

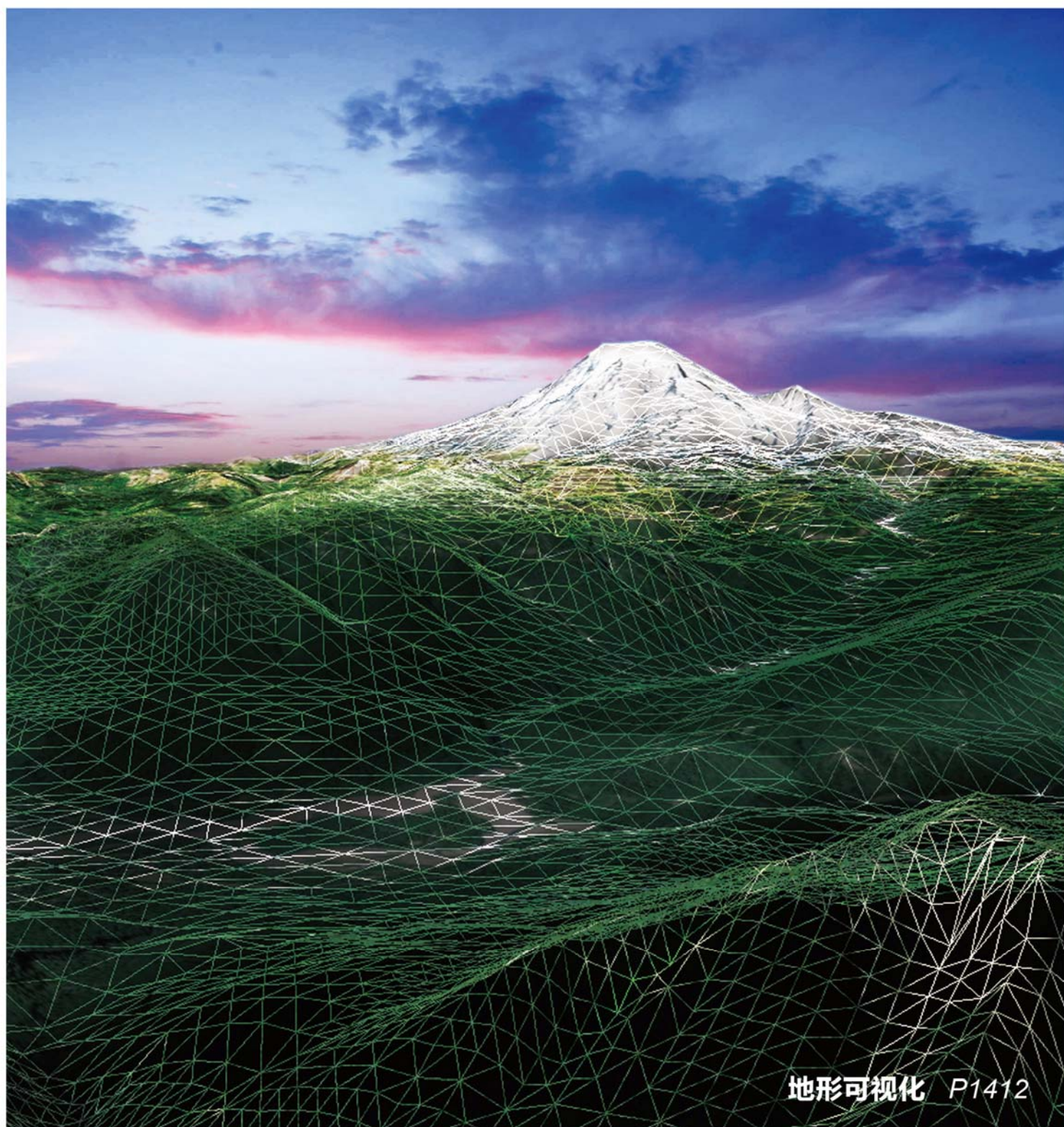


主办: 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

2015
10
VOL.20

ISSN1006-8961
CN11-3758/TB



地形可视化 P1412



第20卷第10期（总第234期）

2015年10月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊
中文核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院
主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

主 编 李小文
编辑出版 《中国图象图形学报》编辑出版委员会
邮政信箱 北京9718信箱
邮 编 100101
电子信箱 jig@radi.ac.cn
电 话 010-64807995
网 址 www.cjig.cn

广告经营许可证 京朝工商广字第0361号
总 发 行 北京报刊发行局
订 购 全国各地邮局
海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司
(邮政信箱: 北京399信箱 邮编: 100048)
印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian | Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences
Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS
China Society of Image and Graphics
Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

Editor-in-Chief LI Xiaowen
Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of
Image and Graphics
P.O.Box 9718, Beijing, P.R.China
Zip code 100101
E-mail jig@radi.ac.cn
Telephone 010-64807995
Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals
Domestic All Local Post Offices in China
Overseas China International Book Trading Corporation
(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China)
Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

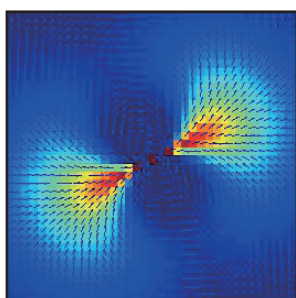
CN 11-3758/TB
ISSN 1006-8961
CODEN ZTTXFZ
国外发行代号 M1406
国内邮发代号 82-831
国内定价 50.00元



JPEG图像双重压缩偏移量估计的篡改区域自动检测定位(第1304页)



基于表情传输的交互式照片编辑(第1366页)



结合张量投票和Snakes模型的SAR图像道路提取(第1403页)

图像处理和编码

基于模式特征的H.264/AVC可逆视频水印

李淑芝, 张翔, 邓小鸿, 吴晓燕1285

二阶总广义变分小波修复模型

许建楼, 郝岩, 张翼1297

JPEG图像双重压缩偏移量估计的篡改区域自动检测定位

赵洁, 郭继昌, 张艳, 张众维1304

图像分析和识别

基于非对称局部梯度编码的人脸表情识别

胡敏, 程轶红, 王晓华, 任福继, 许良凤, 黄晓音1313

采用积分图块间距离检测图像边缘

贾迪, 孟琢, 孙劲光, 李思慧, 赵明远1322

自适应属性加权2维FCM分割算法

侯晓凡, 吴成茂1331

利用层间相关性的岩心CT图像半自动分割方法

徐永进, 滕奇志, 吴晓红, 卿粲波1340

图像理解和计算机视觉

在线特征选取的多示例学习目标跟踪

周志宇, 彭小龙, 吴迪冲, 朱泽飞1346

融合外观和运动特征的在线目标分割

张雷, 李成龙, 汤进, 高思晗1358

基于RGB-D深度相机的室内场景重建

梅峰, 刘京, 李淳芃, 王兆其1366

计算机图形学

带平台伸缩函数的参数曲线变形

张莉, 余慧芳, 檀结庆1374

视景建模中树木纹理图像的随机变形网格方法

施冠羽, 欧阳清1384

基于表情传输的交互式照片编辑

刘锦云, 彭宏京1390

遥感图像处理

结合张量投票和Snakes模型的SAR图像道路提取

符喜优, 张风丽, 王国军, 邵芸1403

GPU Tessellation全球地形可视化方法

李尚林, 郑利平, 张迎凯, 李琳1412

CONTENTS

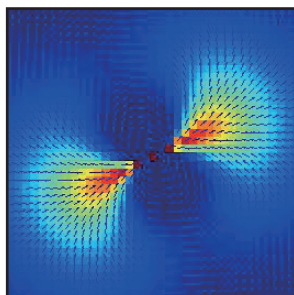
JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Automatic detection and localization of image forgery regions based on offset estimation of double JPEG compression (P1304)



