



主办: 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

2016
07
VOL.21

ISSN1006-8961
CN11-3758/TB



人脸图像处理 P865



第21卷第7期（总第243期）

2016年7月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊
中文核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院
主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

主 编 顾行发
编辑出版 《中国图象图形学报》编辑出版委员会
邮政信箱 北京9718信箱
邮 编 100101
电子信箱 jig@radi.ac.cn
电 话 010-64807995
网 址 www.cjig.cn

广告经营许可证 京朝工商广字第0361号
总 发 行 北京报刊发行局
订 购 全国各地邮局
海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司
(邮政信箱：北京399信箱 邮编：100048)
印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian

Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences
Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS
China Society of Image and Graphics
Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

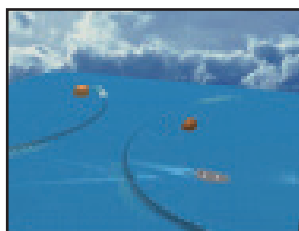
Editor-in-Chief Gu Xingfa
Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of
Image and Graphics
P.O.Box 9718, Beijing, P.R.China
Zip code 100101
E-mail jig@radi.ac.cn
Telephone 010-64807995
Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals
Domestic All Local Post Offices in China
Overseas China International Book Trading Corporation
(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China))
Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

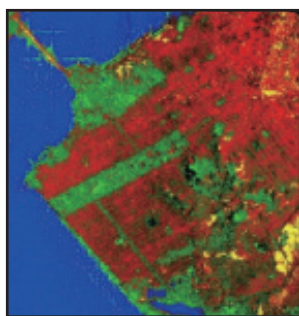
CN 11-3758/TB
ISSN 1006-8961
CODEN ZTTXFZ
国外发行代号 M1406
国内邮发代号 82-831
国内定价 60.00元



大规模柔体的连续碰撞检测算法(第901页)



大规模流体场景的真实感与实时模拟(第913页)



星载SAR影像上船舶方位向模糊去除算法(第951页)

图像处理和编码

低存储化压缩感知

王金铭, 叶时平, 徐振宇, 蒋燕君 835

3D-HEVC深度图像快速帧内编码方法

张洪彬, 伏长虹, 陈锐霖, 萧允治, 苏卫民 845

加权KNN的图文数据融合分类

康丽萍, 孙显, 许光奎 854

结合肤色分割与平滑的人脸图像快速美化

邱佳梁, 戴声奎 865

图像分析和识别

级联型P-RBM神经网络的人脸检测

叶学义, 陈雪婷, 陈华华, 顾亚风, 吕秋云 875

结合全局与局部信息活动轮廓的非同质图像分割

郝智慧, 郭满才, 宋杨杨 886

计算机图形学

带参数的多项式势函数与构造基于Metaball的过渡曲线

李军成, 宋来忠, 刘成志 893

大规模柔体的连续碰撞检测算法

周清玲, 刘艳, 程天翔 901

虚拟现实与增强现实

大规模流体场景的真实感与实时模拟

邵绪强, 杨晓丹, 李继荣, 阎蕾 913

医学图像处理

形状约束下活动轮廓模型冠脉血管图像多尺度分割

郭笑妍, 梅雪, 李振华, 曹佳松, 周宇 923

遥感图像处理

深度置信网络在极化SAR图像分类中的应用

邓磊, 付姗姗, 张儒侠 933

高光谱图像低秩表达与噪声水平估计

唐中奇, 付光远, 赵晓林, 陈进, 张利 942

星载SAR影像上船舶方位向模糊去除算法

邴磊, 邢前国, 邹娜娜, 李圳波, 吴樊 951

TDFA: 一种生成空间影像金字塔的方法

张云舟, 张陌, 王晋年, 张刚 959

无人机侦察视频超分辨率重建方法

张岩, 李建增, 李德良, 杜玉龙 967

CONTENTS

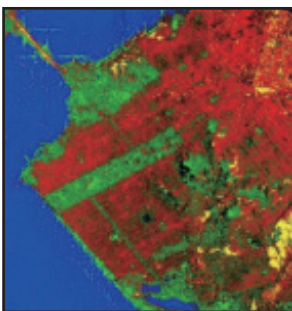
JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Continuous collision detection algorithm for large-scale deformable objects (P901)



Realistic and real-time simulation of large-scale fluids (P913)



Application of deep belief network in polarimetric SAR image classification (P951)

