



JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS

主办：中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

2015

11

VOL.20

ISSN1006-8961
CN11-3758/TB



动作识别 P1462



第20卷第11期（总第235期）

2015年11月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊
中文核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院

主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所

中国图象图形学学会

北京应用物理与计算数学研究所

主 编 李小文

编辑出版《中国图象图形学报》编辑出版委员会

邮政信箱 北京9718信箱

邮 编 100101

电子信箱 jig@radi.ac.cn

电 话 010-64807995

网 址 www.cjig.cn

广告经营许可证 京朝工商广字第0361号

总 发 行 北京报刊发行局

订 购 全国各地邮局

海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司

（邮政信箱：北京399信箱 邮编：100048）

印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian

Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences

Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS

China Society of Image and Graphics

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

Editor-in-Chief LI Xiaowen

Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of Image and Graphics

P.O.Box 9718, Beijing, P.R.China

Zip code 100101

E-mail jig@radi.ac.cn

Telephone 010-64807995

Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals

Domestic All Local Post Offices in China

Overseas China International Book Trading Corporation

(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China)

Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

CN 11-3758/TB

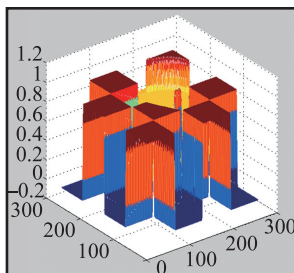
ISSN 1006-8961

CODEN ZTTXFZ

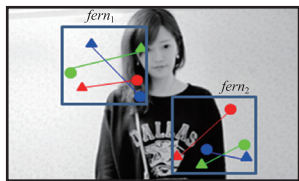
国外发行代号 M1406

国内邮发代号 82-831

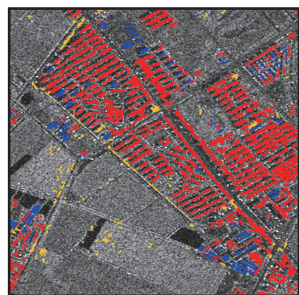
国内定价 50.00元



对偶算法在紧框架域TV-L₁
去模糊模型中的应用
(第1434页)



融合检测和跟踪的实时人脸
跟踪(第1473页)



高分辨率SAR影像形态学
层级分析的建筑物检测
(第1517页)

综述

多媒体技术研究: 2014——深度学习与媒体计算

吴飞, 朱文武, 于俊清 1423

图像处理和编码

对偶算法在紧框架域TV-L₁去模糊模型中的应用

李旭超, 马松岩, 边素轩 1434

融合梯度信息与HVS滤波器的无参考清晰度评价

应凌楷, 李子印, 张聪聪 1446

消除halo效应和色彩失真的去雾算法

刘兴云, 戴声奎 1453

图像分析和识别

融合多姿势估计特征的动作识别

罗会兰, 冯宇杰, 孔繁胜 1462

融合检测和跟踪的实时人脸跟踪

刘嘉敏, 梁莹, 孙洪兴, 段勇, 刘斌 1473

非凸加权核范数及其在运动目标检测中的应用

周宗伟, 金忠 1482

图像理解和计算机视觉

OPTICS聚类与目标区域概率模型的多运动目标跟踪

孙天宇, 孙炜, 薛敏 1492

具有仿反馈机制的图像模式分类认知

陈克琼, 王建平, 李帷韬, 赵丽欣 1500

计算机图形学

带形状控制的自由曲线曲面参数样条

彭丰富, 田良 1511

遥感图像处理

高分辨率SAR影像形态学层级分析的建筑物检测

张恒, 余涛, 柳鹏, 张周威 1517

利用邻域质心投票从分类后影像提取道路中心线

丁磊, 姚红, 郭海涛, 刘志青 1526

单形体体积最小化的差分进化光谱解混算法

覃事银, 罗文斐, 杨斌, 张锐豪 1535

地理信息技术

突破环境限制的导盲方法

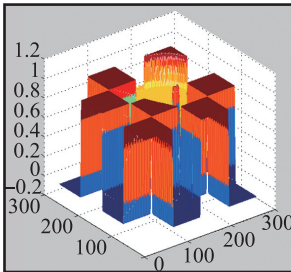
张探, 陈超 1545

MPI和OpenMP混合并行模型下的遥感编目信息检索

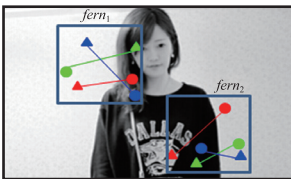
曲海成, 梁雪剑, 刘万军, 籍瑞庆 1552

CONTENTS

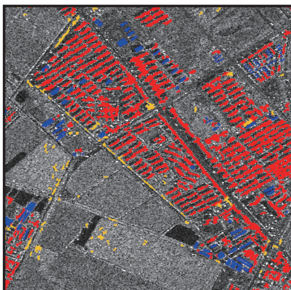
JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Application of dual algorithm to TV-L₁ deblurring model of frame domain(第1434页)



