 和 P_{n+1} 的位置来改变 λT 插值曲线首末段的形状,图6显示了这一特点。由式(6)第2个表达式可知,改变顶点 P_{-1} 和 P_{n+1} , λT 插值曲线在起点、终点处的切线方向将会发生改变,可以根据这一性质来确定符合要求的辅助顶点。另外,由第3节的连续性分析可知, λT 插值曲线 G^5 连续。

图6给出了取不同辅助顶点时,得到的插值于

相同控制点列的不同曲线。注意图6(a)(b)中的插值曲线在首段和末段有差别,而其他段则形状相同。图6中原始控制顶点横坐标为 $P_x = [0, 2, 2, 0, 0, 1]$,纵坐标为 $P_y = [0, 0, 2, 2, 3, 3]$ 。图6(a)中辅助点坐标为 $P_{-1}(0, -1), P_6(2, 3.5)$;图6(b)中辅助点坐标为 $P_{-1}(0, 1), P_6(2, 2.5)$ 。

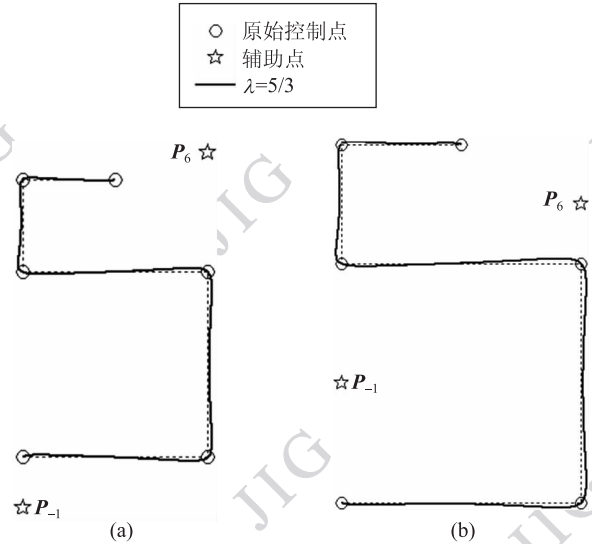


图6 λT 插值曲线
Fig. 6 The λT interpolating curve

3.3 曲线图例

因为不用考虑拼接问题,所以利用 λT 曲线可以很轻松地进行曲线设计。图7、图8分别为由 λT 逼近曲线设计的S形状、手掌图案。

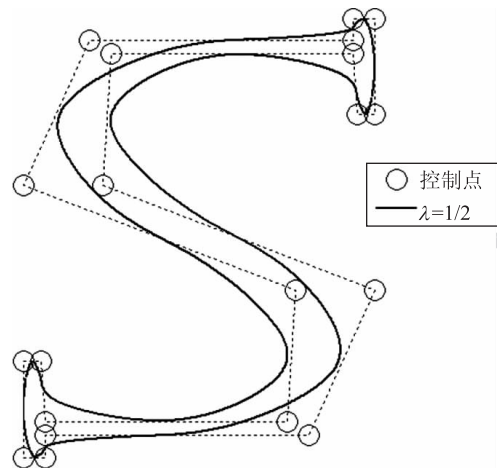


图7 S形状
Fig. 7 The shape of S

图7中控制顶点横坐标、纵坐标分别为

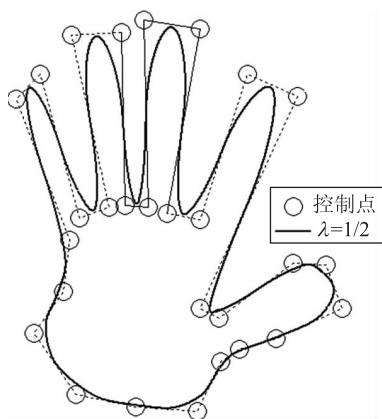


图8 手掌图案

Fig. 8 The shape of palm

$$P_x = [-4, -3.5, -3.5, 2.5, 4, -2.2, -2, 3.5, \\ 3.6, 4, 4, 3.5, 3.5, -2.5, -4, 2.2, 2, \\ -3.5, -3.6, -4, -4, -3.5, -3.5]$$

$$P_y = [-5, -5, -4.5, -4.5, -1.2, 1.2, 4.2, 4.2, \\ 2.8, 2.8, 5.5, 4.5, 4.5, 1.2, -1.2, -4.2, \\ -4.2, -2.8, -2.8, -5, -5, -4.5]$$

图8中控制顶点横坐标、纵坐标分别为

$$P_x = [-0.7, -0.5, 0.6, 0.4, 3.1, 1.5, 3.1, 5.4, \\ 7.8, 3.1, 4, 7.6, 9.2, 10, 6.8, 5, 4.1, 3, 0, \\ -2.9, -4.9, -3.5, -3.2, -5.8, \\ -4.6, -2.7, -1.3, -3.1, -0.7, -0.5, \\ 0.6, 0.4, 3.1, 1.5]$$

$$P_y = [9.4, 1, 0.9, 10, 9.6, 0.6, 0.3, 7.4, 6.3, -4, \\ -4.5, -1.8, -1.9, -4, -5.5, -6, \\ -6.6, -9, -8.8, -8.2, -5.2, -3.2, \\ -0.7, 6.2, 7.4, 0.4, 0.9, 9.3, 9.4, 1, \\ 0.9, 10, 9.6, 0.6]$$