Image Processing and Coding

- Reducing the storage space of the measurement matrix for compressive sensing
Wang jinming, Ye shiping, Xu zhenyu, Jiang yanjun 835
- Fast intra coding for depth map in 3D-HEVC
Zhang Hongbin, Fu Changhong, Chan Yuilam, Siu Wanchi, Su Weimin 845
- Fusion method via KNN with weight adjustment for the classification of image-text co-occurrence data
Kang Liping, Sun Xian, Xu Guangluan 854
- Fast facial beautification algorithm based on skin-color segmentation and smoothness
Qiu Jialiang, Dai Shengkui 865

Image Analysis and Recognition

- Cascaded probability state-restricted Boltzmann machine for face detection
Ye Xueyi, Chen Xueting, Chen Huahua, Gu Yafeng, Lyu Qiuyun 875
- Inhomogeneous image segmentation based on active contours with global and local information
Hao Zhihui, Guo Mancai, Song Yangyang 886

Computer Graphics

- The polynomial potential function with a parameter and transition curve based on Metaball technology
Li Juncheng, Song Laizhong, Liu Chengzhi 893
- Continuous collision detection algorithm for large-scale deformable objects
Zhou Qingling, Liu Yan, Cheng Tianxiang 901

Virtual Reality and Augmented Reality

- Realistic and real-time simulation of large-scale fluids
Shao Xuqiang, Yang Xiaodan, Li Jirong, Yan Lei 913

Medical Image Processing

- Multi-scale segmentation of coronary artery image based on active contour model with shape constraints
Guo Xiaoyan, Mei Xue, Li Zhenhua, Cao Jiasong, Zhou Yu 923

Remote Sensing Image Processing

- Application of deep belief network in polarimetric SAR image classification
Deng Lei, Fu Shanshan, Zhang Ruxia 933
- Low-rank representation for hyperspectral image noise level estimation
Tang Zhongqi, Fu Guangyuan, Zhao XiaoLin, Chen Jin, Zhang Li 942
- Azimuth ambiguity removal method for ship detection based on spaceborne SAR images
Bing Lei, Xing Qianguo, Zou Nana, Li Zhenbo, Wu Fan 951
- TDFA: a generation method of spatial image pyramid
Zhang Yunzhou, Zhang Mo, Wang Jinnian, Zhang Gang 959
- Super-resolution reconstruction for UAV video
Zhang Yan, Li Jianzeng, Li Deliang, Du Yulong 967

中图法分类号: TP391.9 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2016)07-913-10

论文引用格式: Shao X Q, Yang X D, Li J R, Yan L. Realistic and real-time simulation of large-scale fluids[J]. Journal of Image and Graphics, 2016, 21(7): 913-922. [邵绪强, 杨晓丹, 李继荣, 阎蕾. 大规模流体场景的真实感与实时模拟[J]. 中国图象图形学报, 2016, 21(7): 913-922.] [DOI: 10.11834/jig.20160709]

大规模流体场景的真实感与实时模拟

邵绪强¹, 杨晓丹², 李继荣¹, 阎蕾¹

1. 华北电力大学控制与计算机工程学院, 保定 071003; 2. 北京航空航天大学计算机学院, 北京 100191

摘要: 目的 基于物理的流体动画模拟是计算机图形学领域中的研究热点, 针对实际应用中仍难以实现大规模流体场景的真实感与实时模拟, 提出了基于 shallow water 方程的物理模拟方法。方法 首先, 给出 shallow water 方程的稳定欧拉数值求解方法, 解决模拟过程中存在的毛刺、陡坡水滴斑点等数值求解的不稳定性问题; 其次, 提出刚体和粒子系统与流体高度场的稳定耦合模型, 实现双向固流耦合和流体表面细节的真实感模拟; 最后, 设计高度场的多精度网格算法以及粒子的隔点采样方法, 加速大规模流体的物理模拟计算。结果 实验结果表明, 本文方法解决了传统欧拉方法求解 shallow water 方程的流体模拟过程中存在的不稳定和计算复杂等问题, 在 300×300 网格分辨率和 2.2×10^4 粒子数的规模下, 达到了 20 帧/s 的实时模拟速度。结论 本文算法具有良好的高效性和稳定性, 适用于电子游戏和视景仿真等实时应用领域中的大规模流体场景的真实感模拟。