Real-time face tracking based on detecting and tracking (第1473页)



Building detection of high-resolution SAR image based on morphological hierarchy analysis(第1517页)

Review

- Researches on multimedia technology 2014—deep learning and multimedia computing
Wu Fei, Zhu Wenwu, Yu Junqing 1423

Image Processing and Coding

- Application of dual algorithm to TV-L₁ deblurring model of frame domain
Li Xuchao, Ma Songyan, Bian Suxuan 1434
- No-reference sharpness assessment with fusion of gradient information and HVS filter
Ying Ling kai, Li Ziyin, Zhang Congcong 1446
- Halo-free and color-distortion-free algorithm for image dehazing
Liu Xingyun, Dai Shengkui 1453

Image Analysis and Recognition

- Fusing multiple pose estimations for still image action recognition
Luo Huilan, Feng Yujie, Kong Fansheng 1462
- Real-time face tracking based on detecting and tracking
Liu Jiamin, Liang Ying, Sun Hongxing, Duan Yong, Liu Xiao 1473
- Weighted nonconvex nuclear norm and its application in the moving target detection
Zhou Zongwei, Jin Zhong 1482

Image Understanding and Computer Vision

- Tracking multiple moving objects based on OPTICS and object probability model
Sun Tianyu, Sun Wei, Xun Min 1492
- Image pattern cognition with simulated feedback mechanism
Chen Keqiong, Wang Jianping, Li Weitao, Zhao Lixin 1500

Computer Graphics

- Shape parameter spline for free-form curve and surface
Peng Fengfu, Tian Liang 1511

Remote Sensing Image Processing

- Building detection of high-resolution SAR image based on morphological hierarchy analysis
Zhang Heng, Yu Tao, Liu Peng, Zhang Zhouwei 1517
- Using neighborhood centroid voting to extract road centerline from classified image
Ding Lei, Yao Hong, Guo Haitao, Liu Zhiqing 1526
- Simplex volume minimization based differential evolution algorithm for spectral unmixing
Qin Shiyin, Luo Wenfei, Yang Bin, Zhang Ruihao 1535

Geoinformatics

- Guiding the blind to overcome environment limitation
Zhang Tan, Chen Chao 1545
- Remote sensing resources parallel retrieval based on MPI and OpenMP
Qu Haicheng, Liang Xuejian, Liu Wanjuan, Ji Ruiqing 1552

中图法分类号: TP391.7 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2015)11-1511-06

论文引用格式: Peng F F, Tian L. Shape parameter spline for free-form curve and surface[J]. Journal of Image and Graphics, 2015, 20(11): 1511-1516.

[彭丰富, 田良. 带形状控制的自由曲线曲面参数样条[J]. 中国图象图形学报, 2015, 20(11): 1511-1516.] [DOI:10.11834/jig.20151110]

带形状控制的自由曲线曲面参数样条

彭丰富, 田良

桂林电子科技大学数学系, 桂林 541004

摘要: 目的 样条曲线曲面的构造是工程制图中的一个重要部分。针对双曲抛物面上参数样条曲线的构造, 在已有的研究基础上提出了一种样条方法使曲线曲面可以任意地逼近一个多边形或者一个网格。方法 在标准四面体内构造一个双曲抛物面, 在该曲面上以基函数参数化的方法定义一种带形状参数的参数样条曲线曲面, 样条基函数通过将双曲抛物面的有理参数化进行限定, 生成单参数有理样条基函数。详细研究了样条的保形性及其端点性质。结果 样条曲线具有一个可变的形状控制因子, 可以对曲线进行调整, 能以任意精度逼近这个控制四边形或网格。对空间节点列, 利用该样条可以生成 G^2 -连续空间曲线, 同样对于空间网格可以构造 G^2 -连续的拟合曲面, 它所对应的基函数可以有理形式。结论 实验结果表明, 本文在笔者已有的研究基础上提出的参数样条曲线可以通过重心坐标系变换适应为任意的四边形, 除了空间四面体内的样条曲线, 四面体退化四边形同样可实现。

关键词: 基函数; 有理样条函数; 逼近样条函数; G^2 -连续

Shape parameter spline for free-form curve and surface

Peng Fengfu, Tian Liang

Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China

Abstract: **Objective** Spline curve surface is an important part of CAGD. To obtain the parameter spline curve on the hyperbolic paraboloid, the four rational basis functions presented in this paper have a changeable control handle and a unary function. **Method** A hyperbolic paraboloid is constructed in the standard tetrahedron. On the surface, the base function defines a parameterized method with the parameters of the shape parameter spline curve surface. The basis function of spline through the rational parameters of the hyperbolic paraboloid is limited. A single-parameter rational basis function of spline is generated. Additionally, the nature of shape preserving and endpoints are considered. **Result** The nature of shape preserving and endpoints are considered. The curvature of two endpoints are derived as zero for a range of points. Consequently, a G^2 -continuity curve can be attached by this spline curve without any additional requirements. **Conclusion** Experiment shows that we use this spline to raise the surface for spatial mesh, which also can implement G^2 -continuity with much freedom.

