



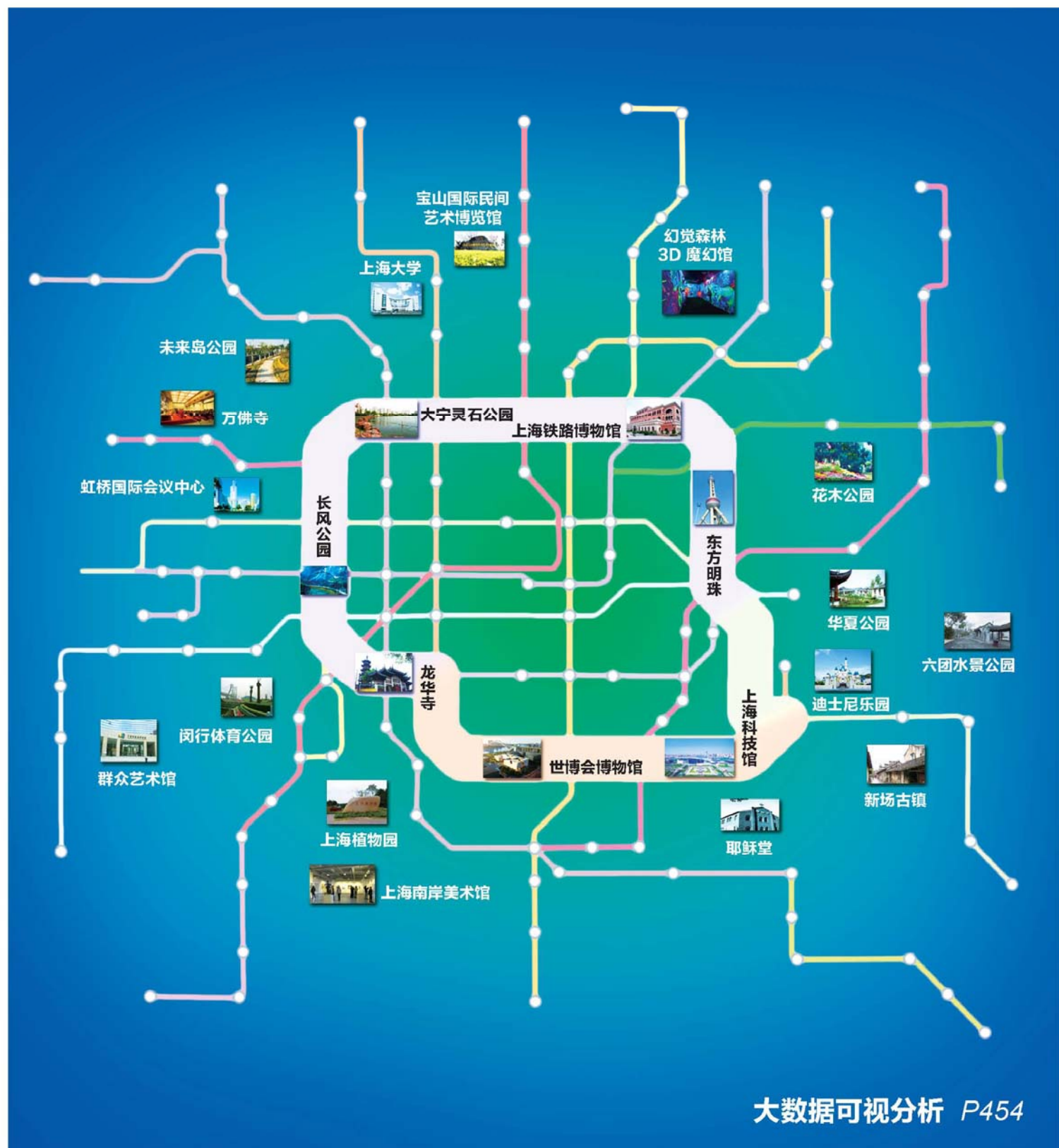
JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS

主办: 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

2015
04
VOL.20

ISSN1006-8961
CN11-3758/TB





第20卷第4期（总第228期）

2015年4月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院

主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所

中国图象图形学学会

北京应用物理与计算数学研究所

主 编 李小文

编辑出版《中国图象图形学报》编辑出版委员会

邮政信箱 北京9718信箱

邮 编 100101

电子信箱 jig@radi.ac.cn

电 话 010-64807995

网 址 www.cjig.cn

广告经营许可证 京朝工商广字第0361号

总 发 行 北京报刊发行局

订 购 全国各地邮局

海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司

（邮政信箱：北京399信箱 邮编：100048）

印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian

Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences

Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS

China Society of Image and Graphics

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

Editor-in-Chief LI Xiaowen

Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of Image and Graphics

P.O.Box 9718, Beijing, P.R.China

Zip code 100101

E-mail jig@radi.ac.cn

Telephone 010-64807995

Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals

Domestic All Local Post Offices in China

Overseas China International Book Trading Corporation

(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China)

Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

CN 11-3758/TB

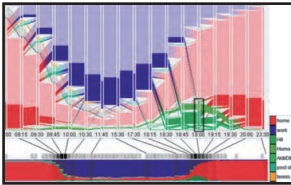
ISSN 1006-8961

CODEN ZTTXFZ

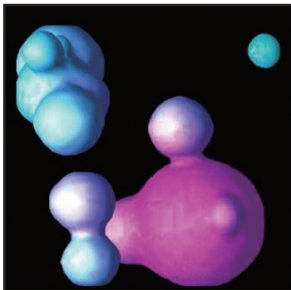
国外发行代号 M1406

国内邮发代号 82-831

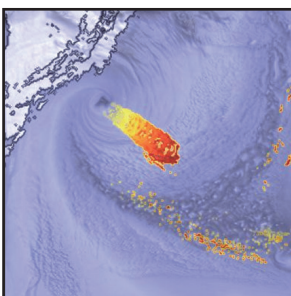
国内定价 50.00元



城市道路交通数据可视分析
综述(第0454页)



可视数据清洗综述
(第0468页)



非对称高斯函数的时变体数
据特征跟踪及可视化
(第0576页)

大数据可视分析

“大数据可视分析”专栏序

梁荣华	0453
城市道路交通数据可视分析综述	
姜晓睿, 田亚, 蒋莉, 梁荣华	0454
可视数据清洗综述	
王铭军, 潘巧明, 刘真, 陈为	0468
基于结构特征的自适应光线投射算法	
罗月童, 张伟, 石放放, 谭文敏	0483
面向浏览器的医学影像可视化系统	
雷辉, 赵颖, 王铭军, 周芳芳	0491

图像处理 and 编码

背投式多投影系统中各向异性问题的研究

王修晖, 王康健, 陆慧娟	0499
可见光与红外图像区域级反馈融合算法	
谷雨, 苟书鑫, 熊文卓, 刘俊, 薛安克	0506
结合天空识别和暗通道原理的图像去雾	
李加元, 胡庆武, 艾明耀, 严俊	0514