Interactive photo editing based on expression transmission (P1366)



Road extraction from SAR images using tensor voting and Snakes model(P1403)

Image Processing and Coding

- Reversible video watermarking algorithm for H.264/AVC based on mode feature
Li Shuzhi, Zhang Xiang, Deng Xiaohong, Wu Xiaoyan 1285
- Second order total generalized variational model for wavelet inpainting
Xu Jianlou, Hao Yan, Zhang Ji 1297
- Automatic detection and localization of image forgery regions based on offset estimation of double JPEG compression
Zhao Jie, Guo Jichang, Zhang Yan, Zhang Zhongwei 1304

Image Analysis and Recognition

- Facial expression recognition based on asymmetric region local gradient coding
Hu Min, Cheng Yihong, Wang Xiaohua, Ren Fuji, Xu Liangfeng, Huang Xiaoyin 1313
- Edge detection method of block distance combining with summed area table
Jia Di, Meng Lu, Sun Jinguang, Li Sihui, Zhao Mingyuan 1322
- Adaptive weighted two-dimensional histogram FCM segmentation algorithm
Hou Xiaofan, Wu Chengmao 1331
- Semi-segmentation of rock CT images using the correlation of adjacent frames
Xu Yongjin, Teng Qizhi, Wu Xiaohong, Qing Linbo 1340

Image Understanding and Computer Vision

- Object tracking based on multiple instance learning with online feature selection
Zhou Zhiyu, Peng Xiaolong, Wu Dichong, Zhu Zefei 1346
- Online object segmentation via fusing appearance and motion features
Zhang Lei, Li Chenglong, Tang Jin, Gao Sihan 1358
- Improved RGB-D camera based indoor scene reconstruction
Mei Feng, Liu Jing, Li Chunpeng, Wang Zhaoqi 1366

Computer Graphics

- Deformation of parametric curves based on platform extension function
Zhang Li, Yu Huifang, Tan Jieqing 1374
- Method of random transmogrification mesh for tree texture images in scene modeling
Shi Guanyu, Ouyang Qing 1384
- Interactive photo editing based on expression transmission
Liu Jinyun, Peng Hongjin 1390

Remote Sensing Image Processing

- Road extraction from SAR images using tensor voting and Snakes model
Fu Xiyu, Zhang Fengli, Wang Guojun, Shao Yun 1403
- GPU Tessellation method of global terrain visualization
Li Shanglin, Zheng Liping, Zhang Yingkai, Li Lin 1412

中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2015)10-1374-10

论文引用格式: Zhang L, Yu H F, Tan J Q. Deformation of parametric curves based on platform extension function[J]. Journal of Image and Graphics, 2015, 20(10): 1374-1383. [张莉, 余慧芳, 檀结庆. 带平台伸缩函数的参数曲线变形[J]. 中国图象图形学报, 2015, 20(10): 1374-1383.] [DOI: 10.11834/jig.20151011]

带平台伸缩函数的参数曲线变形

张莉¹, 余慧芳¹, 檀结庆^{1,2}

1. 合肥工业大学数学学院, 合肥 230009; 2. 合肥工业大学计算机学院, 合肥 230009

摘要: 目的 随着科学技术的快速发展, 曲线的几何造型技术开始成为近来的热点研究方向. 为了获得更多的变形效果, 面向 2 维、3 维参数曲线和自由曲线变形, 提出一种带平台伸缩函数的变形方法. 方法 有别于现有的大多数自由变形算法, 首先构造了一种形式简洁的多项式形式伸缩函数; 其次借助于伸缩函数, 构造了含有伸缩参数与光滑参数的新型伸缩因子, 算法表明, 这种新型伸缩因子具有单点峰值性、区间峰值性、对称性等优良性质; 最后将伸缩因子所构造变形矩阵作用于待变形的曲线, 通过控制变形区间、伸缩参数、光滑参数以及变形方向, 可以获得整体的、局部的、周期的、伸缩的等各类丰富的图形效果. 结果 此变形操作对造型系统中的主流参数曲线 (Bézier 和 NURBS) 具有封闭性; 通过大量数值实例表明了该方法计算量小, 可控性强, 重复使用可以得到形状多样、具有艺术效果的轮廓线等效果. 结论 与其他方法相比, 本文算法不仅可以用于一般的平面与空间参数曲线, 也可以用于自由型曲线, 扩大了多数自由变形算法的适用范围; 由于伸缩函数具备单点峰值性、区间峰值性、对称性等性质, 从而能够产生以前变形方法无法产生各类角点、尖点的特殊曲线, 在一定程度上极大丰富了曲线的变形效果.

关键词: 自由曲线; 平台伸缩函数; 区间峰值; 自由变形

Deformation of parametric curves based on platform extension function

Zhang Li¹, Yu Huifang¹, Tan Jieqing^{1,2}

1. School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China;

2. School of Computer and Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China

Abstract: **Objective** With the rapid development of science and technology, geometric modeling techniques for curves have recently gained significant research interest. According to the 2D and 3D freeform deformation of parametric curves and free curves, a new algorithm based on polynomial extension function with platform is proposed to obtain several deformation effects. The new deformation method possesses perfect properties such as interval peak, peak value and symmetries. Furthermore, it has the closure property for deformations of Bézier and NURBS curves which are the mainstream curves of present modeling system. **Method** A simple extension function is first presented. Unlike most existing freeform deformation methods, the proposed extension function has an ordinary polynomial form. Hence, this extension function does not include transcendental functions and complex functions. With this extension function, one new extension factor with extension and smoothing parameters is also established. This new extension factor constructed with the extension function possesses perfect

收稿日期: 2015-03-12; 修回日期: 2015-06-07

基金项目: 国家自然科学基金—广东联合基金重点项目 (U1135003); 国家自然科学基金项目 (61472466, 61100126)

第一作者简介: 张莉 (1976—), 女, 教授, 2009 年于合肥工业大学获计算机应用技术专业博士学位, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, E-mail: lizhang@hfut.edu.cn

Supported by: National Natural Science Foundation of China (61472466, 61100126)

properties, including interval peaks, peak values, and symmetries. Finally, the extension matrixes are applied to the parametric and freeform curves to obtain the global, local, periodic, and elastic deformation effects. This objective is achieved by adjusting the deformation intervals, extension parameters, smoothing parameters, and deformation directions. **Result** The deformation method remains self-enclosed when implemented on Bezier and NURBS curves, which are mainstream curves in CAGD. Several numerical examples show that the proposed method is easy to calculate and control and that it can be used repeatedly to achieve a large number of contour lines. **Conclusion** Compared with many freeform deformation methods, the proposed algorithm can be used for not only general 2D and 3D parametric curves but also freeform curves. Thus, it demonstrates extensive application scope. Because the extension function has perfect properties such as interval peak, peak value and symmetries, it can produce different kinds of special curves with angular points and cuspidal points which the other deformation method can't achieve. In sum, the proposed algorithm greatly enriches the deformation effects of curves.

