



JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS

主办: 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

2016
04
VOL.21

ISSN1006-8961
CN11-3758/TB



图像颜色扩散 P475



第21卷第4期（总第240期）
2016年4月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊
中文核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院
主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

主 编 李小文
编辑出版《中国图象图形学报》编辑出版委员会
邮政信箱 北京9718信箱
邮 编 100101
电子信箱 jig@radi.ac.cn
电 话 010-64807995
网 址 www.cjig.cn

广告经营许可证 京朝工商广字第0361号
总 发 行 北京报刊发行局
订 购 全国各地邮局
海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司
(邮政信箱: 北京399信箱 邮编: 100048)
印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences
Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS
China Society of Image and Graphics
Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

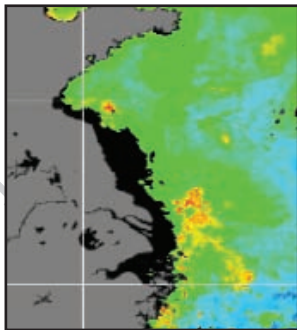
Editor-in-Chief LI Xiaowen
Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of Image and Graphics
P.O.Box 9718, Beijing, P.R.China
Zip code 100101
E-mail jig@radi.ac.cn
Telephone 010-64807995
Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals
Domestic All Local Post Offices in China
Overseas China International Book Trading Corporation
(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China)
Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

CN 11-3758/TB
ISSN 1006-8961
CODEN ZTTXFZ
国外发行代号 M1406
国内邮发代号 82-831
国内定价 60.00元



利用Stein-Weiss解析函数性质的3维血管分割(第434页)



利用MODIS数据估计中国黄东海区域测深参数(第451页)



特征学习的单幅图像去雾算法(第464页)

综述

图像恢复中的凸能量泛函正则化模型综述	
李旭超, 边素轩, 李玉叶	405

图像处理和编码

图像自适应分块的压缩感知采样算法	
曹玉强, 柏森, 曹明武	416

计算机图形学

集多种特性的三次三角伪B样条	
李军成, 宋来忠, 刘成志	425

医学图像处理

利用Stein-Weiss解析函数性质的3维血管分割	
吴明珠, 王晓蝉, 李兴民	434
血管内光声图像的时间反演重建方法	
韩朵朵, 孙正, 苑园	442

遥感图像处理

利用MODIS数据估计中国黄东海区域测深参数	
申二华, 张永生, 李凯, 王俊超	451
下视SAR数据3维表面重建	
李晓阳, 祝海江, 胡伟, 李伟, 谭维贤	456

第8届全国几何设计与计算学术会议专栏

特征学习的单幅图像去雾算法	
麦嘉铭, 王美华, 梁云, 蔡瑞初	464
有效重采样的颜色编辑扩散	
王栋, 曾嘉晟, 吴金中, 杜骏毅, 刘财兴	475
多尺度有理分形的图像插值算法	
姚勋祥, 张云峰, 宁阳, 刘一方	482
二阶收敛的光滑正则化压缩感知信号重构方法	
杜卓明, 李洪安, 康宝生, 叶飞跃	490
交互更新模式的量子遗传算法的几何约束求解	
曹春红, 易荣庆, 曹海龙, 韩春燕	499
多项式方程区间内重根的快速判定和裁剪	
陈小雕, 张玉宝, 杨超, 王毅刚	510
连续等距区间上积分值的二次样条插值	
吴金明, 刘圆圆, 张晓磊	520
插值曲率线的直纹面可展设计	
李彩云, 项昕, 朱春钢	527

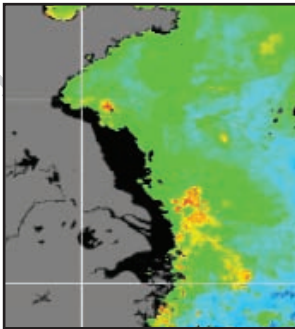
第十一届图像图形技术与应用学术会议 (IGTA2016) 征稿通知	532
-----------------------------------	-----