Key words: basis function; rational spline; approximate spline; G^2 -continuity

收稿日期: 2015-04-13; 修回日期: 2015-07-05

基金项目: 广西高校数据分析与计算重点实验室基金项目资助

第一作者简介: 彭丰富 (1972—), 男, 副教授, 2007 年于中南大学获数学专业理学博士学位, 研究方向为计算机辅助几何设计。E-mail: 28761025@qq.com

通信作者: 田良, 硕士研究生, E-mail: tianliangt@163.com

0 引言

在计算机辅助几何设计(CAGD)和计算机图形学领域中有两种定义样条曲线曲面的方法,分别是参数和代数形式^[1-4]。后者有更多的自由度、简单的表示和更好的几何操作特性等,但是计算相对复杂。因此,基于生成样条曲线曲面的便利性,前者在几何设计中成为了不可替代的方法。与此同时,一个控制多边形或一个网格还经常使用有理样条曲线来生成光滑曲线曲面,用于模型重构,具有良好的逼近效果、易于实现、具有人机交互的形状因子^[5]等。有理样条曲线也成为当前CAGD的研究的热点之一,他们大多数侧重于研究有理多项式样条曲线,如文献[6]介绍了一种用于等距曲线的有理样条函数,基于一簇平面有理参数曲线提出一种构造样条的方法。同时,曲线曲面的保形研究也是有理样条曲线的一个重要课题^[7]。另外,在文献[8]中提出了一种混合有理样条曲线。为了产生更多光滑样条,换句话说,为了达到 G^2 -连续性,通常样条曲线(曲面)必须讨论样条在端点(边界)乃至整个样条曲线的曲率^[9]。

文献[10-11]提出了一种适合四点序列的逼近样条方法,通过四面体及形状因子定义了一个双曲抛物面上一类样条,这种逼近结合了代数和参数形式的优点,但是仍有局限性,即不能任意地逼近四个点的控制多边形。有个直接的想法是:参照 Bézier 样条函数^[12]使这类的样条可以扩展为一个自由样条使它能够任意逼近一个四边形,并且它对应的基函数是有理形式。通过重心坐标系^[13]的变换可以适应为任意四边形。该方法始于代数形式,但是其应用的是参数形式。

1 基函数

首先,定义4个双参数函数

$$\begin{cases} \alpha_1(u, v) = \frac{(1-u)(1-v)}{1+(\lambda-1)v} \\ \alpha_2(u, v) = \frac{\lambda(1-u)v}{1+(\lambda-1)v} \\ \alpha_3(u, v) = \frac{\lambda uv}{1+(\lambda-1)v} \\ \alpha_4(u, v) = \frac{u(1-v)}{1+(\lambda-1)v} \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\lambda \in \mathbf{R}^+$, 是一个非负实数, 为形状控制因子, $u, v \in [0, 1]$ 是两个参数。

4个函数有以下性质:

$$1) \alpha_i(u, v) \geq 0 (i = 1, 2, 3, 4);$$

$$2) \sum_{i=1}^4 \alpha_i(u, v) = 1;$$

3) 对于任意地 $\lambda > 0$, 实际上, 因为

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i(u, v) = 1$$

所以 α_4 是由其他3个函数所确定且有关系

$$\alpha_4 = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3) \quad (2)$$

注意到曲面式(2)在 $O(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的坐标系中形成的是一张双曲抛物面, 位于4个顶点分别为 $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ 和 $(0, 0, 1)$ (见图1)的四面体内。式(2)可以经过式(1)进行有理参数化。

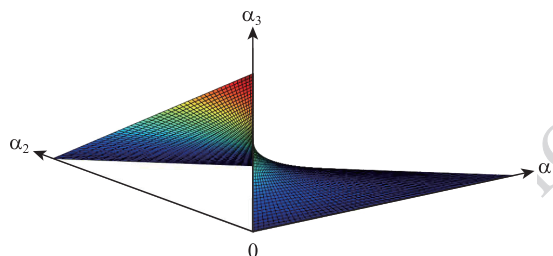


图1 四面体内的双曲抛物面

Fig. 1 A sheet of hyperbolic paraboloid in a tetrahedron

如果定义参数 u, v 的一个函数关系 $v = v(u)$, 该样条形成一条曲线。

首先给出以下有关 $v = v(u)$ 函数集的定义, 在式(1)上生成样条曲线, 在这里, 利用文献[2]中定义的 u, v 之间的函数关系。

定义1 令 Γ 是一个函数簇, 对于任意地 $v(u) \in \Gamma$ 有以下条件:

$$1) v(u) \in C^2(0, 1) \cap C[0, 1], v(0) = v(1) = 0;$$

$$2) \lim_{u \rightarrow 0^+} v'(u) = +\infty, \lim_{u \rightarrow 1^-} v'(u) = -\infty,$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{v'(u)}{v'(1-u)} = -1;$$

$$3) v(u) \in [0, 1];$$

4) 存在 $N > 0 (N \in \mathbf{R})$ 使得

$$\lim_{u \rightarrow 0^+, 1^-} |u(1-u)v'(u)| \leq N$$

Γ 显然不为空集, 这里有一个简单的例子, 即

$$v(u) = 2\sqrt{u(1-u)}, u \in [0, 1] \quad (3)$$

易证 $v(u) \in \Gamma$, 它是一个半椭圆^[14]。

在式(1)中用 $v(u)$ 代替参数 v , 然后相应的推

导出4个基函数,它们分别是 $\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u)$ 和 $\alpha_4(u)$ (见图2)。显然,这些基函数除了具有式(1)4个函数的性质,还具有以下性质:

1) $\alpha_1(0) = 1, \alpha_1(1) = 0, \alpha_2(0) = 0, \alpha_2(1) = 0, \alpha_3(0) = 0, \alpha_3(1) = 0, \alpha_4(0) = 0, \alpha_4(1) = 1$;

2) 当 $\lambda \rightarrow +\infty$, $\alpha_1(u)$ 逼近弧AOC, $\alpha_2(u)$ 逼近弧OAC, $\alpha_3(u)$ 逼近弧OBC, $\alpha_4(u)$ 逼近弧OCB(见图3), $O(0,0), A(0,1), B(1,1), C(1,0), v = v(u) \in \Gamma$, 性质3)能由式(1)直接推导得出;

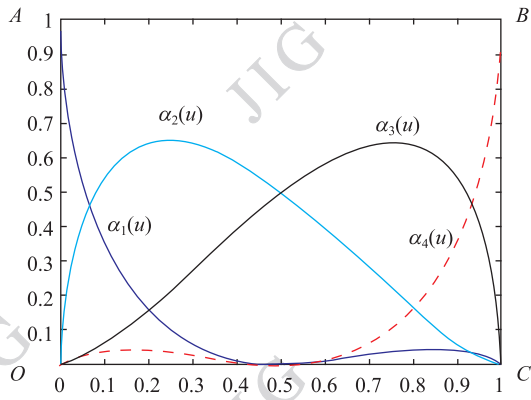


图2 函数式(3)当 $\lambda=1$ 时的4个基函数

Fig. 2 The four basis functions with $\lambda=1$ and function (3)

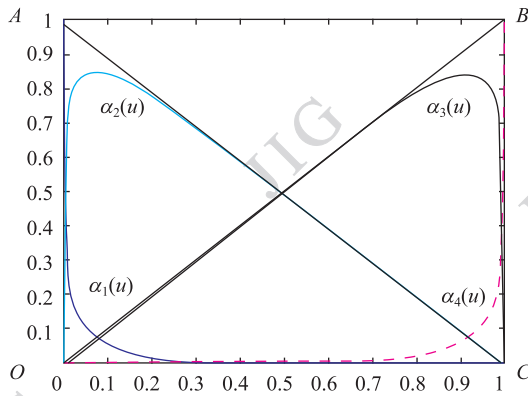


图3 函数式(3)当 $\lambda=10$ 时的4个基函数

Fig. 3 The four basis functions with $\lambda=10$ and function (3)

3) 对每一个 $v = v(u) \in \Gamma, \alpha_1\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha_4\left(\frac{1}{2}\right), \alpha_2\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha_3\left(\frac{1}{2}\right)$ 。如果 $v(u)$ 是关于 $u = \frac{1}{2}$ 对称的函数,则 $\alpha_i(u) = \alpha_{4-i}(1-u) (i=1,2)$;

4) 端点的导数

$$\alpha'_1(0^+) = -\lambda v'(0^+), \alpha'_1(1^-) = -1 - \lambda \varepsilon_1$$

$$\alpha'_2(0^+) = \lambda v'(0^+) + \lambda \varepsilon_2, \alpha'_2(1^-) = \lambda \varepsilon_3$$

$$\alpha'_3(0^+) = \lambda \varepsilon_4, \alpha'_3(1^-) = \lambda v'(1^-) + \lambda \varepsilon_5$$

$$\alpha'_4(0^+) = -\lambda(\varepsilon_2 + \varepsilon_4), \alpha'_4(1^-) =$$

$$-\lambda v'(1^-) + 1 + \lambda(\varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_5)\varepsilon_i \quad (4)$$