Key words: free curve; platform extension function; interval peak; freeform deformation

0 引言

几何设计和计算机图形学等领域经常需要产生丰富多样、复杂的几何形状,变形的有效的手段之一。国内外众多的学者与科研人员把曲线与曲面自由变形作为重要的探究课题并取得丰富的成果。曲线变形本质上是曲线所在平面或空间上由线到线的映射,通常所说的曲线变形算法事实上是 Barr^[1]和 Sederberg 等人^[2]的算法的特殊应用或推广。研究者们给出了大量的算法解决参数曲线的变形与修改问题,如:Piegl^[3]提出有理 B 样条的形状修改算法和 Au 等人^[4]提出 NURBS 曲线形状修改算法,这些算法虽在局部变形方面具有很好的性质,可缺乏几何上的直观性,因此不便于操作者实际操作。西班牙学者 Sánchez-Reyes^[5]给出了 NURBS 曲线修改技术,它操作较方便,然而不易精确控制。综观这些算法,在改变变形幅度和变形方向、控制和确定待变形曲线的变形范围、确保变形前后曲线在边界处的连续性以及满足用户指定的光滑度等方面总有着或多或少不尽完善的地方。随着探索的不断深入,人们对 B 样条、NURBS 曲线等自由型曲线的变形和修改提出了新的算法,如程仙国等人^[6]从物理建模的角度,利用曲线变形能量最小化的思想,分别建立了待变形曲线内部能量和外载荷能量两个方程,从而控制 B 样条曲线变形,韩丽等人^[7]从物理学中力与力的密度角度出发对曲面进行变形,提高了交互性,但文献[6-7]都需要解复杂的约束方程。Li 等人^[8]运用带多个形状参数对非均匀 B 样条进行修改,Cao 等人^[9]提出了基于遗传算法的 NURBS

曲线形状修改等,但这些修改技术算法理论较深、计算起来相对复杂,并且不能用在常见的参数曲线上。Xu^[10]运用“曲线对”直接操作自由变形,冯结青等人^[11]受自然界(蛇在弯弯扭扭的路面爬走等)启发,获知实际生活中的有些变形与曲面的形状密切相关,针对这种情况的变形,他们给出了调控参数曲面的方法来实现变形的效果,从而进一步丰富了曲面变化的形状。Sánchez-Reyes 等人^[12]借助于“平行六面体格子”,采用类似 Hermite 逼近的算法实现了曲线和曲面的自由变形,这些文献分别借助于线、面、体等辅助工具来实现自由变形。除了以上提到几种自由变形方法,网格变形技术^[13]近几年来也越来越成为国内外学者研究讨论的话题并运用到实际中,但是这种方法需要很深的物理学知识。能否找到一种算法不需要借助相关的变形工具和很强的物理学知识,同时能对一般参数曲线和自由曲线进行简便的变形与修改?

为了解决上述问题,王小平等人^[14-15]运用伸缩因子形成变形矩阵,再将此矩阵乘待变形物体的表达式,即直接对待变形的物体施行仿射变换,从而对物体达到变形的目的。该算法简单,容易操控。但该算法的变形矩阵是由指数函数构成的,变形后的表达式为超越曲线、曲面^[14,15];而且伸缩因子仅在一点处取到峰值,因此在一定的程度上限制了变形后曲线的形状。为了解决伸缩因子只能够在单点处取到最大值的缺陷,宋来忠等人^[16]构造一种新的伸缩因子——对指数函数进行积分,能在一段区间上获得最大值,在某种程度上丰富了形状的多样性,但变形后仍为超越曲线。上面所提到的两类伸缩因子变形的算法所讨论的曲线仅是平面上的 2 维曲线,

2009 年刘植等人^[17]运用多项式构造伸缩因子,能够对平面上 2 维曲线和空间中的 3 维曲线进行变形,并且变形前后参数曲线的表达式一致,然而该伸缩因子只能在一点处达到最大值。陆友太等人^[18]在前人的基础上,针对空间曲面构造了能达到区域峰值的多项式伸缩因子,这种伸缩因子也是适用于曲线变形,但此算法不能产生多角点的曲线。

在文献[14-18]基础上,面向平面 2 维和空间 3 维参数曲线提出了一种新的带平台伸缩函数,基于其构造的伸缩因子不仅能在单点处达到峰值,而且在区域上也能达到峰值,其变形矩阵作用于 CAD/CAM 等人造型系统中的主流参数曲线(Bézier 曲线、NURBS 曲线)具有封闭性并具备了较好的运算效率。值得一提的是,峰值域大小可以自由选择,而且在峰值区间的两端,连续未必可导,故能够产生富含角点或尖点的目标曲线,如在工业设计中,可以设计各类齿轮的图形以及模拟水利工程中某些不规则的物件轮廓等。

1 平台伸缩函数和伸缩因子

1.1 伸缩函数

定义 1 设 m, n 为正整数, $[t_1, t_4]$ 上含参数 m, n 的平台伸缩函数为

$$f(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \cdot \frac{2t_2-t-t_1}{t_2-t_1} \right)^m & t \in [t_1, t_2] \\ 1 & t \in [t_2, t_3] \\ \left(\frac{t-2t_3+t_4}{t_4-t_3} \cdot \frac{t_4-t}{t_4-t_3} \right)^n & t \in [t_3, t_4] \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

式中, $[t_1, t_4]$ 为支撑区间, t_2, t_3 ($t_2 \leq t_3$) 是支撑区间内的任意两点, m, n 称作光滑参数。

平台伸缩函数 $f(t)$ 具备如下性质:

1) 区间峰值性。 $t \in [t_2, t_3]$ 时, 取得最大值, 即 $f_{\max}(t) = 1$, 见图 1(a)。

2) 端点连续性, 即

$$f'_+(t_1) = f''_+(t_1) = \cdots = f^{(m-1)}_+(t_1) = 0;$$

$$f'_-(t_4) = f''_-(t_4) = \cdots = f^{(n-1)}_-(t_4) = 0。$$

3) 最小值与单峰性。在 t_1, t_4 和支撑区间外取得最小值, 即 $f_{\min}(t) = 0$; $t_2 = t_3$ 时, $f(t)$ 有单点峰值性, 见图 1(b)。

4) 对称性。 $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$, 且 $m = n$ 时, $f(t)$ 关于 $\frac{t_2+t_3}{2}$ 对称, 见图 1(c)。

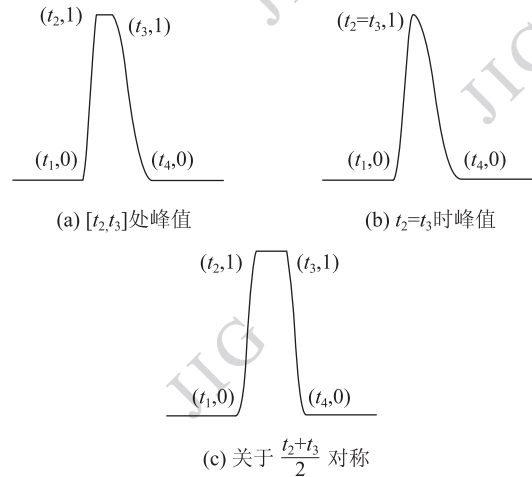


图 1 3 种不同情况下伸缩函数的图形

Fig. 1 Figures of extension function under three different conditions

证明: 易证 1), 3), 4) 下面仅证 2)。记:

$$g(t) = g = \frac{t-t_1}{t_2-t_1} \cdot \frac{2t_2-t-t_1}{t_2-t_1},$$

$$G(t) = \left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \cdot \frac{2t_2-t-t_1}{t_2-t_1} \right)^m = [g(t)]^m。$$