CONTENTS

JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



New 3D vessel segmentation algorithm using the Stein-Weiss analytic function properties (P434)



Estimation of the Yellow Sea and East China Sea hydrographic parameters based on MODIS data(P451)



Single image dehazing algorithm by feature learning(P464)

Review

Survey on convex energy functional regularization model of image restoration	
Li Xuchao, Bian Suxuan, Li Yuye	405

Image Processing and Coding

Image compression sampling based on adaptive block compressed sensing	
Cao Yuqiang, Bai Sen, Cao Mingwu.....	416

Computer Graphics

Cubic trigonometric pseudo B-spline combining multiple characteristics	
Li Juncheng, Song Laizhong, Liu Chengzhi	425

Medical Image Processing

New 3D vessel segmentation algorithm using the Stein-Weiss analytic function properties	
Wu Mingzhu, Wang Xiaochan, Li Xingmin	434
Time-reversal based reconstruction of intravascular photoacoustic images	
Han Duoduo, Sun Zheng, Yuan Yuan	442

Remote Sensing Image Processing

Estimation of the Yellow Sea and East China Sea hydrographic parameters based on MODIS data	
Shen Erhua, Zhang Yongsheng, Li Kai, Wang Junchao.....	451
Downward-looking 3D SAR data surface reconstruction	
Li Xiaoyang, Zhu Haijiang, Hu Wei, Li Wei, Tan Weixian.....	456

Column of GDC'2015

Single image dehazing algorithm by feature learning	
Mai Jiaming, Wang Meihua, Liang Yun, Cai Ruichu	464
Color edit propagation by efficient resampling	
Wang Dong, Zeng Jiasheng, Wu Jinzhong, Du Junyi, Liu Caixing.....	475
Multi-scale feature image interpolation based on a rational fractal function	
Yao Xunxiang, Zhang Yunfeng, Ning Yang, Liu Yifang	482
Recovery method of compressed sensing signals based on quadratic convergence regularization with a smooth function	
Du Zhuoming, Li Hongan, Kang Baosheng, Ye Feiyue.....	490
Solving geometric constraint based on the interactive update mode quantum genetic algorithm	
Cao Chunhong, Yi Rongqing, Cao Hailong, Han Chunyan	499
Cubic clipping method for computing multiple roots of polynomials	
Chen Xiaodiao, Zhang Yubao, Yang Chao, Wang Yigang	510
Quadratic spline interpolation from the integral values of successive subintervals	
Wu Jinming, Liu Yuanyuan, Zhang Xiaolei.....	520
Design of a ruled developable surface through the line of curvature	
Li Caiyun, Xiang Xin, Zhu Chungang.....	527

中图法分类号: TP301.6; O241.3 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2016)04-527-05

论文引用格式: Li C Y, Xiang X, Zhu C G. Design of a ruled developable surface through the line of curvature[J]. Journal of Image and Graphics, 2016, 21(4): 527-531. [李彩云, 项昕, 朱春钢. 插值曲率线的直纹面可展设计[J]. 中国图象图形学报, 2016, 21(4): 527-531.] [DOI: 10.11834/jig.20160415]

插值曲率线的直纹面可展设计

李彩云¹, 项昕¹, 朱春钢²

1. 大连理工大学盘锦校区基础教学部, 盘锦 124221; 2. 大连理工大学数学科学院, 大连 116024

摘要: 目的 曲率线在微分几何中起着非常重要的作用,它在曲面分析中是一个很有用的工具。可展曲面是曲面造型中最简单也最常用的一类曲面,目前大部分工作都是研究在给定曲面上寻找或者计算曲率线,而其反问题研究工作较少,为此,提出一种插值曲率线的可展曲面构造方法,并进一步将它应用到曲面造型中。方法 利用Frenet标架表示直纹面的母线,根据曲线为曲面曲率线以及曲面可展的充要条件,得到直纹面的母线需要满足的关系式。并引入控制函数控制曲面的形状。结果 给出了以给定曲线为曲率线的直纹面可展的具体表达式,根据可展曲面分类分析了设计曲面为柱面、锥面和空间曲线切线面的充要条件,并给出了两个代表性的实例验证该方法的有效性,实例结果表明,该方法不仅适用于一般参数曲线,对分段参数曲线也是有效的。结论 利用构造性的方法给出了插值曲率线的可展曲面的具体表达形式,并通过具体实例验证了该方法的有效性。