是有界实数且 $|\varepsilon_i| \leq N (i=1, \dots, 5)$ 。

2 基函数构造参数样条曲线

令 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbf{R}^3$ 是一列点,形成一个有3条控制边的四边形,也称为控制四边形,根据以上的4个基函数,为这个四面体定义了样条函数

$$P(u, \lambda, v(u)) = \sum_{i=1}^4 P_i \alpha_i(u) \quad (5)$$

式中, u 是独立的参数变量, λ 是式(1)的样条曲线形状控制因子, $v(u)$ 是在 Γ 上由定义(1)定义的函数。

2.1 样条曲线的性质

由样条函数的定义, $\lambda > 0, v \in \Gamma$,关于 $P(u, \lambda, v(u))$ 易推导下面的结论:

1) 样条曲线位于4个点形成的凸包内,当 λ 取不同值时产生不同的样条曲线(如图4和图5);

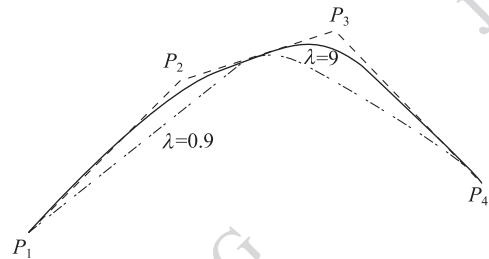


图4 不同 λ 的样条曲线

Fig. 4 Spline curves with different λ for a convex quadrilateral

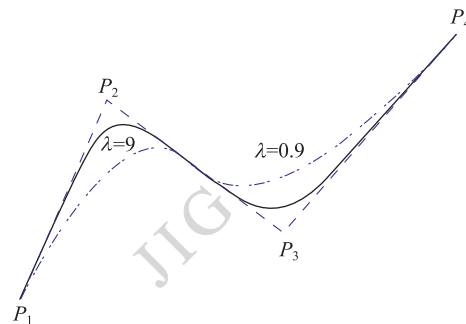
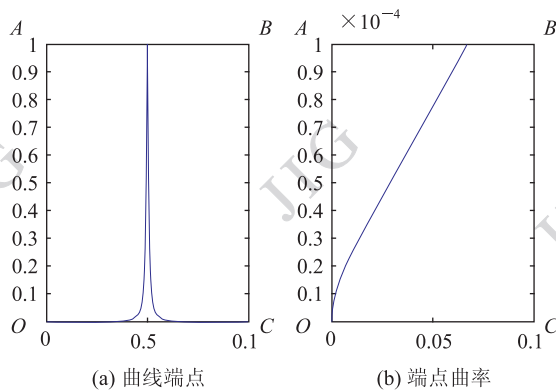


图5 一个非凸四边形在不同 λ 的样条曲线

Fig. 5 Spline curves with different λ for a non-convex quadrilateral

2) 样条曲线在点 P_1 有切线方向 $\overrightarrow{P_1 P_2}$,在 P_4 有切线方向 $\overrightarrow{P_3 P_4}$ 。当 λ 足够小时,图6描述了曲线端点情形和曲线的端点曲率情形。

图6 λ 比较小时的曲线端点和它的端点曲率Fig. 6 Spline curve and curvatures at the local of endpoints with a small λ

根据定义1和洛必达法则,可以得到:

$$\tau_0 = \lim_{u \rightarrow 0^+} uv'(u) = \lim_{u \rightarrow 0^+} u^2 v''(u) = - \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{v'^2(u)}{v''(u)}$$

$$\tau_1 = \lim_{u \rightarrow 1^-} (1-u)v'(u) = \lim_{u \rightarrow 1^-} (1-u)^2 v''(u) =$$

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{v'^2(u)}{v''(u)}$$

当 $|\tau_0|, |\tau_1| \leq N$,得到以下引理:

引理1 对 $v(u) \in \Gamma$,令 $\rho(u)$ 是 $v = v(u)$ 的曲率,如果对于 $u \in [0, 1]$, $\rho(u)$ 是有界的,则

$$\rho(0) \neq 0 (\rho(1) \neq 0), \tau_0 = 0 (\tau_1 = 0)$$

证明:对公式 $\rho(u) = \frac{v''(u)}{[1 + v'^2(u)]^{\frac{3}{2}}}$,即 $v''(u) =$

$\rho(u) [1 + v'^2(u)]^{\frac{3}{2}}$,两边同时除以 $v'(u)^2$,则 $\tau_0 \rho(0) = 0 (\tau_1 \rho(1) = 0)$,从而引理得证。