讨论

$$f'_+(t_1) = f''_+(t_1) = \cdots = f^{(m-1)}_+(t_1) = 0;$$

即讨论

$$G'(t_1) = G''(t_1) = G'''(t_1) = \cdots = G^{(m-1)}(t_1) = 0。$$

易知

$$g(t_1) = 0, G(t_1) = 0$$

$$g'(t) = g' = \frac{2(t_2-t)}{(t_2-t_1)^2}$$

$$g''(t) = g'' = \frac{-2}{(t_2-t_1)^2}$$

计算 $G(t)$ 的导数为

$$G'(t) = mg^{m-1}g'$$

$$G''(t) = m(m-1)g^{m-2}(g')^2 + mg^{m-1}g''$$

$$G'''(t) = m(m-1)(m-2)g^{m-3}(g')^3 +$$

$$3m(m-1)g^{m-2}g'g''$$

显然 $G(t)$ 的导数第一项均含有 $g(t)$ 的方幂, 代入 t_1 , 注意到 $g(t_1) = 0$, 有

$$G'(t_1) = G''(t_1) = G'''(t_1) = \cdots = G^{(m-1)}(t_1) = 0$$

即

$$f'_+(t_1) = f''_+(t_1) = \cdots = f^{(m-1)}_+(t_1) = 0$$

同理可以证明

$$f'_-(t_4) = f''_-(t_4) = \cdots = f^{(n-1)}_-(t_4) = 0$$

证毕。

1.2 平台伸缩因子

定义2 令 $E(t) = 1 + hf(t)$, $E(t)$ 被称为 $[t_1, t_4]$ 平台的伸缩因子, h 称作伸缩参数。

由带平台伸缩函数的性质, 不难得出带平台伸缩因子具备以下性质:

1) 区间峰值性。 $E(t)$ 最大值在 $t \in [t_2, t_3]$ 取得。

2) 端点连续性, 即

$$E'_+(t_1) = E''_+(t_1) = \cdots = E^{(n-1)}_+(t_1) = 0;$$

$$E'_-(t_4) = E''_-(t_4) = \cdots = E^{(n-1)}_-(t_4) = 0。$$

3) 最小值与单峰性。在端点 t_1, t_4 和支撑区间外都有 $E(t) = 1$ 。

4) 对称性。

2 平面上平台伸缩因子的数学模型与实例展示

2.1 数学模型

设 $L(t) = (x(t), y(t))^T (t \in [a, b])$ 为满足 $C^r (r \geq 1)$ 阶连续的平面曲线 (为方便后文的描述, 将平面曲线表示为 2 维列向量), 其中光滑参数 $m, n \leq r+1$, 支撑区间为 $[t_1, t_4]$, 取平面上任意一点为变形中心, 记为 $o' = (x_0, y_0)$ 。定义伸缩因子 $E_{ij}(t)$ 为

$$E_{ij}(t) = 1 + h_{ij}f(t), i, j = 1, 2$$

$$N = [e_1, e_2]^{-1} [[e_1, e_2]^T]^{-1}$$

式中, h_{ij} 为伸缩参数, e_1, e_2 为方向向量, 则称

$$D = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} - 1 \\ E_{21} - 1 & E_{22} \end{bmatrix}$$

为伸缩矩阵, $F = [e_1, e_2]DN[e_1, e_2]^T$ 为变形矩阵。方向向量 e_1, e_2 是线性不相关的, 一般情况下取 $e_1 = [1, 0]^T, e_2 = [0, 1]^T$, 此时 $F = D$ 。

定理1 将变形矩阵 F 乘待变形曲线 $L(t)$ 获得变形后曲线

$$L_d(t) = F(L(t) - o') + o' \quad (2)$$

则 $L_d(t)$ 在 t_1, t_4 处分别满足 C^{m-1}, C^{n-1} 阶连续。

证明: 记

$$D = D(t) = \begin{bmatrix} E_{11}(t) & E_{12}(t) - 1 \\ E_{21}(t) - 1 & E_{22}(t) \end{bmatrix}$$

由定义2的性质1)可得

$$D(t_1) = I = D(t_4)$$

式中, I 为 2 阶单位矩阵, 对 $D(t)$ 求一阶导, 可得

$$D'(t) = \begin{bmatrix} E'_{11}(t) & E'_{12}(t) \\ E'_{21}(t) & E'_{22}(t) \end{bmatrix}$$

由定义2的性质2)可得

$$D'_+(t_1) = D''_+(t_1) = \cdots = D^{(m-1)}_+(t_1) = 0$$

$$D'_-(t_4) = D''_-(t_4) = \cdots = D^{(n-1)}_-(t_4) = 0$$

对式(2)关于参数 t 求 $k (k \leq m-1, n-1 \leq r)$ 次导, 可以获得

$$L_d^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^k C_k^i(e_1, e_2) D^{(i)}(t) N(e_1, e_2)^T L^{(k-i)}(t) \quad (3)$$

分别将 t_1, t_4 替换式(3)中 t , 并注意在非支撑区间上, 待变形曲线和变形后曲线表达一致, 从而得,

$$L_d^{(k)}(t_1) = L^{(k)}(t_1), 0 \leq k \leq m-1$$

$$L_d^{(k)}(t_4) = L^{(k)}(t_4), 0 \leq k \leq n-1$$

证毕。

定理2 若平面上待变形曲线 $L(t)$ 为 NURBS (或 Bézier 曲线), 经变形矩阵变形后曲线 $L_d(t)$ 仍为 NURBS 曲线 (或 Bézier 曲线)。即本文中的操作方法对 NURBS 曲线, Bézier 曲线, 变形前后保持一致, 即具备封闭性。

证明: 首先将支撑区间转换为 $[0, 1]$ 。借助变换 $\bar{t} = \frac{t-t_1}{t_4-t_1}$, 于是定义在 $[t_1, t_4]$ 的变量 t 转换为定义在 $[0, 1]$ 的 $\bar{t}$ 。在则前文定义的带平台伸缩因子可转化成以下关于 $\bar{t}$ 的带平台的伸缩因子, 即

$$E(\bar{t}) =$$

$$\begin{cases} 1 + h \left(\frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_1} \bar{t} \right)^m \left(2 - \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_1} \bar{t} \right)^m & \bar{t} \in [0, \frac{t_2 - t_1}{t_4 - t_1}] \\ 1 + h & \bar{t} \in [\frac{t_2 - t_1}{t_4 - t_1}, \frac{t_3 - t_1}{t_4 - t_1}] \\ 1 + h \left(\frac{(t_4 - t_1)\bar{t} + t_1 - 2t_3 + t_4}{t_4 - t_3} \right)^n \left(\frac{(t_4 - t_1)(1 - \bar{t})}{t_4 - t_3} \right)^n & \bar{t} \in [\frac{t_3 - t_1}{t_4 - t_1}, 1] \\ 1 & \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

若待变形曲线 $L(\bar{t}) = \sum_{i=0}^N p_i B_i^N(\bar{t})$, 它的控制顶点为 $p_i, i = 0, 1, \dots, N$, 探究最容易的变形