关键词: 可展曲面; 直纹面; Frenet标架; 曲率线

Design of a ruled developable surface through the line of curvature

Li Caiyun¹, Xiang Xin¹, Zhu Chungang²

1. School of Science, Dalian University of Technology, Panjin 124221, China;

2. School of Mathematic Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China

Abstract: **Objective** Line of curvature plays an important role in differential geometry. It is a useful tool in surface analysis. A developable surface is simple and frequently used in surface modeling. Many studies have investigated how to find or compute the line of curvature from a given surface; its anti-problem is rare. This paper presents an approach of designing a developable surface by interpolating the line of curvature and applying it to surface modeling. **Method** The Frenet frame is employed to express the ruling of the ruled surface. According to the necessary and sufficient conditions of line of curvature and developable surface, the equations that satisfy the ruling can be obtained. The developable surface can be adjusted flexibly by introducing control functions. **Result** The paper presents the concrete expression of a developable surface. The necessary and sufficient conditions are analyzed by classifying the developable surface. The method is validated by two representative examples. Results show that the method is suitable not only for general parametric curves but also for piecewise parametric curves. **Conclusion** The concrete expression of a developable surface is constructed by interpolating the line of curvature through a constructive method. The proposed method is efficient and convenient, as verified by several represent-

收稿日期: 2015-09-30; 修回日期: 2015-11-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(11401077, 11271060); 民用飞机专项资助项目(MJ-F-2012-04); 中央高校基本科研业务专项基金项目(DUT15LK47, DUT14YQ111); 辽宁省高等学校优秀人才支持计划项目(LJQ2014010)

第一作者简介: 李彩云(1984—), 女, 讲师, 硕士生导师, 2013年于大连理工大学数学科学院获计算数学理学博士, 主要研究方向为计算几何、计算机辅助几何设计。E-mail: caiyun@dlut.edu.cn

Supported by: National Natural Science Foundation of China(11401077, 11271060)

ative examples.

Key words: developable surface; ruled surface; frenet frame; line of curvature

0 引言

可展曲面在工程中有很广泛的应用,它们是一类特殊的直纹面^[1],可以没有伸缩、折叠或撕裂的展开成平面。因此,长期以来,在许多以金属板、纸张、皮革和其他类似的不可伸缩的原材料产品制造方面,可展曲面是经常要遇到的一类最简单且重要的曲面,如飞机、汽车和船体的设计和制造等。

由于可展曲面在工业设计中的广泛应用,使得近几十年来国内外发表了大量的关于可展曲面性质和构造的研究论文^[2-7]。Aumann^[2]利用张量积 Bézier 曲面来构造可展曲面,并使之插值于两条边界曲线。Lang 和 Röschel^[3]研究了有理 $(1, n)$ 次 Bézier 曲面,得到了可展有理曲面的控制网和权因子的必要条件。但这些方法最终得到关于控制顶点的非线性方程,为了克服这个问题,Chu 和 Séquin^[4]利用射影几何中点和平面的几何对偶提出了另外一种可展曲面设计方法。Bodduluri 和 Ravani^[5]利用点和平面对偶的概念给出了一种可展曲面的表达形式。王国瑾等人^[8]利用 Frenet 标架表示曲面,研究了给定曲线既为等参线又为测地线的曲面族构造方法。Zhao 等人^[9]给出了一种以给定曲线为测地线的可展曲面设计方法。Li 等人^[10]研究了插值曲率线的可展曲面构造问题。