4 曲面的构造与性质

定义3 给定控制顶点 $P_{ij} \in \mathbf{R}^3$, 这里 $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$, 以及节点向量 $U = (u_{-2}, u_{-1}, \dots, u_{m+2})$ 和 $V = (v_{-2}, v_{-1}, \dots, v_{n+2})$, 其中 $u_{-2} < u_{-1} < \dots < u_{m+2}, v_{-2} < v_{-1} < \dots < v_{n+2}$. 对 $i = 1, 2, \dots, m-2, j = 1, 2, \dots, n-2$, 称

$$p_{ij}(u, v) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 P_{i+k-1, j+l-1} b_k(u, \lambda_1) b_l(v, \lambda_2)$$

为含参数 λ 的三角多项式曲面片, 简称 λT 曲面片,

其中 $0 \leq u, v \leq \frac{\pi}{2}$, $b_k(u, \lambda_1)$ 、 $b_l(v, \lambda_2)$ 分别为带参数 λ_1, λ_2 的 λT 逼近函数。所有曲面片构成分片组合曲面

$$p(u, v) = p_{ij}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{u - u_i}{\Delta u_i}, \frac{\pi}{2} \cdot \frac{v - v_j}{\Delta v_j}\right)$$

称 $p(u, v)$ 为 λT 曲面, 其中的参数范围为 $u \in [u_i, u_{i+1}] \subset [u_1, u_{m-1}], v \in [v_j, v_{j+1}] \subset [v_1, v_{n-1}]$, $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i, \Delta v_j = v_{j+1} - v_j, i = 1, 2, \dots, m-2, j = 1, 2, \dots, n-2$ 。

由于 λT 曲面含参数, 且 u 向和 v 向的参数可以取不同的值, 所以与普通 B 样条曲面相比, λT 曲面更加方便于外形设计。 λT 曲面具有与 λT 曲线类似的性质。例如一般情况下, 均匀 λT 曲面 C^5 连续, 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{25}{21}$ 时 C^7 连续。

图9为在相同的控制网格下, 取不同参数时得到的不同的 λT 曲面。图9中控制网格顶点 $P_{ij}, i = 0, 1, \dots, 5, j = 0, 1, \dots, 8$ (形成6行9列的网格) 的分量坐标 $P_{ij}^x, P_{ij}^y, P_{ij}^z$ 如表1—表3中所示。

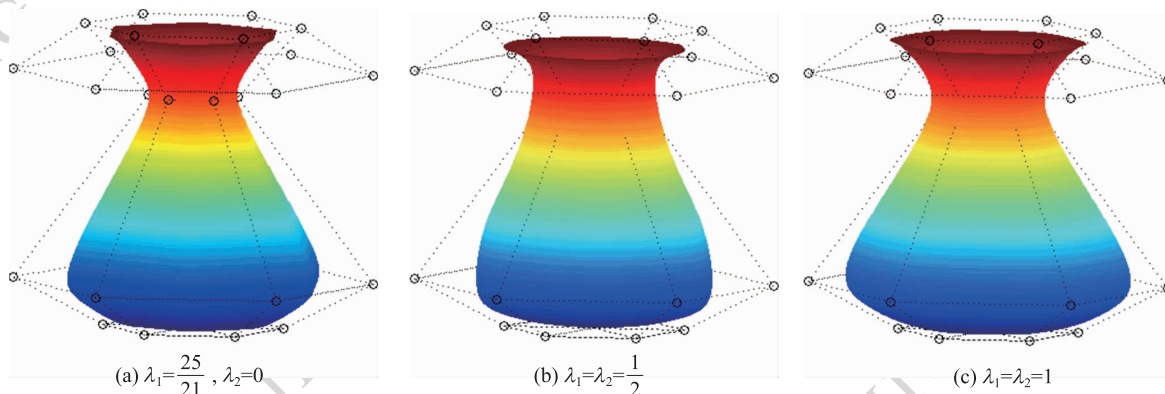
图9 λT 曲面Fig. 9 The λT surface

表1 P_{ij}^x 坐标
Table 1 The P_{ij}^x coordinate

i	j								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1/2	-1/2	-1	-1/2	1/2	1	1/2	-1/2	-1
1	-1/2	1/2	1	1/2	-1/2	-1	-1/2	1/2	1
2	-1	1	2	1	-1	-2	-1	1	2
3	-1/4	1/4	1/2	1/4	-1/4	-1/2	-1/4	1/4	1/2
4	-3/5	3/5	6/5	3/5	-3/5	-6/5	-3/5	3/5	6/5
5	-1	1	2	1	-1	-2	-1	1	2