$E(\bar{t})L(\bar{t})$ 。当 $\bar{t} \in [0, \frac{t_2-t_1}{t_4-t_1}]$ 时,

$$E(\bar{t})L(\bar{t}) = \left[1 + h \left(\frac{t_4-t_1}{t_2-t_1} \bar{t} \right)^m \left(2 - \frac{t_4-t_1}{t_2-t_1} \bar{t} \right)^m \right] \cdot \sum_{i=0}^N p_i B_i^N(\bar{t}) = \sum_{i=0}^{N+2m} q_i \bar{t}^i = \sum_{i=0}^{N+2m} a_i B_i^{N+2m}(\bar{t})$$

倒数第 2 步是把 Bernstein 基转化成幂基表示的多项式形式,最后一步是相反的操作。表达式中的系数 $q_i (i=0, 1, \dots, N+2m)$ 和控制顶点 a_i 需要通过基与基的转换公式以及恰当的代数计算求出。同理

当 $\bar{t} \in [\frac{t_3-t_1}{t_4-t_1}, 1]$ 时,有

$$E(\bar{t})L(\bar{t}) = \sum_{i=0}^{N+2n} b_i B_i^{N+2n}(\bar{t})$$

当 $\bar{t} \in [\frac{t_2-t_1}{t_4-t_1}, \frac{t_3-t_1}{t_4-t_1}]$ 上,有

$$E(\bar{t})L(\bar{t}) = \sum_{i=0}^N c_i B_i^N(\bar{t})$$

c_i 为控制顶点。

综上所述,变形获得次数为 $N+2 \max(m, n)$ 的分段 Bézier 曲线,则带平台伸缩因子的操作算法对 Bézier 曲线具备封闭性。类似可证变形操作对 NURBS 曲线具备封闭性。

2.2 复杂变形

2.2.1 周期变形

为了获得更加丰富美观的曲线形状,对平面上的参数曲线借助平移、压缩的算法能够产生周期变形,即只要将式(2)中的带平台伸缩因子 $E(t)$ 进行以下修改。

定义 3 设 m, n, w 为正整数,记第 i 个支撑区间的左端点为 $\{t_{i1}\}$,右端点为 $\{t_{i4}\}$,若距离均匀分布,则距离参数 $d_i = \frac{t_4-t_1}{w}, i=1, \dots, w$,且 $t_{i1} = t_1 + (i-1)d_i, t_{i2} = t_{i1} + \frac{d_i}{3}, t_{i3} = t_{i1} + \frac{2d_i}{3}, t_{i4} = t_1 + i \cdot d_i$,定义分段函数为

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-t_{i1}}{t_{i2}-t_{i1}} \cdot \frac{2t_{i2}-t-t_{i1}}{t_{i2}-t_{i1}} \right)^m & t \in [t_{i1}, t_{i2}] \\ 1 & t \in [t_{i2}, t_{i3}] \\ \left(\frac{t-2t_{i3}+t_{i4}}{t_{i4}-t_{i3}} \cdot \frac{t_{i4}-t}{t_{i4}-t_{i3}} \right)^n & t \in [t_{i3}, t_{i4}] \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

则称 $\hat{E}(t) = 1 + h\hat{f}(t)$ 为 $[t_1, t_4]$ 上周期为 $\frac{t_4-t_1}{w}$ 的平台伸缩因子。

类似式(2),变形后曲线 $L_d(t)$ 为

$$L_d(t) = \hat{F}(L(t) - o') + o' \quad (6)$$

式中

$$\hat{F} = [e_1, e_2] \hat{D} N[e_1, e_2]^T$$

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} \hat{E}_{11} & \hat{E}_{12} - 1 \\ \hat{E}_{21} - 1 & \hat{E}_{22} \end{bmatrix}$$

一般情况下,取

$$\sum_{i=1}^w d_i = t_4 - t_1, t_{i1} = t_1, t_{i1} = t_1 + \sum_{j=1}^{i-1} d_j (i=2, \dots, w), t_{i4} = t_1 + \sum_{j=1}^i d_j, t_{i2} \leq t_{i3} \in (t_{i1}, t_{i4}), i=1, \dots, w,$$

此时 $\hat{E}(t)$ 为 $[t_1, t_4]$ 上周期为 w 的随机平台伸缩因子。变形后曲线表达式类似式(6),可以产生不规则的非周期变形。

2.2.2 连续变形

对待变形曲线共进行 k 次变形,设第 $i(1, 2, \dots, k)$ 次变形中心为任意一点 o'_i ,变形的方向为任意两个线性不相关的单位向量 e_{i1}, e_{i2} ,支撑区间为 $[t_{i1}, t_{i4}]$,从而变形矩阵可表示为

$$F_i = [e_{i1}, e_{i2}] D_i N_i [e_{i1}, e_{i2}]^T (i=1, 2, \dots, k)$$

式中, $N_i = (e_{i1}, e_{i2})^{-1} [(e_{i1}, e_{i2})^T]^{-1}$,将这 k 次变形叠加起来,那么变形后的曲线 $L_d(t)$ 与待变形曲线 $L(t)$ 满足递推关系

$$L_{d,i}(t) = F_i(L_{d,i-1}(t) - o'_i) + o'_i \quad (7)$$

特别的 $L_{d,0}(t) = L(t)$ 。当 o'_i 统一成点 o' 时,变形前后曲线间具备关系式为

$$L_d(t) = \left(\prod_{i=1}^k F_i \right) (L(t) - o') + o' \quad (8)$$

2.3 方法的几何意义

设 l_1, l_2 为线性无关的单位向量, o' 为平面上任意一点,曲线上的每点 $L(t)$ 在新坐标系 $[o', l_1, l_2]$ 下的坐标为 $(p_1, p_2)^T$,可得 $L(t) - o' = p_1 l_1 + p_2 l_2$ 。若记变形矩阵 $F = (d_{ij})_{2 \times 2}$,那么

$$L_d(t) - o' = \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 d_{ij} p_j \right) l_i = [l_1, l_2] F [p_1, p_2]^T$$

可见,式(2)所表达的几何意义是:待变形曲线位于支撑区间内的每一点 $L(t)$ 在仿射坐标系 $[o', l_1, l_2]$ 下对向量 $L(t) - o'$ 进行仿射变换,得到对应的坐标

为 $[p_1, p_2]^T$, 此时变换矩阵就是变形矩阵 F 。

2.4 变形与控制

不同的变形矩阵 F 将获得不同的变形效果。

1) 改变 $|h_{ii}| (i=1, 2)$ 的大小, 变换 $h_{ii} (i=1, 2)$ 的符号, 分别改变曲线伸缩的长短与曲线变形指向。

2) m, n 的大小可调节变形曲线在 t_1, t_4 处的光滑度, m, n 越大, 变形前后曲线越靠近。

3) 改变 o' , 即改变曲线的相对变形中心。

4) 峰值区间依赖于 t_2, t_3 取值, 当 $t_2 \neq t_3$ 时, 峰值区间依赖 $t_3 - t_2$ 的值; 当 $t_2 = t_3$ 时, 希望变形幅度最大的点在 t_2 处取到, 峰值点依赖 t_2 的取值。

5) 改变 t_1, t_4 的值, 形变发生区间受到了限制, 从而可以按照用户要求进行整体与局部变形。

6) 改变 e_1, e_2 , 变形方向受到了控制, 从而能够按照用户要求的方向进行变化。

7) 改变 h_{12} 或 h_{21} , 曲线沿 e_1 或 e_2 进行剪切变形。

8) 根据 t_2, t_3 取值相同与否, 可获得区间峰值或单点峰值变形。

2.5 数值实例

采用 $L_1(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$ 为例, 展现取不同的调控参数获得的各种变形结果。图2表明参数 m, n 能够调节变形曲线在 t_1, t_4 处的光滑度; 图3展示改动 o' , 控制曲线变形中心的效果图, 虚线展现以 $(0, 0)$ 为变形中心, 实线展现以 $(0.5, 0.5)$ 为变形中心。