曲率线在微分几何^[1]中起着非常重要的作用,它被广泛应用于几何设计、形状识别以及曲面绘制等领域。曲率线在钣金加工中也有很广泛的应用,比如当通过辊轧将一块金属板定形时,需要将金属板沿着主方向送到辊子中,并根据主曲率的大小来调整辊子的位置。目前关于曲率线的研究已有很丰富的成果。Martin^[11]提出了主曲面的概念。李宏坤等人^[12]对 NURBS 曲面的曲率线积分进行了系统的公式推导,并利用 NURBS 曲面的离散法向量有效简化了曲面第 2 基本量的计算,加速了 Euler 法迭代求解曲率线微分方程的过程。Che 等人^[13]和 Zhang 等人^[14]研究了隐式曲面的曲率线和微分几何性质。Li 等人^[15]给出了以给定曲线为曲率线的参数曲面族的构造方法。

利用 Frenet 标架表示直纹面的母线,研究了插值曲率线的直纹面可展条件,并引入了控制函数控制曲面形状。根据可展曲面分类分析了设计曲面分别为柱面、锥面和空间曲线切线面的条件。

1 插值曲率线的可展曲面设计

1.1 曲线曲面的基本知识

对于以弧长为参数的曲线 $\mathbf{x}, s \rightarrow \mathbf{x}(s)$, s 为弧长参数,称为 $(\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ 曲线上点 $Q = \mathbf{x}(s)$ Frenet 标架,其中 $\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ 分别为曲线在点 Q 处的单位切向量,主法向量和副法向量。其 Frenet 公式为

$$\mathbf{e}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$$

$$\mathbf{n}'(s) = -k(s)\mathbf{e}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)$$

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$$

式中

$$k(s) = |\mathbf{e}'(s)| = |\mathbf{x}''(s)| \quad (1)$$

$$\tau(s) = \frac{(\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}'''(s))}{|\mathbf{x}''(s)|^2} \quad (2)$$

分别为曲线在点 Q 处的曲率和挠率,以下要求曲线是非直线的。

设 $\mathbf{P}: (s, t) \rightarrow \mathbf{P}(s, t)$ 为一曲面,若在曲面所有点处都有 $\mathbf{P}_s \times \mathbf{P}_t \neq 0$ 成立,则称该曲面为正则曲面。其中 $\mathbf{P}_s$ 和 $\mathbf{P}_t$ 为 $\mathbf{P}(s, t)$ 关于参数 s, t 的偏导数。正则曲面 $\mathbf{P}(s, t)$ 在一点处的单位法向量为

$$\mathbf{N}(s, t) = \frac{\mathbf{P}_s(s, t) \times \mathbf{P}_t(s, t)}{|\mathbf{P}_s(s, t) \times \mathbf{P}_t(s, t)|} \quad (3)$$

1.2 可展曲面设计

首先,有如下定理:

定理 1^[16] 面上的曲线为曲率线的充分必要条件是沿此曲线的曲面法线组成一可展曲面。

给定一条空间曲线 $\mathbf{r}(s): s \rightarrow \mathbf{r}(s)$, 其中 s 为弧长参数。接下来给出一种以曲线为曲率 $\mathbf{r}(s)$ 线的可展曲面构造方法。首先构造直纹面

$$\mathbf{P}(s, t) = \mathbf{r}(s) + t\mathbf{L}(s), t \in \mathbf{R} \quad (4)$$

式中, $\mathbf{L}(s)$ 为单位向量。显然,曲面经过 $\mathbf{r}(s)$ 。不失一般性,利用 Frenet 标架, $\mathbf{L}(s)$ 可以表示为

$$\mathbf{L}(s) = l_1(s)\mathbf{e}(s) + l_2(s)\mathbf{n}(s) + l_3(s)\mathbf{b}(s) \quad (5)$$