2.2 端点曲率

计算 $\tau_0(\tau_1) \neq 0$ 时基函数端点的一阶导数和二

阶导数,计算结果记录在表1和表2。

表1 当 $\tau_0 \neq 0$ 和 $\tau_1 \neq 0$ 时端点的导数

Table 1 Derivatives of the endpoints when

 $\tau_0 \neq 0$ and $\tau_1 \neq 0$

$u(1-u) \times \alpha'_1(u)$	$u(1-u) \times \alpha'_2(u)$	$u(1-u) \times \alpha'_3(u)$	$u(1-u) \times \alpha'_4(u)$
$-\lambda\tau_0$	$\lambda\tau_0$	0	0
0	0	$\lambda\tau_1$	$-\lambda\tau_1$

表2 当 $\tau_0 \neq 0$ 和 $\tau_1 \neq 0$ 时端点的二阶导数

Table 2 Second-order derivatives of the endpoints when

 $\tau_0 \neq 0$ and $\tau_1 \neq 0$

$u^2(1-u)^2 \times \alpha''_1(u)$	$u^2(1-u)^2 \times \alpha''_2(u)$	$u^2(1-u)^2 \times \alpha''_3(u)$	$u^2(1-u)^2 \times \alpha''_4(u)$
$2\lambda(\lambda-1) \times \tau_0^2 + \lambda\tau_0$	$-2\lambda(\lambda-1) \times \tau_0^2 - \lambda\tau_0$	0	0
0	0	$-2\lambda(\lambda-1) \times \tau_1^2 - \lambda\tau_1$	$2\lambda(\lambda-1) \times \tau_1^2 + \lambda\tau_1$

接下来考虑另一种情况 $\tau_0(\tau_1) = 0$,在定义1,因为选择样条函数的函数 $v = v(u)$ 是初等函数,因此存在常数 $c_0, c_1 (0 < c_0, c_1 < 1)$, $\eta_0, \eta_1 \neq 0$ 使

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} u^{c_0} v'(u) = - \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{c_0} u^{1+c_0} v''(u) =$$

$$- \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{c_0 u^{c_0-1} v'^2(u)}{v''(u)} = \eta_0$$

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} (1-u)^{c_1} v'(u) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1}{c_1} (1-u)^{1+c_1} v''(u) =$$

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{c_1 (1-u)^{c_1-1} v'^2(u)}{v''(u)} = \eta_1$$

且 $\eta_0, \eta_1 \leq N$ 成立,下面通过求导能得到基函数端点的导数(见表3和表4)。

表3 当 $\tau_0 = 0 (\tau_1 = 0)$ 时端点的导数Table 3 Derivatives of the endpoints when $\tau_0 = 0 (\tau_1 = 0)$

u	$[u(1-u)]^{c_0} \times \alpha'_1(u)$	$[u(1-u)]^{c_0} \times \alpha'_2(u)$	$[u(1-u)]^{c_0} \times \alpha'_3(u)$	$[u(1-u)]^{c_0} \times \alpha'_4(u)$
0^+	$-\lambda\eta_0$	$\lambda\eta_0$	0	0
u	$[u(1-u)]^{c_1} \times \alpha'_1(u)$	$[u(1-u)]^{c_1} \times \alpha'_2(u)$	$[u(1-u)]^{c_1} \times \alpha'_3(u)$	$[u(1-u)]^{c_1} \times \alpha'_4(u)$
1^-	0	0	$\lambda\eta_1$	$-\lambda\eta_1$

表4 当 $\tau_0 = 0 (\tau_1 = 0)$ 时端点的二阶导数Table 4 Second-order derivatives of the endpoints when $\tau_0 = 0 (\tau_1 = 0)$

u	$[u(1-u)]^{1+c_0} \alpha''_1(u)$	$[u(1-u)]^{1+c_0} \alpha''_2(u)$	$[u(1-u)]^{1+c_0} \alpha''_3(u)$	$[u(1-u)]^{1+c_0} \alpha''_4(u)$
0^+	$2c_0\eta_0$	$-2c_0\eta_0$	0	0
u	$[u(1-u)]^{1+c_1} \alpha''_1(u)$	$[u(1-u)]^{1+c_1} \alpha''_2(u)$	$[u(1-u)]^{1+c_1} \alpha''_3(u)$	$[u(1-u)]^{1+c_1} \alpha''_4(u)$
1^-	0	0	$-2c_1\eta_1$	$2c_1\eta_1$

对于一个控制四边形,通过重心坐标系能转化为一个顶点是 $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)$ 和 $(0,0,1)$ 的正规四面体,且当四边形共面时是一个正方形,相应地,在文献[2]已经证明在重心坐标系和笛卡尔坐标系中它们的曲率等值。通过以上4个关于端点的导数的表格(表1—表4)可知端点的一阶导向量平行于二阶导向量,因此能得到以下关于样条曲线曲率的定理。

定理1 如果 $v(u) \in \Gamma$,对任意 $\lambda > 0$,当参数 $u=0,1$,样条曲线 $P(u, \lambda, v(u))$ 两个端点曲率是0。