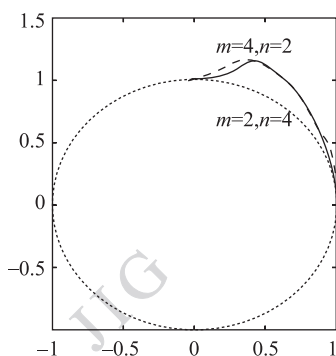


图2 改变 m, n 的效果

Fig. 2 The deformations with changing of m, n

图4展现对峰值域大小的进行调控, 图5展现改变峰值点的效果。

图6展现 h_{22} 取值不同能够调控曲线伸缩的长短与曲线变形指向效果图; 图7展现不同变形方向

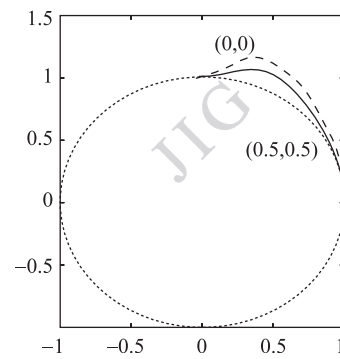


图3 变动 o 的效果

Fig. 3 The deformations with changing of o

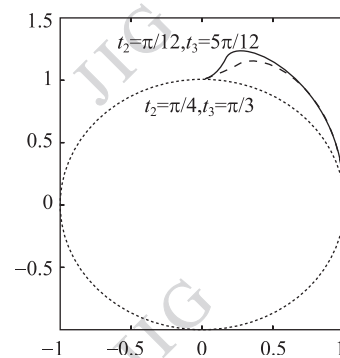


图4 峰值域改变的效果

Fig. 4 The deformations with changing of interval peak

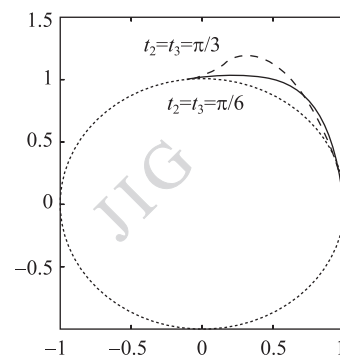


图5 峰值点改变的效果

Fig. 5 The deformations with changing of peak

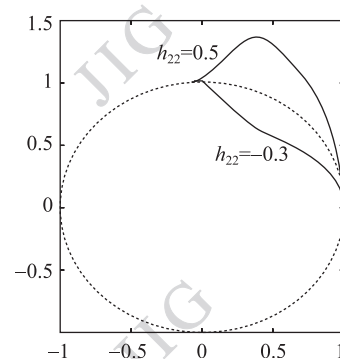


图6 不同 h_{22} 的效果图

Fig. 6 The deformations with changing of h_{22}

的变形结果,实线表示沿笛卡儿方向的变形,虚线展现沿 $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$ 变形。图 8 展现 h_{12} 或 h_{21} 能够调节曲线沿 $\mathbf{e}_1$ 或 $\mathbf{e}_2$ 进行剪切的效果图。

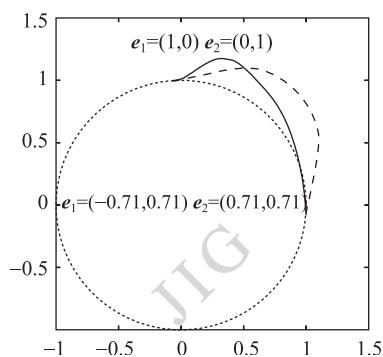
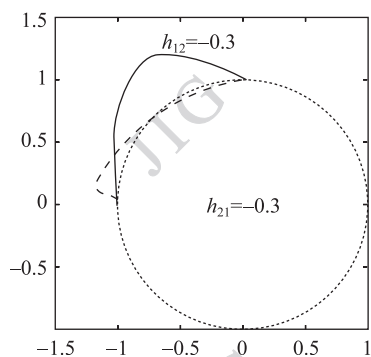
图 7 沿 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 方向变形Fig. 7 The deformations along $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ directions图 8 沿 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 方向剪切Fig. 8 The shearing effects along $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ directions

图 9 和图 10 分别展现周期变形,前者最值在区间取得,后者最值在点与区间取得;图 11 展现对 Bézier 曲线(虚线)进行变形,画出更加流畅的字母 S(虚线与实线组合);图 12 展现对 B 样条曲线(虚线)的变形,获得形如“小鱼”曲线(实线);

四叶草 $L_2(t) = (\cos(2t)\cos(4t), \sin(2t) \times \cos(4t)), t \in [0, 2\pi]$ 图 13 展现了形变发生区间受

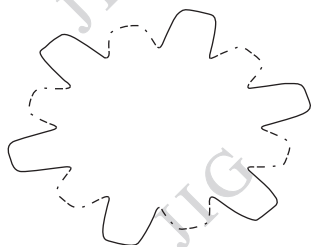


图 9 周期变形效果 1

Fig. 9 Periodic deformation effects one

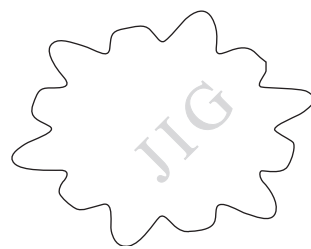


图 10 周期变形效果 2

Fig. 10 Periodic deformation effects two

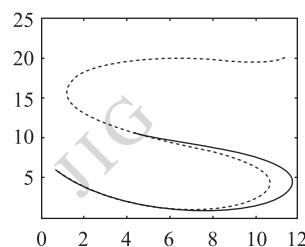


图 11 字母“S”变形

Fig. 11 The deformation of “S”

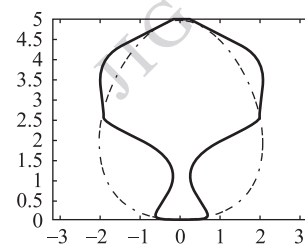


图 12 “小鱼”曲线

Fig. 12 “Fish” curve

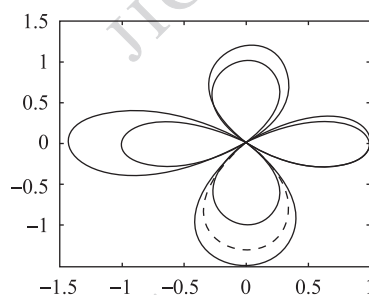


图 13 支撑区间调控

Fig. 13 The control of the support interval

到了限制,从而可以按照用户要求进行整体(实线)与局部变形(虚线)。

2.6 实际生活中的应用

本文算法在几何造型、CAD/CAM、计算机动画等相联系的领域有很强地使用价值,系统采用 NURBS 曲线(而 Bézier 曲线是 NURBS 曲线特例),由定理 1 可知本文算法对 Bézier 曲线和 NURBS 曲

线具备封闭性,变形后的曲线能够很好地与现有造型统兼容;在陶瓷工艺外形设计,商标等设计中,为了得到一些艺术效果,可采用周期变形的算法,得到如图14中的花瓣、小蜜蜂、四叶草造型。在艺术广告的创作时,可以从人们审美的角度设计出形似轮