图像分析和识别

基于中层时空特征的人体行为识别

王泰青, 王生进	0520
----------------	------

计算机图形学

TBR架构GPU中三角形高效光栅化

符鹤, 谢永芳	0527
---------------	------

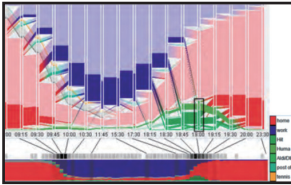
第十届中国计算机图形学大会专栏

V-系统在3D模型数字水印中的应用

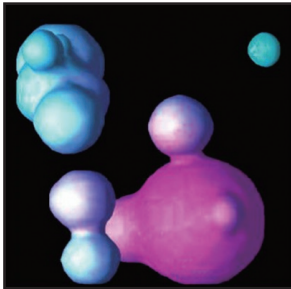
宋瑞霞, 徐燕青, 王小春, 李成华, 王俊, 齐东旭	0533
微距摄影的多聚焦图像拍摄和融合	
赵毅力, 周屹, 徐丹	0544
结合区域配对的室外阴影检测	
艾维丽, 吴志红, 刘艳丽	0551
多尺度粗糙表面的实时绘制方法	
过洁, 潘金贵	0559
体参数化模型离散调和映射生成	
陈龙, 刘玉生, 徐岗	0568
非对称高斯函数的时变体数据特征跟踪及可视化	
白志慧, 周志光, 杨瑞飞, 陶煜波, 林海	0576

CONTENTS

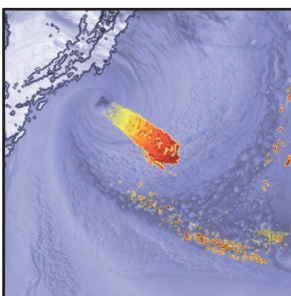
JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Visual analytics of urban road transportation data: a survey (P0454)



Survey of visualization data cleaning(P0468)



Time-varying volume visualization and feature tracking based on asymmetric Gaussian function(P0576)

Visual Analytics Towards Big Data

Visual analytics of urban road transportation data: a survey	
Jiang Xiaorui, Tian Ya, Jiang Li, Liang Ronghua	0454
Survey of visualization data cleaning	
Wang Mingjun, Pan Qiaoming, Liu Zhen, Chen Wei	0468
Structure feature based adaptive ray casting algorithm	
Luo Yuetong, Zhang Wei, Shi Fangfang, Tan Wenmin	0483
HTML5-based medical image visualization system	
Lei Hui, Zhao Ying, Wang Mingjun, Zhou Fangfang	0491

Image Processing and Coding

Research on anisotropy problems under rear-projection multi-projector tiled display wall	
Wang Xiuhui, Wang Kangjian, Lu Huijuan	0499
Visible and infrared image region-level feedback fusion algorithm	
Gu Yu, Gou Shuxin, Xiong Wenzhuo, Liu Jun, Xue Anke	0506
Image haze removal based on sky region detection and dark channel prior	
Li Jiayuan, Hu Qingwu, Ai Mingyao, Yan Jun	0514

Image Analysis and Recognition

Human action recognition using mid-level spatial-temporal features	
Wang Taiqing, Wang Shengjin	0520

Computer Graphics

High efficiency triangle raster algorithm in GPU based on TBR architecture	
Fu He, Xie Yongfang	0527

Column of Chinagraph'2014

Application of the V-system to digital watermark of 3D models	
Song Ruixia, Xu Yanqing, Wang Xiaochun, Li Chenghua, Wang Jun, Qi Dongxu	0533
Multi-focus image capture and fusion system for macro photography	
Zhao Yili, Zhou Yi, Xu Dan	0544
Outdoor shadow detection with paired regions	
Ai Weili, Wu Zhihong, Liu Yanli	0551
Real-time rendering of multi-scale rough surfaces	
Guo Jie, Pan Jingui	0559
Generation of volume parameterization model based on discrete harmonic mapping	
Chen Long, Liu Yusheng, Xu Gang	0568
Time-varying volume visualization and feature tracking based on asymmetric Gaussian function	
Bai Zhihui, Zhou Zhiguang, Yang Ruifei, Tao Yubo, Lin Hai	0576

中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2015)04-0533-11

论文引用格式: Song R X, Xu Y Q, Wang X C, Li C H, Wang J, Qi D X. Application of the V-system to digital watermark of 3D models[J]. Journal of Image and Graphics, 2015, 20(4): 0533-0543. [宋瑞霞, 徐燕青, 王小春, 李成华, 王俊, 齐东旭. V-系统在3D模型数字水印中的应用[J]. 中国图象图形学报, 2015, 20(4): 0533-0543.][DOI:10.11834/jig.20150410]

V-系统在3D模型数字水印中的应用

宋瑞霞¹, 徐燕青¹, 王小春², 李成华¹, 王俊¹, 齐东旭¹

1. 北方工业大学理学院, 北京 100144; 2. 北京林业大学理学院, 北京 100083

摘要: 目的 基于一类三角域上定义的正交函数系——V-系统, 提出一种在频域嵌入水印的3D模型水印新算法。方法 首先针对3D模型的顶点信息构造一个“伪模型”, 进而对伪模型进行参数化, 使之表示为在三角域上定义的一个分片线性函数; 然后将这个分片线性函数在V-系统下进行正交分解, 得到伪模型的V-谱; 最后将水印信息通过修改V-谱嵌入到频域, 得到新的V-谱, 利用这些新的V-谱和V-系统基函数重构水印伪模型, 将水印伪模型的顶点信息替换原3D模型的相应顶点, 生成最终的水印模型。结果 本文算法水印模型保真度高, 且可以在一个模型中植入多个水印依然保持较高的保真度, 提取的水印误码率低、相关系数高。结论 理论上证明了本文算法具有相似变换的鲁棒性, 通过实验, 也表明了本文算法对噪声、剪切和平滑攻击的鲁棒性。

关键词: 3D模型; 数字水印; V-系统; 正交分解; 谱

Application of the V-system to digital watermark of 3D models

Song Ruixia¹, Xu Yanqing¹, Wang Xiaochun², Li Chenghua¹, Wang Jun¹, Qi Dongxu¹

1. College of Sciences, North China University of Technology, Beijing 100144, China;

2. College of Sciences, Beijing Forestry University, Beijing 100083, China

Abstract: **Objective** On the basis of a new orthogonal function system called V-system over a triangular domain, this study proposes a frequency-based watermark algorithm for 3D models. **Method** Vertex information is acquired to construct “pseudo model” is constructed and is then parameterized so that the pseudo model can be expressed as a piecewise linear function over a triangular domain. The linear function is then orthogonally decomposed into a V-series, which has coefficients from which the V-spectrum is obtained. Finally, the watermark is embedded into the frequency domain by modifying the V-spectrum, such that a renewed V-spectrum is formed. The pseudo model is reconstructed by using the new V-spectrum and the basis function of the V-system, and the final watermarked model is built by replacing the vertex of the original 3D model by the vertex information of the watermarked pseudo model. **Result** The watermarked model created by the proposed algorithm has high fidelity, which is maintained even when multiple watermarks are embedded into a model. Moreover, the bit error rate of the extracted watermark is low, and the correlation coefficient between the original watermark and the extracted watermark is high. The proposed algorithm is theoretically proven to be robust against similarity transformations. **Conclusion** Experiments conducted on the watermarked model show that the proposed method is robust against noise pollution, shearing, and smoothing.