根据定理1,选取适当的 λ 和 $v(u)$,端点的曲率是不变的。因为4个基函数是连续的,样条函数在 $u \in (0,1)$ 上也是连续的,易得如下曲率的有界性定理。

定理2 如果 $v(u) \in \Gamma, v=v(u)$ 在 $u \in (0,1)$ 上的曲率是有界的,则对任意给定的非负 λ 值,样条曲线 $P(u, \lambda, v(u))$ 在参数 $u \in (0,1)$ 上是有界的。

上述的两个定理为样条曲线设计提供了一个方法,且用这些曲线能拼接成一个 G^2 -连续曲线,并且每个单位样条都是由正则四面体映射而成。另外,4个点可以有重合的点,拼接样条曲线的方法类似于一般的三次Bézier样条曲线^[15]。这些自由样条曲线拼接是非常直观的,因为每个样条函数端点的曲率都是0,所以在没有其他附加条件情况下容易实现 G^2 -连续。

2.3 平面四边形的保形性

在CAGD中,平面内用于样条曲线的应该是一种保形凸四边形。因为空间四边形可以仿射成一个单位正方形,例如如图3中的OABC。不失一般性,在空间中记 $O(0,0,0), A(0,1,0), B(1,1,0), C(1,0,0)$,则式(5)的样条曲线就是

$$P(u) = [\alpha_3(u) + \alpha_4(u), \alpha_2(u) + \alpha_3(u)]^T \quad (6)$$

$$u \in [0,1], P(u) \in \mathbf{R}^3$$

令 $t(u) \stackrel{\Delta}{=} \alpha_3(u) + \alpha_4(u) = u$,则

$$T(u) \stackrel{\Delta}{=} \alpha_2(u) + \alpha_3(u) = \frac{\lambda u}{1 + (\lambda - 1)v}$$

式(6)定义的平面曲线 φ 可以被看做点 $(t(u), T(u)), u \in [0,1]$ 的轨迹。通过链式法则给出表达式 φ 的二阶导数

$$\frac{d^2 T(u)}{dt^2(u)} = \frac{d^2 T(u)}{du^2} \quad (7)$$

定理3 如果 $v=v(u)$ 在集合 Γ 和 $\lambda \geq 1$ 上是一个凸函数,则平面曲线 φ 在单位正方形OABC上

是一个凸曲线。

证明:注意到 $v=v(u) \in C^2[0,1]$ 是一个凸函数,且 $v'' \leq 0$ 。通过式(7)可以推出:

$$\frac{d^2 T(u)}{dt^2(u)} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \left[1 - \frac{1}{1 + (\lambda - 1)v} \right]'' = \frac{\lambda v''}{[1 + (\lambda - 1)v]^2} - \frac{2\lambda(\lambda - 1)v'^2}{[1 + (\lambda - 1)v]^3} \leq 0$$

从而定理得证。

即使四边形退化成一个三角形,样条曲线仍然是凸的。所以,当 $u \in [0,1]$ 时,在 Γ 上应该使用凸函数 $v=v(u)$,在 $\lambda \geq 1$ 时平面凸四边形上由这种基函数产生的样条曲线是保凸的。

3 基函数构造参数曲面

设 $P_{ij} \in \mathbf{R}^3 (i, j=1, \dots, 4)$ 在空间形成一个网格,用这4个基函数去构建一个逼近样条曲面,即

$$S[u, w, \lambda, \hat{\lambda}, v(u), \hat{v}(w)] = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 P_{ij} \alpha_i[w, \lambda, v(u)] \alpha_j[u, \hat{\lambda}, \hat{v}(w)] \quad (8)$$

式中, $u, w \in [0,1]$ 是表面上的两个参数变量, λ 和 $\hat{\lambda} > 0$ 是样条曲面的两个形状控制因子, $v(u), \hat{v}(w)$ 是在 Γ 上由定义1确定的函数。图7是在网格 $[0, 1, 2, 3] \times [0, 1, 2, 3]$ 上的3个样条曲面,分别为

$$v(u) = 2 \sqrt{u(1-u)}$$

$$\hat{v}(w) = \sqrt[3]{4 \sin\left(\frac{\pi}{2}w\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}w\right)\right)}$$

$$Z = \cos(X^5) + \cos(Y^3)$$



(a) $\lambda=4, \hat{\lambda}=3$



(b) $\lambda=24, \hat{\lambda}=39$



(c) $\lambda=602, \hat{\lambda}=307$



(d) 控制网格

图7 不同形状控制参数和函数的样条曲面

Fig. 7 Spline surfaces with different shape

handles and functions

图 7 说明了该种方法的逼近特点。这种曲线拼接方法类似于文献[16]所描述的 Bézier 拼接方法, 这个样条曲面的边界密切面与两个相邻的拼接曲面共面。对于每一个单位样条曲面端点的高斯曲率是 0, 对于两个相邻曲面边界上的点的高斯曲率是一致的, 且只由共同边界曲线的曲率决定。因此, 用这种样条曲面拼接的曲面是 G^2 -连续的。