因为 $\mathbf{L}(s)$ 为单位向量, 所以 $l_1^2(s) + l_2^2(s) + l_3^2(s) = 1$ 。

经简单计算, 曲面式(4)的单位法向量在 $t=0$ 处的值为

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(s, t) \big|_{t=0} &= \frac{\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{L}(s)}{|\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{L}(s)|} \bigg|_{t=0} \\ &= \frac{l_2(s)\mathbf{e}(s) \times \mathbf{n}(s) + l_3(s)\mathbf{e}(s) \times \mathbf{b}(s)}{|l_2(s)\mathbf{e}(s) \times \mathbf{n}(s) + l_3(s)\mathbf{e}(s) \times \mathbf{b}(s)|} = \\ &= \frac{l_2(s)\mathbf{b}(s) - l_3(s)\mathbf{n}(s)}{|l_2(s)\mathbf{b}(s) - l_3(s)\mathbf{n}(s)|} = \\ &= \frac{l_2(s)\mathbf{b}(s) - l_3(s)\mathbf{n}(s)}{\sqrt{l_2^2(s) + l_3^2(s)}} \end{aligned}$$

构造曲面

$$\mathbf{P}_1(s, t) = \mathbf{r}(s) + t\mathbf{N}(s, 0) \quad (6)$$

根据定理1, 曲线 $\mathbf{r}(s)$ 为曲面 $\mathbf{P}(s, t)$ 的曲率线的充要条件为 $\mathbf{P}_1(s, t)$ 是可展的, 即

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}'(s), \mathbf{N}(s, 0), \mathbf{N}'(s, 0)) &= \\ ((l_2(s))^2 + (l_3(s))^2)\tau(s) + \\ l_2(s)l_3'(s) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

另外, 直纹面式(4)可展当且仅当

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}'(s), \mathbf{L}(s), \mathbf{L}'(s)) &= (\mathbf{e}, l_1\mathbf{e} + l_2\mathbf{n} + l_3\mathbf{b}, \\ (l_1' - kl_2)\mathbf{e} + (l_1k + l_2' - l_3\tau)\mathbf{n} + (\tau l_2 + l_3')\mathbf{b}) &= \\ -l_1l_3k + (l_2' + l_3')\tau + l_2l_3' &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

根据方程式(7)(8)可得

$$l_1l_3k = 0$$

如果, $l_3 = 0$ 则是 $\mathbf{r}(s)$ 一条平面曲线, 对应的可展曲面为该曲线所在的平面。以下假设 $l_3 \neq 0$, 这时 $l_1 = 0$, 有以下定理:

定理2 直纹面式(4)是可展的并且以曲线 $\mathbf{r}(s)$ 为曲率线当且仅当它可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s, t) &= \mathbf{r}(s) + t(l_2(s)\mathbf{n}(s) + \\ l_3(s)\mathbf{b}(s)) \quad (9) \\ l_2^2 + l_3^2 &= 1 \\ \tau &= l_2' l_3 - l_2 l_3' \end{aligned}$$

式中, τ 为曲线 $(\mathbf{r}(s))$ 的挠率。

接下来给出曲面式(9)分别为柱面、锥面和空间曲线切线面的条件, 并给出简单的证明过程。

定理3 曲面式(9)是柱面的充要条件为 $l_2 = 0$ 。

证明 经计算

$$\begin{aligned} \mathbf{L}'(s) &= (l_2\mathbf{n}(s) + l_3\mathbf{b}(s))' = \\ -l_2k\mathbf{t}(s) + (l_2' - l_3\tau)\mathbf{n}(s) + \\ (l_2\tau + l_3')\mathbf{b}(s) \end{aligned}$$

又因 $\tau = l_2' l_3 - l_2 l_3'$ 且 $l_2^2 + l_3^2 = 1$, 则 $l_2 l_2' + l_3 l_3' = 0$, 从而

$$l_2' - l_3\tau = 0, l_2\tau + l_3' = 0$$

即

$$\mathbf{L}' = -kl_2\mathbf{e}(s)$$

$$\mathbf{L}(s) \times \mathbf{L}'(s) = -l_2 l_3 k \mathbf{n}(s) + l_2^2 k \mathbf{b}(s)$$