Key words: 3D model; digital watermark; V-system; orthogonal decomposition; spectrum

收稿日期: 2014-09-16; 修回日期: 2014-11-19

基金项目: 国家重点基础研究发展规划(973)基金项目(2011CB302400); 国家自然科学基金项目(61272026); 北京市自然科学基金重点项目暨北京市教委科技发展计划重点项目(KZ201210009011)

第一作者简介: 宋瑞霞, 女(1963—), 教授, 1990年于杭州大学(现浙江大学)数学系获理学硕士学位, 研究方向为计算机图形学, 模式识别, 信息安全。E-mail: songrx@ncut.edu.cn

Supported by: National Basic Research Program of China (2011CB302400); National Natural Science Foundation of China (61272026)

0 引言

随着多媒体和网络技术的快速发展,3D 模型已经广泛应用于 3D 游戏、3D 动画、3D 影视和艺术品制作等领域,3D 模型的知识产权保护也随之受到关注,其中 3D 数字水印技术作为知识产权保护的重要手段之一,成为学术界的一个研究热点。由于技术上不能简单平移 2 维图像的水印方案,因此 3D 模型水印远不如图像、音频及视频等数字媒体的水印技术成熟。当然,本质上因为 3D 模型表达形式多样,计算复杂性高,攻击方式多样,所以极具挑战性。

自 1997 年 Ohbuchi 等第 1 次提出 3D 模型水印以来,其技术得到迅速发展^[1]。根据应用目的不同,3D 模型水印可分为鲁棒水印和脆弱水印两类。脆弱水印对各种攻击极其敏感,任何极其微小的几何或拓扑操作,嵌入其中的水印信息即会消失,因此脆弱水印可以防止非法用户的篡改,适用于保护 3D 模型的完整性。而鲁棒水印在各种攻击下仍能提取水印信息,因此鲁棒水印适用于保护 3D 模型的版权。从水印嵌入算法上来说,可分为空域方法和频域方法,空域方法是直接对模型进行操作,其水印嵌入和提取速度较快,可以嵌入数据量较大的水印,但由于空域水印算法是直接修改网格的几何拓扑连接关系或其他几何不变量去嵌入水印,所以对模型外观影响较大;此外空域算法一般对噪声都比较敏感,对模型的扰动比较大,所以空域水印技术有较多难点要克服,其研究手段也在不断的发展^[2-6]。相对而言,频域水印更加稳定,它是通过将模型变换到频域,在频域进行水印嵌入,然后再重构模型,这样嵌入的水印不会导致模型外观明显的变化,具有较好的保真度,频域水印算法突出的优点是对噪声具有很高的鲁棒性。

常见的频域算法有基于小波的方法^[7-8]、基于球面调和分析的方法^[9-11],利用 Laplace 算子的方法^[12],利用模型径向基函数构造正交基做谱分析的方法^[13]等。由于小波对信号处理的多分辨能力,使得基于小波的方法一直是频域方法的关注焦点,并不断地得到发展。另外,当把 3D 模型参数化到球面上,利用球面调和分析方法植入水印,使得球面调和分析成为频域水印的一个重要理论。总体来说,

基于频域的算法一般都是通过某种数学变换,将模型变换到频域,通过修改频域信息将水印序列嵌入到模型的多个顶点中,这样有利于提高算法的鲁棒性,但缺点是依赖顶点的排序,而且检测水印大多需要依赖原模型。

无论是小波变换还是其他数学变换,目前在 3D 水印的频域算法中,往往是针对模型的某些属性或对模型做某些降维处理后,来进行小波分解或是其他数学变换的,而不是直接针对模型的三角网格进行数学变换,因为三角域上定义的正交系尚不多见,但是若采用三角域上的正交系直接处理三角网格显然是方便合理的。因此本文基于一类三角域上定义的正交函数系——V-系统,提出一种频域鲁棒水印新算法,该算法是直接针对三角网格将模型参数化,并在 V-系统下正交展开,得到模型的频域谱(这些谱可以精确重构三角网格模型),通过调整频域谱来嵌入水印,实验表明该算法能对抗相似变换、噪声、剪切和平滑的攻击。

1 三角域上 V-系统简介

k 次 V-系统是一类正交函数系,具有多小波的特征,不仅有 $[0, 1]$ 区间上定义的单变量 V-系统^[14],也有三角域上定义的多变量 V-系统^[15]。三角域上定义的 V-系统又有直角坐标和面积坐标两种表示。本文用到三角域上定义的、由面积坐标表示的 1 次 V-系统,它是由无穷多个有详细数学表达式的分片一次多项式构成的正交函数系。它的突出特性表现为:

- 1) 运算简单,基函数都是分片一次多项式;
- 2) 基函数有局部性,函数取值中大量为 0;
- 3) 能精确表达由分片多项式表示的对象,无论是单体对象还是群组对象。

这里第 3 个特性是本文用到的重要特性,将一个 3D 模型参数化为一个分片一次多项式后,就可以用 V-系统精确表达。

三角域 V-系统构造原理虽然简单,但因为是分片多项式表达,因此数学表达式比较占篇幅,鉴于此,将其详细数学表达置于文后附录 1 中,有兴趣详细了解的读者还可以参考文献[16],有关三角域上 V-系统的应用探索可参考文献[17-19]。

为简便,下文的“V-系统”均指“三角域上定义

的、面积坐标表示的1次V-系统”。

2 三角网格模型的V-系统分解

本文研究的3D模型均为三角网格模型,模型V-谱分解是水印植入的一个关键步骤。

设三角域 G ,它的顶点的面积坐标为 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ 。

2.1 对一个模型作V-系统下的正交分解

1)模型参数化:

(1)设一个3D模型 Ω 包含 N 个三角面片,每个三角面片 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 的顶点坐标为 $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i=1,2,3$;设 n 为满足 $4^n \geq N$ 的最小整数,则对三角域 G 做 n 级剖分(见附录1),剖分得到的所有子区域记作 $\{G_i | i=1,2,\dots,4^n\}$,设 G_i 的三个顶点的面积坐标分别为 (u_i, v_i, w_i) , $i=1,2,3$;

(2)对于每一个 $i=1,2,\dots,N$,映射第 i 个三角面片 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 到 G_i ,使得 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 的3个顶点恰好映射为 G_i 的3个顶点。这个过程可由两个线性映射构成:先映射 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 到 G ,使得 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 的3个顶点恰好映射为 G 的3个顶点;然后 G 再映射到 G_i ,并使 G 的3个顶点分别映射为 G_i 的3个顶点。综合这两步,第 i 个三角面片 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 到 G_i 的映射关系为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X_i U_i \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P_{\Delta i}(u, v, w), \quad (u, v, w) \in G_i \quad (1)$$

式中

$$X_i = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}, \quad U_i = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}^{-1}$$

这样第 i 个三角面片 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 就参数化为 $P_{\Delta i}(u, v, w)$, $(u, v, w) \in G_i$,显然 $P_{\Delta i}(u, v, w)$ 是含有3个分量的向量函数,每个分量都是一次多项式。

(3)按照上述过程,当完成了所有的三角面片的映射后, Ω 就表示为一个定义在三角域 G 上的分片一次多项式,即

$$P_{\Delta}(u, v, w) = \begin{cases} P_{\Delta 1}(u, v, w) & (u, v, w) \in G_1 \\ P_{\Delta 2}(u, v, w) & (u, v, w) \in G_2 \\ \vdots & \\ P_{\Delta N}(u, v, w) & (u, v, w) \in G_N \\ 0 & (u, v, w) \in G_j, N < j \leq 4^n \end{cases} \quad (2)$$

式(2)就是模型 Ω 在 G 上的参数化表达。注意这是一个向量形式表达,每个 $P_{\Delta i}(u, v, w)$ 都有3个分量,每个分量都是一次多项式。即 $P_{\Delta}(u, v, w) = [P_{\Delta}^x(u, v, w), P_{\Delta}^y(u, v, w), P_{\Delta}^z(u, v, w)]^T$ 。