齿的样子的图形,见图15;对圆周曲线运用本文算法,可以模拟混凝土骨料的轮廓线,见图16。从图14中可以看出“多边形”的轮廓是弯曲的,从而能够较好吻合实际的碎石骨料,且还知道每一块骨料的参数方程。

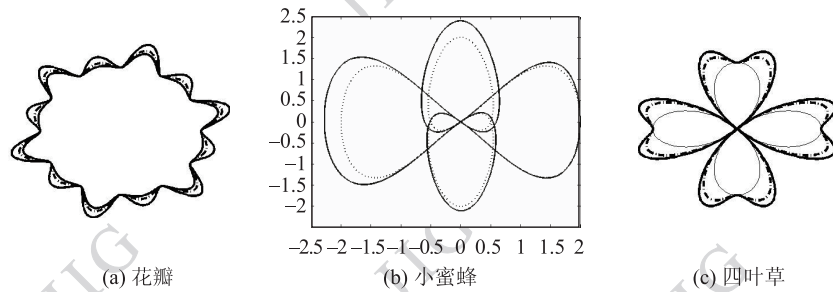


图14 艺术品设计造型

Fig. 14 Design and modelings of artworks

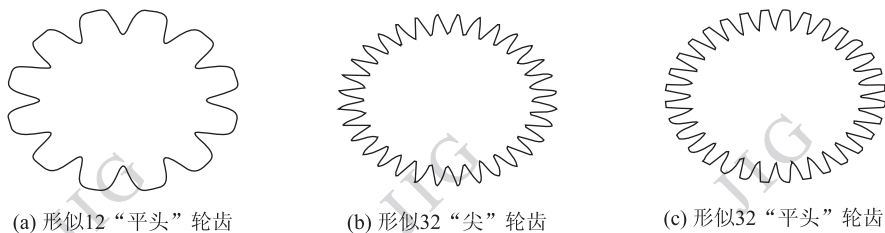


图15 齿轮曲线

Fig. 15 The shapes of the gear curves

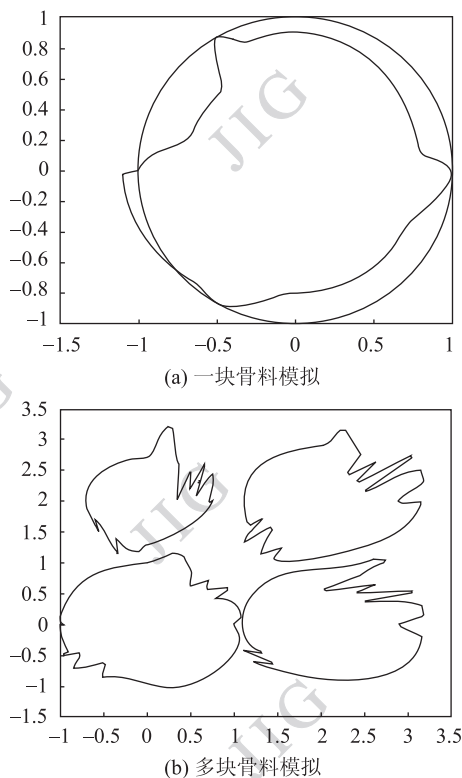


图16 骨料轮廓线模拟

Fig. 16 The simulated aggregate contour lines

3 空间上平台伸缩因子与实例

3.1 数学模型

设 $L(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T (t \in [a, b])$ 为空间上满足 $C^r (r \geq 1)$ 类曲线, 支撑区间为 $[t_1, t_4]$, 取空间上任意一点 $o'(x_0, y_0, z_0)$ 为变形中心, 令 $E_{ij}(t) = 1 + h_{ij}f(t) (i, j = 1, 2, 3), N = [e_1, e_2, e_3]^{-1} [[e_1, e_2, e_3]^T]^{-1}$, 则

$$D = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} - 1 & E_{13} - 1 \\ E_{21} - 1 & E_{22} & E_{23} - 1 \\ E_{31} - 1 & E_{32} - 1 & E_{33} \end{bmatrix}$$

被称作伸缩矩阵, $F = [e_1, e_2, e_3]DN[e_1, e_2, e_3]^T$ 被称作变形矩阵。方向向量 e_1, e_2, e_3 是线性不相关的, 当 $e_1 = [1, 0, 0]^T, e_2 = [0, 1, 0]^T, e_3 = [0, 0, 1]^T$, 有 $F = D$ 。将 F 作用于 $L(t)$, 变形后的曲线参数表达式 $L_d(t)$ 和 $L(t)$ 满足:

$$L_d(t) = F(L(t) - o') + o' \quad (9)$$

定理3 在 F 的作用下得到的 $L_d(t)$ 在 t_1, t_4 处

分别满足 C^{m-1}, C^{n-1} 阶连续。

定理4 本文中的操作方法对空间 Bézier 曲线, NURBS 曲线变形前后的曲线类型保持一致, 即具备封闭性。

定理3 和定理4 的证明类似于前文定理1 和定理2 的证明。

改变和控制空间上参数曲线形状的算法几乎与改变和控制平面上曲线变形的算法相同, 因此, 它的周期变形, 叠加变形在这就不再详细的论述。

3.2 实例展示

为了展现本文算法对空间曲线的变形效果, 以 $L_3(t) = [\cos t, \sin t, t]^T$, $L_4(t) = [2t\cos(3t), 2t\sin(3t), -t^{1.875}]^T$ 两条曲线为例, ($t \in [0, 2\pi]$)。图17 展现 h_{33} 取值不同能够调控曲线伸缩的长短与曲线变形指向效果图; 图18 展现 t_2, t_3 的不同取值, 能够使带平台的伸缩因子在区间或点上取到最大值的变形效果图; 沿 e_3 剪切见效果见图19; 图20 模拟蛇爬行时抬头; 图21 表示对空间 Bézier 曲线(红线)进行变形, 画出更加优美的字母 S(绿线); 图22 表示对空间 B 样条曲线(虚线)的变形, 获得形如字母 m(实线)曲线。

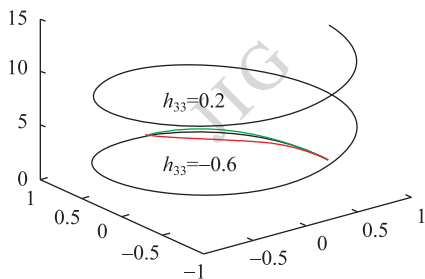


图17 h_{33} 对变形方向及幅度的控制

Fig. 17 The controlling of deformation direction and amplitude with respect to h_{33}