则曲面式(9)为柱面当且仅当

$$\begin{cases} l_2^2 k = 0 \\ l_2 l_3 k = 0 \end{cases}$$

即 $l_2 = 0$ 。

定理4 曲面式(9)是锥面当且仅当 $l_2 = \rho$, 其中 ρ 为常数, ρ 为 $\mathbf{r}(s)$ 的曲率半径。

证明 记曲线式(9)的腰线为

$$\mathbf{w}(s) = \mathbf{r}(s) - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{L}'}{\mathbf{L}' \cdot \mathbf{L}'} \mathbf{L} = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{kl_2} \mathbf{L}$$

曲面式(9)为锥面的充要条件是 $\mathbf{w}' = 0$, 经计算

$$\mathbf{w}' = \frac{k'l_2 + kl_2'}{k^2 l_2^2} \mathbf{L}$$

则 $\mathbf{w}' = 0$ 等价于 $(kl_2)' = 0$, 即 $l_2 = \rho$, 其中 ρ 为常数, ρ 为 $\mathbf{r}(s)$ 的曲率半径。

定理5 曲面式(9)是空间曲线切线面的充要条件是它既不满足定理3也不满足定理4。

2 实例

例1 本例构造以圆柱螺线为曲率线的可展曲面。给定圆柱螺线

$$\mathbf{r}(s) = (a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b \frac{s}{c}), a > 0, b \neq 0$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, -\sqrt{5}\pi \leq s \leq \sqrt{5}\pi$$

经计算, Frenet 标架为

$$\mathbf{e}(s) = (-\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c})$$

$$\mathbf{n}(s) = (-\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0)$$

$$\mathbf{b}(s) = (\frac{b}{c} \sin \frac{s}{c}, -\frac{b}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{a}{c})$$

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2}, \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

选 $l_2(s) = \cos(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}s + \theta_0)$, 其中 θ_0 为常数。

若 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $a=2, b=1$, 则切线曲面表示为

$$\begin{aligned}
 P(s, t) &= r(s) + tL(s) = \\
 &(2\cos\frac{\sqrt{5}}{5}s + t(-\cos(\frac{\sqrt{5}}{5})s)\sin(\frac{s}{5}) + \\
 &\frac{\sqrt{5}}{5}\sin(\frac{\sqrt{5}}{5}s)\cos(\frac{s}{5})), 2\sin(\frac{\sqrt{5}}{5}s) + \\
 &t(-\sin(\frac{\sqrt{5}}{5})s)\sin(\frac{s}{5}) - \frac{\sqrt{5}}{5}\cos(\frac{\sqrt{5}}{5}s) \times \\
 &\cos(\frac{s}{5})), \frac{\sqrt{5}}{5}s + t\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos(\frac{s}{5}))
 \end{aligned}$$

曲面如图 1 所示。

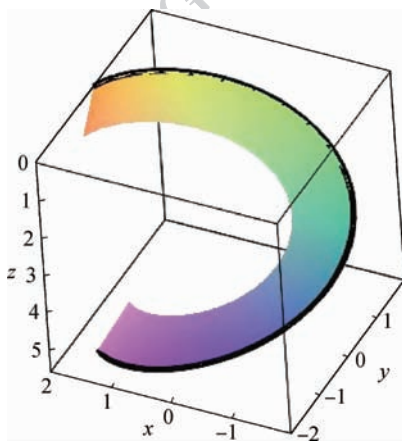


图 1 以圆柱螺线为曲率线的切线面

Fig. 1 The tangent surface with Helix as line of curvature

例 2 本例构造以 2 次样条曲线为曲率线的可展样条曲面。设节点向量为 $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}) = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ 相应的 2 次 B 样条基函数为

$$N_{i,2} =$$

$$\begin{cases} \frac{(r-t_i)^2}{2} & [t_i, t_{i+1}) \\ \frac{(r-t_i)(t_{i+2}-r)}{2} + \frac{(r-t_{i+1})(t_{i+3}-r)}{2} & [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ \frac{(t_{i+3}-r)^2}{2} & [t_{i+2}, t_{i+3}) \end{cases}$$