上述模型参数化过程示意图如图1。

2)正交分解。设V-系统的基函数为 $\{V_1(u, v, w), V_2(u, v, w), V_3(u, v, w), \dots\}$,则按照上述参数化过程,含有 N 个面片的模型 Ω 可以分解为

$$P_{\Delta}(u, v, w) = [P_{\Delta}^x(u, v, w), P_{\Delta}^y(u, v, w), P_{\Delta}^z(u, v, w)]^T = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{3 \cdot 4^n} \lambda_x^j V_j(u, v, w), \sum_{j=1}^{3 \cdot 4^n} \lambda_y^j V_j(u, v, w), \sum_{j=1}^{3 \cdot 4^n} \lambda_z^j V_j(u, v, w) \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

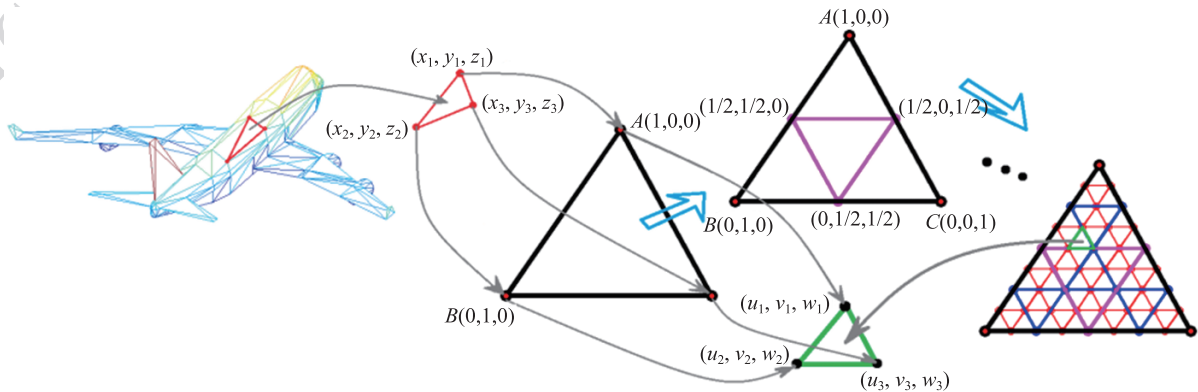


图1 模型参数化过程示意图

Fig. 1 Schematic diagram of a model parameterization

式中,系数 $\lambda_x^j, \lambda_y^j, \lambda_z^j$ 为

$$\lambda_x^j = \iint_G P_\Delta^x(u, v, w) V_j(u, v, w) dudv$$

$$\lambda_y^j = \iint_G P_\Delta^y(u, v, w) V_j(u, v, w) dudv$$

$$\lambda_z^j = \iint_G P_\Delta^z(u, v, w) V_j(u, v, w) dudv$$

称 $\{\lambda_x^j, \lambda_y^j, \lambda_z^j\} (j=1, 2, \dots, 3 \cdot 4^n)$ 分别为 X, Y, Z 方向的 V-谱, 式(3)就是模型 Ω 的频域表示, 也叫模型 Ω 在 V-系统下的正交分解。

关于模型的 V-谱, 有如下结论。

定理 1 模型经平移变换, 除直流系数(第 0 个 V-谱)之外, 其余 V-谱均不变。

定理 2 模型经尺度为 k 的尺度放缩, 则 V-谱也做了相应的尺度放缩, 即

$$[\bar{\lambda}_x^j, \bar{\lambda}_y^j, \bar{\lambda}_z^j] = k[\lambda_x^j, \lambda_y^j, \lambda_z^j] \quad (4)$$

定理 3 模型经旋转矩阵为 R 的旋转变换, 则旋转前后模型的 V-谱的关系为

$$[\bar{\lambda}_x^j, \bar{\lambda}_y^j, \bar{\lambda}_z^j]^T = R[\lambda_x^j, \lambda_y^j, \lambda_z^j]^T \quad (5)$$

该定理的证明是一个纯数学问题, 限于篇幅, 详见附录 2 中。

2.2 利用 V-谱重构模型

1) 逆分解。从 $\{\lambda_x^j, \lambda_y^j, \lambda_z^j\} (j=1, 2, \dots, 3 \cdot 4^n)$ 出发, 即有模型 Ω 的频域表示式(3), 进而得到式(2), 这意味着对每个 G_i , 得到了方程(1)中的 3×3 矩阵 $X_i U_i$;

2) 重构。利用每个子域 G_j 的顶点坐标 $\tilde{P}_i = (u_i, v_i, w_i), i=1, 2, 3$, 根据方程(1)得到面片 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的 3 个顶点 $P_i = (x_i, y_i, z_i), i=1, 2, 3$, 当所有三角面片的顶点都得到了, 那么就得到了模型 Ω 。

图 2 给出了一个模型的分解及重构例子, 这个模型是由 172 个散乱的三角面片组成, 形状类似球, 每个三角面片都不相连(但有穿插), 见图 2(a)。用这个例子说明 V-系统对散乱的群组对象的表达和重构能力, 因为 V-系统中含有间断的基函数, 并且 V-系统有第 1 节所述的特性 3), 所以这个模型尽管很“散乱”, 但与连续网格一样可以在 V-系统下精确表达并重构。图 2(b)为该模型的 V-谱图, 图 2(c)是通过图 2(b)中 V-谱得到的重构图。

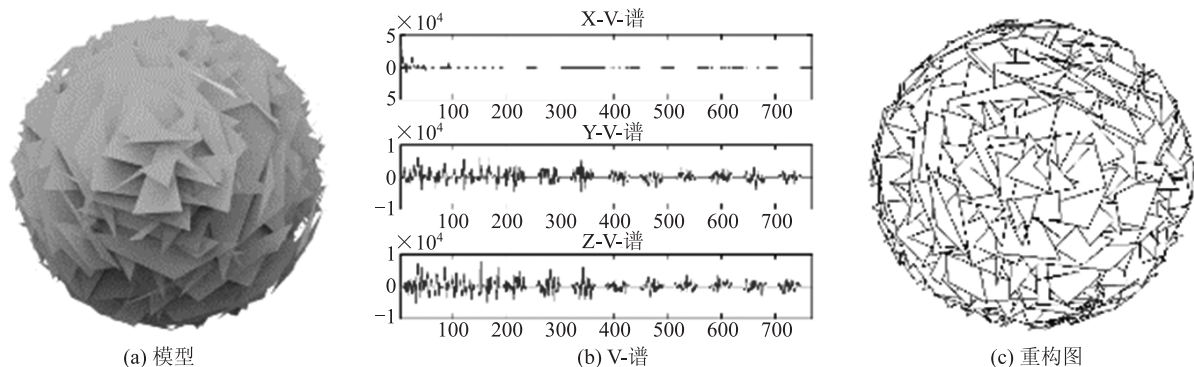


图 2 模型的分解及重构

Fig. 2 The decomposition and reconstruction of the model

3 水印植入算法

由于 3D 模型的面片数一般都较大, 而水印信息相对较小, 在保证水印提取的质量及水印的鲁棒性的前提下, 为了减少运算量, 按如下过程植入水印。

3.1 构造伪模型

首先读取原模型的顶点信息和面片索引信息, 接着在顶点序列中抽取 3×4^k 个顶点 (k 的选择与

水印信息的长度相关, 这些点的抽取方式可以记录下来), 这部分点用于构造一个“伪模型”。

“伪模型”的构造: 对取出的 3×4^k 个顶点, 顺次每 3 个构成一个三角面片, 这样恰好有 4^k 个彼此不相连的三角面片(可能有穿插), 这就是需要的“伪模型”。这个伪模型除了顶点是原模型的部分顶点外, 其余和原模型没有关系, 即它的拓扑结构不依赖原模型。伪模型的 4^k 个面片恰好可以一一映射到三角域的 k 级剖分域上, 由此可以如第 2 节所述对这个伪模型进行 V-系统下的分解与重构。虽然伪