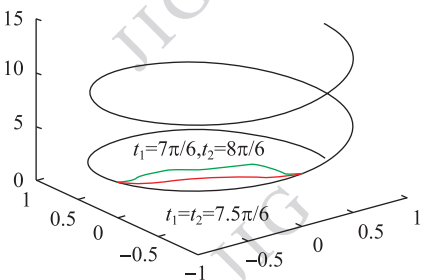


图18 不同峰值的效果

Fig. 18 The effects of different peaks

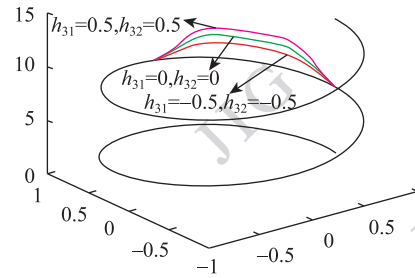


图19 沿 e_3 剪切

Fig. 19 Shearing along e_3 direction

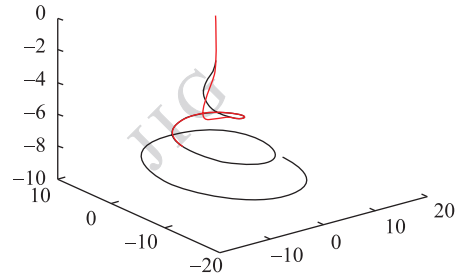


图20 模拟“蛇”抬头

Fig. 20 Simulation of “snake” raising head

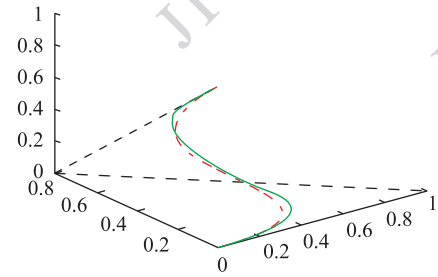


图21 变形实施在空间多项式基曲线上

Fig. 21 Deformation curve in space polynomial basis

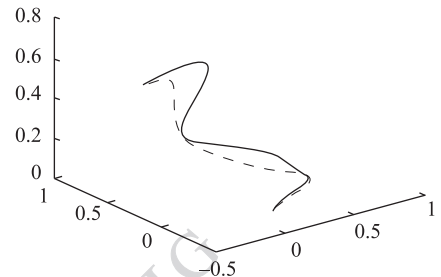


图22 变形实施在空间 B 样条基曲线上

Fig. 22 Deformation imposed on the space of B-spline curve

4 结 论

本文算法的几何本质是逐点进行仿射变换, 即相应空间中点到点的映射。算法依次定义了平台伸缩函数、平台伸缩因子, 接着运用伸缩因子构造变形

矩阵并用它乘待变形参数曲线的表达式,进而获得满足用户期待的各种形状的曲线。与文献[1-13]比较:1)伸缩函数为简单多项式函数,数学背景简单,只需拥有基本的数学知识就可以操作;2)数值实例可以看出调控参数具备显而易见的几何意义,可以获得丰富多彩的曲线与轮廓线;3)从伸缩函数的定义可以看出待变曲线仅在支撑区间内进行变形,在支撑区间外,待变形曲线保持原样,这样能够精确地掌控变形范围。与文献[14-18]比较:1)伸缩因子不仅能在单点处或区域上达到最大值,而且在特殊情况下具有对称性;2)本文算法不仅可以用于一般的平面与空间参数曲线,还可以用于自由型曲线,扩大了适用范围;3)变形操作对CAD/CAM中的主流参数曲线——NURBS和Bézier曲线具备封闭性,无需运用逼近算法对变形后的曲线进行转化,方便使用且大大降低了计算量;4)可以获得含尖点与角点的曲线且能够对不规则物体的轮廓线进行模拟。本文算法也有不足之处,即伸缩函数峰值区间的两端点处仅满足连续性条件,并不可导。然而正是由于这种不足,极大丰富了本文算法的变形效果,产生诸如含各类角点、尖点的形似齿轮曲线等。可见,在实际设计中,对有缺陷的算法也可以适当借鉴,发现其积极的一面。

参考文献 (References)

- [1] Barr A H. Global and local deformation of solid primitive [J]. Computer Graphics, 1984, 18(3): 21-30.
- [2] Sederberg T W, Parry R. Free-form deformations of solid geometric models [J]. Computer Graphics, 1986, 20(4): 151-160.
- [3] Piegl L. Modifying the shape of rational B-splines. Part 1: curves [J]. Computer-Aided Design, 1989, 21(8): 509-518.
- [4] Au C K, Yuen M M F. Unified approach to NURBS curve shape modification [J]. Computer-Aided Design, 1995, 27(2): 85-93.
- [5] Sánchez-Reyes J. A simple technique for NURBS shape modification [J]. Computer Graphics and Applications, IEEE, 1997, 17(1): 52-59.
- [6] Cheng X G, Liu W J. Shape modification of B-spline curve via external loads [J]. Journal of Image and Graphics, 2011, 16(5): 898-902. [程仙国, 刘伟军. 外载荷的B样条曲线变形[J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(5): 898-902.] [DOI:10.11834/jig.20110528]
- [7] Han L, Qi R H. Interactive B-spline surface modeling based on force density method [J]. Journal of Image and Graphics, 2009, 14(9): 1900-1907. [韩丽, 祁瑞华. 基于力密度的交互式B样条曲面变形[J]. 中国图象图形学报, 2009, 14(9): 1900-1907.] [DOI:10.11834/jig.20090930]
- [8] Li Y H, Mu G W, Guo Z. Shape modification of NURBS curves using genetic algorithm [J]. Advanced Materials Research, 2012, 532: 1450-1454.
- [9] Cao J, Wang G. Non-uniform B-spline curves with multiple shape parameters [J]. Journal of Zhejiang University SCIENCE C, 2011, 12(10): 800-808.
- [10] Xu G, Hui K, Ge W, et al. Direct manipulation of free-form deformation using curve-pairs [J]. Computer-Aided Design, 2013, 45(3): 605-614.
- [11] Feng J Q, Peng Q S, Ma L Z. A new free-form deformations through the control of parametric surfaces [J]. Computer and Graphics, 1996, 20(4): 531-539.
- [12] Sánchez-Reyes J, Chacón J M. Hermite approximation for free-form deformation of curves and surfaces [J]. Computer-Aided Design, 2012, 44(5): 445-456.
- [13] Dong H W. Survey of mesh deformation [J]. Journal of Image and Graphics, 2011, 16(12): 2095-2104. [董洪伟. 网格变形综述[J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(12): 2095-2104.] [DOI:10.11834/jig.20111201]
- [14] Wang X P, Ye Z L, Meng Y Q, et al. Free-form deformation based on extension factor for parametric curve [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2002, 14(1): 66-69. [王小平, 叶正麟, 孟雅琴, 等. 基于伸缩因子的参数曲线自由变形[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14(1): 66-69]
- [15] Wang X, Ye Z, Meng Y, et al. Space deformation of parametric surface based on extension function [J]. International Journal of CAD/CAM, 2002, 1(1): 23-32.
- [16] Song L Z, Peng G, Yang W Y, et al. A new extension factor for free-form deformation of parametric curves [J]. Journal of Engineering Graphics, 2009, 30(3): 87-93. [宋来忠, 彭刚, 杨文颖等. 用于参数曲线自由变形的新的伸缩因子[J]. 工程图学学报, 2009, 30(3): 87-93.]
- [17] Liu Z, Wu H Y, Zhang L, et al. Method of polynomial factor for free-form deformation of parametric curves and surfaces [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2009, 21(3): 412-418. [刘植, 邬弘毅, 张莉, 等. 参数曲线曲面自由变形的多项式因子方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(3): 412-418.]
- [18] Lu Y T, Zhou L S, Wang Z G, et al. Free-form deformation based on polynomial extension factor for parametric surfaces [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2012, 23(5): 609-613. [陆友太, 周来水, 王志国, 等. 基于多项式伸缩因子的参数曲面自由变形[J]. 中国机械工程, 2012, 23(5): 609-613.]
- [19] Wang G J, Wang G Z, Zheng J M. Computer Aided Geometric Design [M]. Beijing: China Higher Education Press Beijing, 2001: 14-15. [王国瑾, 汪国昭, 郑建民. 计算机辅助几何设计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 14-15.]