$$i = 0, \dots, 7$$

选择控制顶点为

$$\begin{aligned}
 p_0 &= (0, 0, 0), p_1 = (1, 1, 0), p_2 = (3, 0, 0), p_3 = \\
 &(4, 3, 0), p_4 = (5, 2, 0), p_5 = (6, 4, 0), p_6 = (7, 3, \\
 &0), p_7 = (8, 1, 0)
 \end{aligned}$$

样条曲线为

$$R(r) = \sum_{i=0}^7 p_i N_{i,2}(r), r \in [2, 8]$$

用 $R_i(r) (i=1, \dots, 6)$ 表示这些 2 次曲线段, 其

中 $R_1(r) = (\frac{r^2}{2} - r + \frac{1}{2}, -r^2 + 5r - \frac{11}{2}, 0), r \in [2, 3], \tau_1 = 0$ 。假设 $l_1 = 1$, 可展曲面为

$$P_1(r, t) = (\frac{r^2}{2} - r + \frac{1}{2}, -r^2 + 5r - \frac{11}{2}, -t)$$

同样地 $R_2(r) = (-\frac{r^2}{2} + 5r - \frac{17}{2}, 2r^2 - 13r + \frac{43}{2}, 0), r \in [3, 4]$ 。为了光滑地拼接相邻可展曲面, 需要取 $l_2 = -1$, 相应地可展曲面为

$$P_2(r, t) = (-\frac{r^2}{2} + 5r - \frac{17}{2}, 2r^2 - 13r + \frac{43}{2}, -t)$$

对曲线段

$$R_3(r) = (r - \frac{1}{2}, -2r^2 + 19r - \frac{85}{2}, 0)$$

$$R_4(r) = (r - \frac{1}{2}, \frac{3r^2}{2} - 16r + 45, 0)$$

$$R_5(r) = (r - \frac{1}{2}, -\frac{3r^2}{2} + 20r - 63, 0)$$

$$R_6(r) = (r - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}r^2 + 6r - 14, 0)$$

分别取 $l_3 = 1, l_4 = -1, l_5 = 1, l_6 = 1$, 相应地可展曲面表达式为

$$R_3(r, t) = (r - \frac{1}{2}, r^2 - 9r + \frac{45}{2}, -t), r \in [4, 5]$$

$$R_4(r, t) = (r - \frac{1}{2}, -\frac{r^2}{2} + 6r - 15, -t), r \in [5, 6]$$

$$R_5(r, t) = ((r - \frac{1}{2}), -\frac{r^2}{2} + 6r - 15, -t), r \in [6, 7]$$

$$R_6(r, t) = (r - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}r^2 - 22r + 83, -t), r \in [7, 8]$$

整体曲面见图 2。

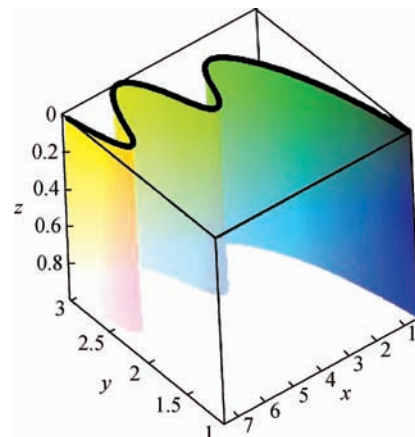


图 2 以二次 B 样条曲线为曲率线的可展样条曲面

Fig. 2 The developable spline surface with a quadratic B-spline curve

3 结 论

本文利用 Frenet 标架表示直纹面的直母线, 研究了插值曲率线的可展曲面构造问题, 给出了满足条件的可展曲面的具体表达形式并引入控制函数控制曲面形状。同时, 分析了设计曲面分别为柱面、锥面以及空间曲线切线面的充要条件。该方法不仅适用于一般参数曲线, 对分段参数曲线同样适用, 通过两个代表性实例验证了该方法的有效性, 但是该方法在处理有理曲面时需要添加额外的条件, 在下一步工作中将对其进行深入研究。