模型的每个三角面片都是孤立的,彼此没有关联,但就像图2中的例子一样,这不影响它在V-系统下的分解与重构。

这个伪模型将用于植入水印,同时它也是水印进行非盲检测时的参考模型。

3.2 伪模型的V-谱分解,植入水印

伪模型按照第2节所述的方法,进行V-系统下的分解,得到X、Y、Z3个方向的V-谱,记作 Λ ,设数字水印信息 W 由0-1码构成,令

$$\Lambda_{\text{new}} = \Lambda + aW \quad (6)$$

式中, a 是一个调控参数,在水印植入过程中可以调节,这样就完成了伪模型谱的修改过程。这里 a 的大小应与模型数据的数据量级相关, a 选择太大会对原模型有较大影响,太小则不利于水印的检测,应在一个适度的范围。经过实验发现,若V-谱中最大的数量级为 10^n ,则 a 取值为 $2 \times 10^{n-4}$ 时效果较好。另外,水印信息可以只植入到X、Y、Z3个方向谱中的某一个,也可以分散到3个谱中。

得到新的V-谱 Λ_{new} 后,利用 Λ_{new} 按照第2节中的重构算法,得到含有水印的伪模型。将水印伪模型的顶点信息读出,并替换原模型的相应顶点,但不改变原模型的边和面的连接关系,这样就生成了与原模型相似的带水印的水印模型,完成了水印植入过程。

这里水印植入过程中,依据模型的顶点构造了一个伪模型,为的是减少计算量(不必对原模型的全部三角网格进行V-谱分解),同时也使得水印模型的保真度更高,特别是提取水印时仅需要参照伪模型,从而提高效率。这种通过伪模型植入水印的算法使得水印信息可以高效率地应用于复杂度高的3D模型,并对模型外观影响较小。

4 水印提取算法

水印提取过程就是植入过程的逆运算,具体过程为:对待检测模型,首先读取顶点信息,按照生成伪模型时的记录,找到相应的伪模型顶点集,得到 3×4^k 个点,只需对该部分进行检测即可。对伪模型中的顶点每3个一组,生成 4^k 个散乱三角面片,对这些三角面片进行V-系统的正交分解,得到V-谱 Λ' ,同时植入水印时已存有伪模型的V-谱 Λ ,计算 $W' = (\Lambda' - \Lambda) \cdot a^{-1}$,得到的 W' 即为所提取的水印信息。

5 水印评价指标

5.1 对水印模型的评价

在频域上嵌入水印的方法就是将嵌入的水印信息分散到3D网格的顶点坐标上,本质上修改的就是顶点的坐标,因此可以通过计算原网格与水印模型的网格之间对应的顶点的欧氏距离,以此来量化水印对原模型的几何扰动程度。

假设原模型 M 的顶点集为 $V = \{v_i | i = 1, 2, 3, \dots\}$,水印模型 M_s 的顶点集为 $V_i^s = \{v_i^s | i = 1, 2, 3, \dots\}$,通过顶点 v_i 与 v_i^s 之间的距离定义最小、最大和平均水印扰动距离为^[11]

$$\begin{cases} d_{\min}(M_s, M) = \min(\|v_i - v_i^s\|/L) \\ d_{\max}(M_s, M) = \max(\|v_i - v_i^s\|/L) \\ d_{\text{aver}}(M_s, M) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (\|v_i - v_i^s\|/L) \end{cases} \quad (7)$$

式中, L 表示网格模型包围盒最长对角线的长度, n 是模型的顶点数目。这些距离值越小,说明模型的保真度越高。

5.2 对提取水印的评价

对水印的评价有两个指标——误码率和相关系数。

将提取水印图像与原水印图像比较,若错误点数为 n ,水印信息包含的总点数为 N ,则对于水印的评价采用误码率来评价,误码率 $e = n/N$ 。显然 e 的值越小说明提取的水印质量越好, e 的值为0时说明提出的水印没有误码、完全正确。

水印相关系数定义为

$$c = \frac{\sum_{i=1}^N (\omega_i^* - \bar{\omega}^*)(\omega_i - \bar{\omega})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\omega_i^* - \bar{\omega}^*)^2 \sum_{i=1}^N (\omega_i - \bar{\omega})^2}} \quad (8)$$

式中, ω_i^* 和 ω_i 分别是提取水印信息和原始水印信息, $\bar{\omega}^*$ 和 $\bar{\omega}$ 分别是提取水印信息和原始水印信息的均值。相关系数越接近1说明提取的水印质量越好,相关系数为1说明提出的水印与原水印相同。

6 算法的鲁棒性

6.1 对相似变换的鲁棒性

依定理1—3,模型平移仅直流系数(第0个V-

谱)有可能改变,因此只要水印信息不嵌入到直流系数中,则平移攻击不会影响水印的提取。

对于尺度和旋转变换,按照定理 1—3,可以在对伪模型计算 V-谱时,根据 V-谱的变化很快判断模型是否做了相应的攻击,于是在提取水印前找到相关变换参数,对模型进行相应的逆变换即可。这里为了准确提取变换参数,只需在水印植入过程中,保留几个谱不作植入水印时的修改即可。

对尺度攻击,若找到尺度参数 k ,只要对水印模型作尺度为 $1/k$ 的尺度变换,就把水印模型还原到原模型大小,从而顺利提取出水印;对旋转攻击,若找到旋转矩阵 R ,则作变换 $M = M'R^{-1}$ 就恢复到旋转之前的位置了,于是就可以顺利取出水印。

综上,证明了本文算法的水印对平移、尺度、旋转具有鲁棒性。通过相关实验,在模型分别经过不同程度的平移、放缩、旋转之后,水印可以完整无误地取出,这类实验结果恕不赘述。

6.2 对噪声、剪切及平滑攻击的鲁棒性

实验中模型选用 Bunny(面片数为 69 451)和 Dragon(面片数为 101 058)以及 Armadillo(面片数为 345 944),水印图像为大小为 99×90 的二值图像,如图 3 所示。



图 3 水印图像
Fig. 3 Watermark image

1)实验 1 无攻击情形下的模型保真度和水印提取。首先实验无攻击情形下,水印模型的保真度和水印提取效果,表 1 是原模型、水印模型、以及提取水印的主观比较和客观评价,由表 1 看出,本文算法的水印模型保真度高,在没有攻击的情形下,可以非常完整地提取水印。

表 1 水印模型和提取水印的主观及客观评价

Tabel 1 Subjective and objective evaluation of the watermarked model and extracted watermark