表2 P_{ij}^y 坐标
Table 2 The P_{ij}^y coordinate

i	j								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0
3	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0
4	$\frac{3\sqrt{3}}{5}$	$\frac{3\sqrt{3}}{5}$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{5}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{5}$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{5}$	$\frac{3\sqrt{3}}{5}$	0
5	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0

表3 P_{ij}^z 坐标
Table 3 The P_{ij}^z coordinate

i	j								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7
1	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7
2	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6
3	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
4	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2
5	-3/2	-3/2	-3/2	-3/2	-3/2	-3/2	-3/2	-3/2	-3/2

5 结 论

虽然对 B 样条方法进行扩展研究的文献较多, 但不同文献有不同的改进目标。本文的主要目标是

想提高三次 B 样条曲线曲面的连续阶。由于这里构造的 λT 函数具有比较特殊的端点性质, 因此由之定义的结构分别与三次均匀 B 样条曲线、曲面相同的分段曲线、分片曲面在一般情况下就能达到 C^5 连续。而且此时的曲线、曲面中分别含有一个、两个

形状参数,改变参数的值便可以在不改变控制顶点的情况下调整曲线、曲面的形状。当参数取特殊值时,曲线、曲面的连续性还可以提升至 C^7 。

与已有文献相比,本文的创新之处主要体现在:1)本文方法不仅 C^5 连续,而且形状可调;2)本文方法可高达 C^7 连续;3)本文方法可统一逼近与插值的表示。

当然本文方法也有不足之处,主要体现在虽然这里采用了三角函数作为调配函数,但是曲线、曲面却无法精确表示椭圆、椭球面。因此进一步可以尝试以既能提高连续性、又能表示特殊曲线曲面为目标来构造新的合适的调配函数,并由之定义性质更优的曲线曲面。

参考文献 (References)

- [1] Wang W T, Wang G Z. Uniform B spline with shape parameter [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2004, 16(6): 783-788. [王文涛, 汪国昭. 带形状参数的均匀 B 样条 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(6): 783-788.]
- [2] Han X L. Piecewise quartic polynomial curves with a local shape parameter [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 19(5): 34-45.
- [3] Xia C L, Wu H Y, Zheng X G, et al. Extension of uniform cubic B-spline curves with multiple shape parameters [J]. Journal of Engineering Graphics, 2011, 32(2): 73-79. [夏成林, 邬弘毅, 郑兴国, 等. 带多个形状参数的三次均匀 B 样条曲线的扩展 [J]. 工程图学学报, 2011, 32(2): 73-79.]
- [4] Han X L. A class of trigonometric polynomial curves on four-point piecewise scheme [J]. Journal of Image and Graphics, 2002, 7(10): 1063-1066. [韩旭里. 基于四点分段的一类三角多项式曲线 [J]. 中国图象图形学报, 2002, 7(10): 1063-1066.] [DOI:10.11834/jig.2002010324]
- [5] Yin C J, Tan J Q. Trigonometric polynomial uniform B-spline curves and surfaces with multiple shape parameters [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2011, 23(7): 1131-1138. [尹池江, 檀结庆. 带多形状参数的三角多项式均匀 B 样条曲线曲面 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2011, 23(7): 1131-1138.]
- [6] Yan L L. Trigonometric curves and surfaces with shape parameter [J]. Journal of East China Institute of Technology, 2012, 35(2): 197-200. [严兰兰. 带形状参数的三角曲线曲面 [J]. 东华理工大学学报: 自然科学版, 2012, 35(2): 197-200.]
- [7] Li M Z, Chen L J. Quadratic trigonometric polynomial curves with shape parameter [J]. Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2013, 35(4): 289-294. [李明珠, 陈丽娟. 带形状参数的二次三角多项式曲线 [J]. 高等学校计算数学学报, 2013, 35(4): 289-294.]
- [8] Lu Y G, Wang G Z, Yang X N. Uniform hyperbolic polynomial B-spline curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(6): 379-393.
- [9] Qian T S, Huang Y D, Yin C J. Hyperbolic polynomial uniform B-spline with multiple shape parameters [J]. Journal of Hefei University of Technology, 2011, 34(8): 1276-1280. [钱天胜, 黄有度, 尹池江. 多形状参数的双曲多项式均匀 B 样条 [J]. 合肥工业大学学报: 自然科学版, 2011, 34(8): 1276-1280.]
- [10] Xie J, Tan J Q, Li S F. Quadratic blending spline curves based on weighted algebraic and trigonometric polynomials [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2011, 41(6): 512-518. [谢进, 檀结庆, 李声锋. 基于代数和三角多项式加权的二次混合样条曲线 [J]. 中国科学技术大学学报, 2011, 41(6): 512-518.]
- [11] Yan L L, Liang J F. A class of algebraic-trigonometric blended splines [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235(1): 1713-1729.
- [12] Zhang L, Liu J J, Tan J Q. Exponential uniform B-spline curves and surfaces with multiple shape parameters [J]. Journal of Graphics, 2013, 34(3): 29-35. [张莉, 刘静静, 檀结庆. 多形状参数的指数均匀 B 样条曲线曲面 [J]. 图学学报, 2013, 34(3): 29-35.]