图 8 是 4 个单位样条曲面 $\lambda = 7, \hat{\lambda} = 2$ 和 $v(u) = 2\sqrt{u(1-u)}$, $\hat{v}(w) = \sqrt[3]{4\sin\left(\frac{\pi}{2}w\right)(1-w)}$ 拼接成的一个 G^2 -连续的曲面。

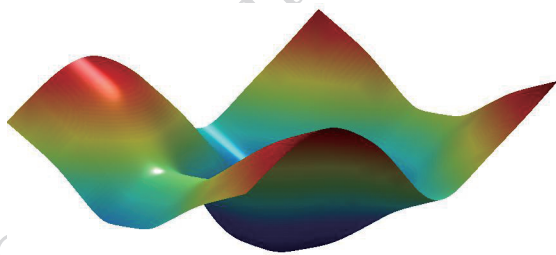


图 8 4 个样条曲面拼接的一个 G^2 -连续曲面

Fig. 8 G^2 -continuity surface is stitched by four spline surfaces

4 结 论

在文献[1-2]构造的样条曲线曲面的基础上提出了一种带有形状因子的参数样条曲线曲面基函数, 生成单参数有理样条基函数。依据这种基函数构造了一个四边形的逼近曲线和 4×4 的网格曲面。分析了它的端点及曲率的性质, 这种单位样条可以应用于空间中的一系列点或一个网格, 能生成一个没有附加条件的多自由度控制的 G^2 -连续曲线或曲面, 同时, 曲线曲面有直观的几何意义。构造曲线曲面的方法类似于传统的 Bézier 参数化方法。这种形状控制的参数样条方法的关键之处是曲线曲面可以任意地逼近一个多边形或者一个网格, 除了空间四面体, 同时也适用于平行四边形。

参考文献 (References)

[1] Bajaj C, Xu G. A-splines: local interpolation and approximation using C^k -continuous piecewise real algebraic curves[C]//Computer Science Technical Report, America. WestLafayette; Purdue

University of America. 1992, 92-144.

- [2] Bajaj C, Xu G. Data fitting with cubic A-spline[C]//Proceedings of Computer Graphics International Australia. Melbourne: World Scientific Publishing, 1996:105-113.
- [3] Mou H, Zhao G, Wang Z, et al. Simultaneous blending of convex polyhedra by algebraic splines[J]. Computer-Aided Design, 2007, 39 (11): 1003-1011.
- [4] Paluszny M, Patterson R R. Geometric control of G^2 -cubic A-spline[J]. Computer Aided Geometric Design, 1998, 15 (3): 161-187.
- [5] Duan Q, Bao F, Du S, et al. Local control of interpolating rational cubic spline curves[J]. Computer Aided Design, 2009, 41(11): 825-829.
- [6] Alcazar J G. On the different shapes arising in a family of plane rational curves depending on a parameter[J]. Computer Aided Geometric Design, 2010, 27 (2): 162-178.
- [7] Hussain M Z, Sarfraz M. Positivity preserving interpolation of positive data by rational cubics[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 218(2): 446-458.
- [8] Sánchez-Reyes J. Complex rational bézier curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2009, 26(8): 865-876.
- [9] Biard L, Farouki R T, Szafran N. Construction of rational surface patches Bounded by lines of curvature[J]. Computer Aided Geometric Design, 2010, 27(5): 359-371.
- [10] Peng F F, Chen J J. Spline on a generalized hyperbolic paraboloid[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235(8): 2451-2458.
- [11] Peng F F, Han X L. Parametric splines on a parabolic surface[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 229 (1): 183-191.
- [12] Shi F Z. Computer aided geometric design and non-uniform rational B-spline [M]. Beijing: Higher education press, 2001. [施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.]
- [13] Ju T, Liepa P, Warren J. A general geometric construction of coordinates in aconvex simplicial polytope[J]. Computer Aided Geometric Design, 2007, 24(3): 161-178.
- [14] Chen J J, Peng F F. Approximation splines of continuity over hyperbolic paraboloid[J]. Computer Engineering and Application, 2011, 47(33): 185-187. [陈娟娟, 彭丰富. 双曲抛物面上的一类连续逼近样条[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(33): 185-187.]
- [15] Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design[M]. Berlin: Springer-Verlag Academic Press, 1997.
- [16] Xu G, Bajaj C, Xue W. Regular algebraic curve segments(i)-definitions and characteristics[J]. Computer Aided Geometric Design, 2000, 17(6): 485-501.