	原模型	水印的模型	提取的水印	水印评价	水印模型保真度		
					d_{aver}	d_{max}	d_{min}
Bunny				$e = 0$ $c = 1$	6. 094 2E-05	0. 001 4	0
Dragon				$e = 0$ $c = 1$	1. 298 3E-04	0. 001 4	0
Armadillo				$e = 0$ $c = 1$	4. 415 1E-05	0. 001 6	0

2)实验 2 噪声攻击。实验中噪声是通过对顶点的随机扰动造成的,噪声级是指扰动模型顶点的幅度,比如噪声级为 0.5%,指的是对模型每个顶点做幅度为 0.5% 的随机扰动。图 4 给出了水印模型与噪声模型的对比。噪声攻击实验是在水印模型中加入不同等级的噪声,来评价提取水

印的效果。仅以 Dragon 模型为例进行实验,实验结果见表 2。总体来说,本文算法抗噪性能比较鲁棒,在噪声级达到 0.8% 时,依然能提取比较明确的水印。虽然在噪声攻击时,模型所有的顶点都发生了改变,但并没有严重影响水印的提取质量,这是频域水印的优势。

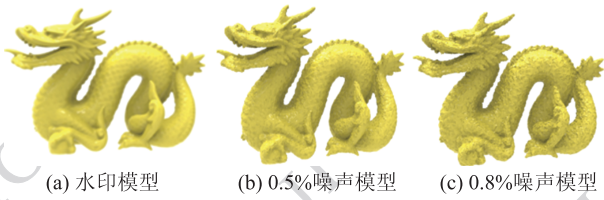


图4 噪声模型
Fig. 4 Noise model

表2 噪声攻击实验结果

Tabel 2 The experiment results of the noise attack

	提取的水印	误码率	相关系数
0.1		$e=0$	$c=1$
0.3		$e=0.0028$	$c=0.9623$
0.5		$e=0.0379$	$c=0.6739$
0.8		$e=0.1235$	$c=0.4131$

噪声级/%

3)实验3 剪切攻击。由于水印是植入在伪模型中,而伪模型的选择相当任意,其面片数可以选择

极少,使得够植入水印即可。比如本文水印0-1码长度为8910,伪模型仅需1024个面片,涉及3072个顶点。如果进一步选择伪模型位于原模型的某个关键的不能被剪切的部位(如龙的头部,因为龙头部一旦剪切,模型将失去使用的意义),则可以抵抗70%甚至更大比例的剪切攻击,且非常完整地取出的水印;当然,如果伪模型构造的较大,则剪切会对水印提取造成一定的影响,实验结果见表3。简单说,剪切过程中如果剪切到了伪模型,则提取的水印就会受损,否则水印就可以完整地取出。但是,如果伪模型过小,一旦被全部剪切了,则取不出水印,所以伪模型并不是越小越好。

另一个抗剪切的方案是在模型中构造多个伪模型去植入多个水印,这时对剪切攻击将是非常鲁棒的。植入多个水印,对模型的保真度几乎没有影响,且水印可以完整无误的提取。这类实验此不赘述。

4)实验4 平滑攻击。针对Bunny模型实验,通过对Bunny水印模型进行不同参数下的Laplacian平滑(见图5),再提取水印,并评价其质量,实验结果见表4。从表4和图5看到,平滑参数越小,对模型的平滑程度就越低,即模型的改变就小,从而提取的水印质量就好;同一个平滑参数下,平滑多次后模型更平滑,即模型改变也较大,提取的水印质量相对就较差。总体看,本文算法能抵抗一定程度的平滑。

表3 裁剪攻击实验结果

Tabel 3 The experiment results of the shearing attack

剪切率/%	伪模型较小			伪模型较大		
	15	45	70	15	20	25
剪切模型						
提取的水印						
水印评价	$e=0$ $c=1$	$e=0$ $c=1$	$e=0$ $c=1$	$e=0.0666$ $c=0.5385$	$e=0.0892$ $c=0.4547$	$e=0.1097$ $c=0.4032$



图 5 水印模型平滑效果图

Fig. 5 The watermarked model after Laplacian smoothing

表 4 平滑攻击实验结果

Tabel 4 The experiment results of the smoothing attack

	参数为 1		参数为 0.8		参数 0.5		
	平滑 1 次	平滑 2 次	平滑 1 次	平滑 2 次	平滑 1 次	平滑 2 次	平滑 4 次
提取的水印							
水印评价	$e = 0.007\ 7$ $c = 0.896\ 4$	$e = 0.053\ 6$ $c = 0.385\ 5$	$e = 0.001\ 7$ $c = 0.976\ 8$	$e = 0.030\ 0$ $c = 0.603\ 0$	$e = 0$ $c = 1$	$e = 0.004\ 6$ $c = 0.938\ 6$	$e = 0.043\ 8$ $c = 0.457\ 4$

7 结 论

基于三角域上的正交系 V-系统,提出了一个 3D 模型的水印植入方案,除了理论上保证了具有平移、放缩、旋转的鲁棒性外,从实验结果看,还具有抗噪声污染、抗剪切和抗平滑的鲁棒性。

本文工作新意体现在:1) 水印是通过构造的伪模型来植入的,是一种全新的手段;2) 使用了新的数学工具——三角域上定义的 V-系统,来对伪模型做正交分解,这种正交分解不是对模型做降维处理再做分解,而是直接对三角网格进行分解,它不同于以往 2D 图像或 1 维信号的正交分解。

在不降低鲁棒性和保真度的前提下,构造理想的正交系是频域水印算法的关键。目前频域上的水印算法不少,正交系也常见,但三角域上定义的正交系并不多见,而三角域正交系显然是处理三角网格的有利工具。以现有的知识,尚未见到将模型在一个三角域上定义的正交系下,依据三角网格做正交展开再植入水印的做法,因此本文是一种新的探索,也是一个挑战。

V-系统作为一种新的数学工具,在本文中起着

关键的作用,特别是它的基函数的间断性,使得由一堆散乱三角面片构成的“伪模型”能被精确重构。“伪模型”不仅大大减少了要处理的面片数,而且由于伪模型仅用到原模型的部分顶点信息而不涉及原模型的拓扑信息,因此水印模型的保真度更高;此外伪模型使得水印信息的植入和提取过程都不需要原模型的全部信息,过程非常简单,因此本文水印算法可以高效地处理复杂的 3D 模型。

本文算法除了保持了经典频域算法抗噪声的优点,还对剪切和平滑有较好的鲁棒性。当然它也和很多频域方法一样,不能完全离开原模型取出水印,也还有很多攻击不能抵抗(如模型简化、顶点乱序等),这是将来要继续研究的问题。

参考文献 (References)

[1] Ohbuchi R, Masuda H, Aono M. Watermarking three-dimensional polygonal models [C] // Proceedings of the ACM International Conference on Multimedia' 97. Seattle: ACM Press, 1997: 261-272.
[2] Praun E, Hoppe H, Finkelstein A. Robust mesh watermarking [C] // Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series. Los Angeles: ACM Press, 1999: 325-334.