参考文献 (References)

- [1] Do Carmo M P. Differential Geometry of Curves and Surfaces [M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1976.
- [2] Aumann G. Interpolation with developable Bézier patches[J]. Computer Aided Geometric Design, 1991, 8(5): 409-420. [DOI: 10.1016/0167-8396(91)90014-3]
- [3] Lang J, Röschel O. Developable $(1, n)$ Bézier surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 1992, 9(4): 291-298. [DOI: 10.1016/0167-8396(92)90036-0]
- [4] Chu C H, Séquin C H. Developable Bézier patches: properties and design[J]. Computer-Aided Design, 2002, 34(7): 511-527. [DOI: 10.1016/S0010-4485(01)00122-1]
- [5] Bodduluri R M C, Ravani B. Design of developable surfaces using duality between plane and point geometries[J]. Computer-Aided Design, 1993, 25(10): 621-632. [DOI: 10.1016/0010-4485(93)90017-1]
- [6] Li C Y, Wang R H, Zhu C G. Design and G^1 connection of developable surfaces through Bézier geodesics[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218(7): 3199-3208. [DOI: 10.1016/j.amc.2011.08.057]
- [7] Xu P F, Liu L G. Developability optimization algorithm for 3D mesh surfaces [J]. Chinese Journal of Computers, 2010, 33(5): 927-934. [徐鹏飞, 刘利刚. 三维网格曲面的可展性优化算法[J]. 计算机学报, 2010, 33(5): 927-934.] [DOI: 10.3724/SP.J.1016.2010.00927]
- [8] Wang G J, Tang K, Tai C L. Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic[J]. Computer-Aided Design, 2004, 36(5): 447-459. [DOI: 10.1016/S0010-4485(03)00117-9]
- [9] Zhao H Y, Wang G J. A new method for designing a developable surface utilizing the surface pencil through a given curve[J]. Progress in Natural Science, 2008, 18(1): 105-110. [DOI: 10.1016/j.pnsc.2007.09.001]
- [10] Li C Y, Wang R H, Zhu C G. An approach for designing a developable surface through a given line of curvature[J]. Computer-Aided Design, 2013, 45(3): 621-627. [DOI: 10.1016/j.cad.2012.11.001]
- [11] Martin R R. Principal patches-a new class of surface patch based on differential geometry[C]// Proceedings of the 4th Annals European Association for Computer Graphics Conference and Exhibition. Zagreb, Yugoslavia, Amsterdam: North-Holland, 1983: 47-55. [DOI: 10.2312/eg.19831003]
- [12] Li H K, Wang G J, Liu L G. B-spline expression of integral curvature line on NURBS surface[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2006, 18(3): 390-395. [李宏坤, 王国瑾, 刘利刚. NURBS 曲面上积分曲率线的 B 样条表示[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2006, 18(3): 390-395.] [DOI: 10.3321/j.issn:1003-9775.2006.03.011]
- [13] Che W J, Paul J C, Zhang X P. Lines of curvature and umbilical points for implicit surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 2007, 24(7): 395-409. [DOI: 10.1016/j.cagd.2007.04.005]
- [14] Zhang X P, Che W J, Paul J C. Computing lines of curvature for implicit surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 2009, 26(9): 923-940. [DOI: 10.1016/j.cagd.2009.07.004]
- [15] Li C Y, Wang R H, Zhu C G. Parametric representation of a surface pencil with a common line of curvature[J]. Computer-Aided Design, 2011, 43(9): 1110-1117. [DOI: 10.1016/j.cad.2011.05.001]
- [16] Mei X M, Huang J Z. Differential Geometry[M]. Beijing: China Higher Education Press, 2003. [梅向明, 黄敬之. 微分几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.]