- [3] Ohbuchi R, Masuda H, Aono M. Watermarking three-dimensional polygonal models through geometric and topological modifications[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communication, 1998, 16(4):551-560.
- [4] Gao X, Zhang C, Huang Y, et al. A robust high-capacity affine-transformation-invariant scheme for watermarking 3D geometric models[J]. ACM Transactions on Multimedia Computing, Communications, and Applications, 2012, 8(2S):#34.
- [5] Su Z, Li W, Kong J, et al. Watermarking 3D CAPD models for topology verification[J]. Computer-Aided Design, 2013, 45(7):1042-1052.
- [6] Pan J, Zheng J, Zhao G. Blind watermarking of NURBS curves and surfaces[J]. Computer-Aided Design, 2013, 45(2):144-153.
- [7] Kanai S, Date H, Kishinami T. Digital watermarking for 3D polygons using multiresolution wavelet decomposition[C]// Proceedings of International Workshop on Geometric Modeling. Berlin: Springer, 1998:296-307.
- [8] Tamane S C, Deshmukh R R. Blind 3D model watermarking based on multi-resolution representation and fuzzy logic[J]. International Journal of Computer Science & Information Technology, 2012, 4(1):1-9.
- [9] Jin J, Dai M, Bao H, et al. Watermarking on 3D mesh based on spherical wavelet transform[J]. Journal of Zhejiang University: Science, 2004, 5(3):251-258.
- [10] Li L, Zhang D, Pan Z, et al. Watermarking 3D mesh by spherical parameterization[J]. Computers & Graphics, 2004, 28(6):981-989.
- [11] Wang J R, Feng J Q, Miao Y W. A robust confirmable watermarking algorithm for 3D mesh based on manifold harmonics analysis[J]. The Visual Computer, 2012, 28(11):1049-1062.
- [12] Emad E A, Ben H A, Prabir B. Watermarking 3D models using spectral mesh compression[J]. Signal, Image and Video Processing, 2008, 3(4):375-389.
- [13] Wu J H, Leif K. Efficient spectral watermarking of large meshes with orthogonal basis functions[J]. The Visual Computer, 2005, 21(8-10):848-857.
- [14] Song R X, Ma H, Wang T J, et al. The Complete Orthogonal V-system and Its Applications[J]. Communication on Pure and Applied Analysis, 2007, 6(3):853-871.
- [15] Song R X, Wang X C, et al. The structure of V-system over triangulated domains[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2008, 4975:563-569.
- [16] Qi D X, Song R X, Li J. Non-continuous Orthogonal Functions[M]. Beijing: Science Press. 2011. [齐东旭, 宋瑞霞, 李坚. 非连续正交函数[M]. 北京: 科学出版社, 2011.]
- [17] Li J, Song R X, Ye M J, et al. Orthogonal reconstruction of 3D model base on V-system over triangular domain[J]. Chinese Journal of Computers, 2009, 32(2):193-202. [李坚, 宋瑞霞, 叶梦杰, 等. 基于三角域上V系统的三维几何模型的正交重构[J]. 计算机学报, 2009, 32(2):193-202]
- [18] Li J, Song R X, Ye M J, et al. The V-system and Expression of Geometric Group Information in Frequency Domain[J]. Journal of Software, 2008, 19(Supplement):41-51. [李坚, 宋瑞霞, 叶梦杰, 等. V系统与几何群组信息的频域表达[J]. 软件学报, 2008, 19(增刊):41-51]
- [19] Song R X, Yao D X, Wang X C, et al. Retrieval method for 3D object group based on V-system[J]. Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing, 2012, 6(3):340-353.

附录A 三角域上1次V-系统的数学表达

I 三角域的n级剖分

设三角域 G , 它的顶点的面积坐标为 $(1, 0, 0)$,

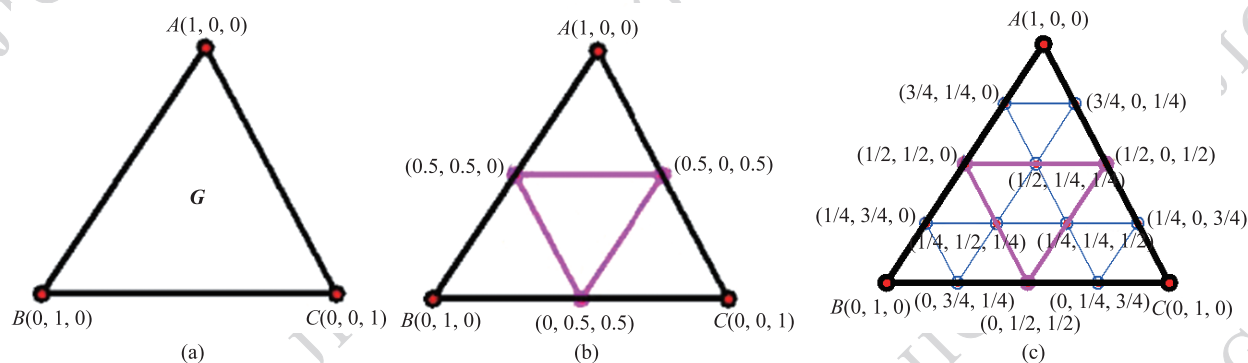


图 A1 三角域 G 及其自相似剖分

Fig. A1 The triangular domain G and self similar subdivision

剖分;继续这个过程, G 的 n 级剖分将得到 4^n 个子三角区域。

II 1 次 V-系统的数学表达

定义在三角域 G 上的 V-系统是分组构造的。详细构造过程可参考文献[15],这里仅给出数学表达式。

采用面积坐标表达,下面所有的函数都定义在三角域 G 上,即点 $P = (u, v, w) \in G, u + v + w = 1$ 。

第 1 组由 3 个线性函数构成,即

$$\begin{aligned} V_1^1(P) &= \sqrt{2} \\ V_1^2(P) &= 6u - 2 \\ V_1^3(P) &= 2\sqrt{3}(u + 2v - 1) \end{aligned} \quad (A1)$$

第 2 组由 9 个分片线性函数构成,它们将生成 V-系统中其余所有的函数,故称作生成元,即

$$\begin{aligned} V_2^1(P) &= \begin{cases} \sqrt{2}(-6u + 5) & P \in G_{1.1} \\ \sqrt{2}(-6u + 1) & \text{其他} \end{cases} \\ V_2^2(P) &= \begin{cases} \sqrt{2}(-6v + 5) & P \in G_{2.1} \\ \sqrt{2}(-6v + 1) & \text{其他} \end{cases} \\ V_2^3(P) &= \begin{cases} \sqrt{2}(-6w + 5) & P \in G_{2.3} \\ \sqrt{2}(-6w + 1) & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2^4(P) &= \begin{cases} \frac{2\sqrt{3}}{3}(18u - 12) & P \in G_{1.1} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}(-6u + 1) & P \in G_{2.1} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}(-6u + 2) & P \in G_{2.2} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}(-6u + 1) & P \in G_{2.3} \end{cases} \\ V_2^5(P) &= \begin{cases} 0 & P \in G_{1.1} \\ \frac{2\sqrt{6}}{3}(-8u - 2) & P \in G_{2.1} \\ \frac{2\sqrt{6}}{3}(-6u + 2) & P \in G_{2.2} \\ \frac{2\sqrt{6}}{3}(-6u + 1) & P \in G_{2.3} \end{cases} \\ V_2^6(P) &= \begin{cases} 0 & P \in G_{1.1} \\ 0 & P \in G_{2.1} \\ 2\sqrt{2}(-6u + 2) & P \in G_{2.2} \\ 2\sqrt{2}(6u - 1) & P \in G_{2.3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$V_2^7(P) = \begin{cases} -12w + 12v & P \in G_{1.1} \\ 4w - 4v + 2 & P \in G_{2.1} \\ 4w - 4v & P \in G_{2.2} \\ 4w - 4v - 2 & P \in G_{2.3} \end{cases}$$

$$V_2^8(P) = \begin{cases} 0 & P \in G_{1.1} \\ -2\sqrt{2}(-4u - 8v + 6) & P \in G_{2.1} \\ -2\sqrt{2}(2u + 4v - 2) & P \in G_{2.2} \\ -2\sqrt{2}(2u + 4v - 1) & P \in G_{2.3} \end{cases}$$

$$V_2^9(P) = \begin{cases} 0 & P \in G_{1.1} \\ 0 & P \in G_{2.1} \\ -2\sqrt{6}(2u + 4v - 2) & P \in G_{2.2} \\ -2\sqrt{6}(-2u - 4v + 1) & P \in G_{2.3} \end{cases} \quad (A2)$$

第 3 组由 $4 \times 9 = 36$ 个函数构成,是对第 2 组中每个生成元压缩 4 倍,然后分别复制到 G 的一级剖分的每个三角形子域,如图 A2 所示,记作 $V_3^{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, 9; j = 1, 2, 3, 4$ 。

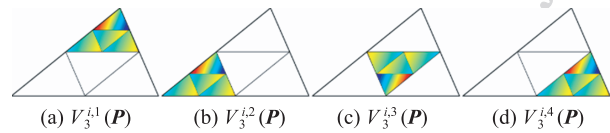


图 A2 V-系统的第 i 类

Fig. A2 The i -th class of the V-system

继续上面的过程,将第 3 组压缩 4 被复制到 G 的二级剖分域,则得到第 4 组;第 n 组是由第 $n-1$ 组压缩 4 倍后复制到 G 的 $n-1$ 级剖分域,第 n 组含有 $9 \cdot 4^{n-2}$ 个函数,记作 $V_n^{i,j}$, $n = 3, 4, \dots; i = 1, 2, \dots, 9; j = 1, 2, \dots, 4^{n-2}$ 。这个过程无限进行下去,得到 V-系统的全部基函数,即 $\{V_1^1, V_1^2, V_1^3; V_2^1, V_2^2, \dots, V_2^9; V_m^{i,j}, m = 3, 4, \dots; i = 1, 2, \dots, 9; j = 1, 2, \dots, 4^{m-2}\}$ 。

附录 B

定理 1 模型经平移变换,除直流系数(第 0 个 V-谱)之外,其余 V-谱均不变。

定理 2 模型经尺度为 k 的尺度变换,则 V-谱也作了相同尺度的放缩,即

$$[\bar{\lambda}_x^j, \bar{\lambda}_y^j, \bar{\lambda}_z^j] = k[\lambda_x^j, \lambda_y^j, \lambda_z^j] \quad (B1)$$

定理 3 模型经旋转矩阵为 R 的旋转变换,则旋转前后模型的 V-谱的关系为:

$$[\bar{\lambda}_x^j, \bar{\lambda}_y^j, \bar{\lambda}_z^j]^T = \mathbf{R}[\lambda_x^j, \lambda_y^j, \lambda_z^j]^T \quad (\text{B2})$$

证明: 仅需对一个面片的情形证明即可。设三角面片 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的顶点坐标为 $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3$, 对这个面片进行如下的相似变换。

1) 平移。该面片经平移后顶点坐标变为 $\bar{\mathbf{P}}_i = (x_i + a, y_i + b, z_i + c), i = 1, 2, 3$, 这个三角面片的参数化表达式为(注意到面积坐标下, $u + v + w = 1$):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_{\Delta i}(u, v, w) &= \begin{bmatrix} x_1 + a & x_2 + a & x_3 + a \\ y_1 + b & y_2 + b & y_3 + b \\ z_1 + c & z_2 + c & z_3 + c \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{X}_i \mathbf{U}_i \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \mathbf{U}_i \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{\Delta i}(u, v, w) + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

故该面片的 V-谱为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_x^j \\ \bar{\lambda}_y^j \\ \bar{\lambda}_z^j \end{bmatrix} &= \iint_G \bar{\mathbf{P}}_{\Delta i}(u, v, w) V_j(u, v, w) dudv = \\ &= \iint_G \left[\mathbf{P}_{\Delta i}(u, v, w) + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right] V_j(u, v, w) dudv = \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_x^j \\ \lambda_y^j \\ \lambda_z^j \end{bmatrix} + \iint_G \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} V_j(u, v, w) dudv \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

注意到 V-系统的正交性, 且 V-系统中的第 0 个函数是常值函数, 所以

$$\iint_G \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} V_j(u, v, w) dudv = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j \neq 0 \quad (\text{B5})$$

从而

$$[\bar{\lambda}_x^j, \bar{\lambda}_y^j, \bar{\lambda}_z^j]^T = [\lambda_x^j, \lambda_y^j, \lambda_z^j]^T, \quad j \neq 0 \quad (\text{B6})$$

即证明了平移变换下除直流系数外的 V-谱不变。

2) 放缩。该面片经尺度为 k 的缩放后顶点坐标变为 $\bar{\mathbf{P}}_i = (kx_i, ky_i, kz_i), i = 1, 2, 3$, 则其参数化表示为

$$\bar{\mathbf{P}}_{\Delta i}(u, v, w) = k\mathbf{X}_i \mathbf{U}_i \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = k\mathbf{P}_{\Delta i}(u, v, w) \quad (\text{B7})$$

故该面片的 V-谱为

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_x^j \\ \bar{\lambda}_y^j \\ \bar{\lambda}_z^j \end{bmatrix} = \iint_G k\mathbf{P}_{\Delta i}(u, v, w) V_j(u, v, w) dudv = k \begin{bmatrix} \lambda_x^j \\ \lambda_y^j \\ \lambda_z^j \end{bmatrix} \quad (\text{B8})$$

即证明了模型放缩后, V-谱也做了同样尺度的放缩。

3) 旋转。假设模型经旋转矩阵为 $\mathbf{R}$ 的旋转变换, 三角面片 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的顶点坐标变为 $\bar{\mathbf{P}}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i), i = 1, 2, 3$, 则

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ \bar{z}_i \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ 是}$$

旋转矩阵, 这个三角面片参数化后的表达为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_{\Delta i}(u, v, w) &= \begin{bmatrix} \bar{P}_{\Delta i}^x(u, v, w) \\ \bar{P}_{\Delta i}^y(u, v, w) \\ \bar{P}_{\Delta i}^z(u, v, w) \end{bmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{X}_i \mathbf{U}_i \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{R} \mathbf{P}_{\Delta i}(u, v, w) = \mathbf{R} \begin{bmatrix} P_{\Delta i}^x(u, v, w) \\ P_{\Delta i}^y(u, v, w) \\ P_{\Delta i}^z(u, v, w) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B9})$$

相应的 V-谱为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_x^j \\ \bar{\lambda}_y^j \\ \bar{\lambda}_z^j \end{bmatrix} &= \iint_G \mathbf{R} \begin{bmatrix} P_{\Delta i}^x(u, v, w) \\ P_{\Delta i}^y(u, v, w) \\ P_{\Delta i}^z(u, v, w) \end{bmatrix} V_j(u, v, w) dudv = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x^j \\ \lambda_y^j \\ \lambda_z^j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B10})$$

即证明了

$$[\bar{\lambda}_x^j, \bar{\lambda}_y^j, \bar{\lambda}_z^j]^T = \mathbf{R}[\lambda_x^j, \lambda_y^j, \lambda_z^j]^T \quad (\text{B11})$$

定理证毕。