关键词: shallow water 方程; 流体物理模拟; 欧拉方法; 真实感; 实时模拟

Realistic and real-time simulation of large-scale fluids

Shao Xuqiang¹, Yang Xiaodan², Li Jirong¹, Yan Lei¹

1. School of Control and Computer Engineering, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;

2. School of Computer, Beihang University, Beijing 100191, China

Abstract: **Objective** Physically based fluid animation is an advanced research hotspot in the computer graphics area. However, the realistic and real-time simulation of large-scale fluid simulation is still difficult to handle using current methods. To solve these problems, this study proposes a novel physically based method based on shallow water equation. **Method** First, to deal with the instability problems of numerical solution, such as blur and water spot artificial effects, our method proposes to solve shallow water equation using a stable Euler numerical method. Second, we propose a stable model of coupling fluid height field with rigid body and particle system; thus, a two-way fluid-solid coupling and small-scale features can be realistically simulated. Third, to achieve real-time simulation, we design a multiresolution grid algorithm and an interval particle sampling algorithm to accelerate the entire simulation process. **Result** Experimental results demonstrate that the proposed method can solve the instability and calculation complex problems and achieve 20 fps in the configuration of 300×300 grid resolution and 22K fluid particles. **Conclusion** The proposed method is stable and efficient and suits the realistic simulation of large-scale fluid for real-time applications, such as computer games and 3D vision simulation.

Key words: shallow water equation; physically based fluid simulation; Euler method; realistic simulation; real-time

收稿日期: 2015-11-23; 修回日期: 2016-02-26

基金项目: 国家自然科学基金项目(61502168), 河北省自然科学基金项目(F2016502069)

第一作者简介: 邵绪强(1982—), 男, 讲师, 2014 年于北京航空航天大学获计算机应用技术专业工学博士学位, 主要研究方向为计算机动画、3 维重建和并行计算等。E-mail: shaoxuqiang@163.com

Supported by: National Natural Science Foundation of China(61502168); Natural Science Foundation of Hebei Province, China(F2016502069)

0 引言

流体是人们现实生活中存在的最普遍的物质形态,其真实感模拟可以极大提高虚拟场景仿真的逼真度和沉浸感。目前,流体模拟在电子游戏、影视特效以及灾害预警等领域都有着广泛的应用,但如何实现大规模流体场景的真实感与实时模拟^[1]仍是一个亟待解决的问题。

流体的真实感模拟方法主要有基于过程的模拟方法^[2-3]和基于物理的模拟方法^[4-5]两类。基于过程的方法采用经验模型近似流体运动,计算简单而适于实时应用,如电子游戏。目前,在计算机图形学领域,对像河流、湖泊、海洋这样广阔水域的模拟大部分还是使用过程的模拟方法。Mastem 等人^[2]使用基于快速傅里叶变换(FFT)方法建立大规模流体仿真模型,该方法假定任何波动都可由多个正弦波叠加得到,从而海洋表面的波纹可通过多个正弦波合成,形成海洋表面的高度场,在此基础上为得到更好的视觉效果,需要叠加相当多数量的正弦波模拟细节。Thon 等人^[3]结合了 2D 的 FFT 和 3D 的湍流方程建立模型,首先用 FFT 形成海洋的主要场景,选择谱变换后具有代表性的频率成分,将 3D 的湍流方程叠加其中,模拟出海洋波浪的场景。然而,由于没有真实物理模型支撑,基于过程的方法只能模拟简单的流体现象,难以模拟流固交互和浪花、泡沫等细节效果。

基于物理的流体模拟方法主要有两种,即基于网格的欧拉方法和基于粒子的拉格朗日方法。欧拉网格方法^[4,6]把流体占据的计算空间按一定规则划分为网格,然后分析被流体所充满的空间中每一个网格位置上的流体的速度、压强、密度等参数随时间和空间的变化。而拉格朗日粒子法^[5,7]把流体离散为粒子集合,从分析流体各个粒子的运动着手,即研究每个流体粒子的速度、压强、密度等描述流体运动的参数随时间的变化状况。基于物理的模拟方法符合真实世界的流体物理规律,易于模拟流固交互、水面细节等复杂流体现象。然而,用基于物理的方法对大规模水体进行 3 维真实感模拟,需要成百万的网格或粒子,计算效率低下难以达到实时。

而对于电子游戏和虚拟现实等领域的流体模拟,真实感固然是重点考虑指标,但模拟速度和稳定

性更为重要。因此,简化物理模型复杂性是基于物理的流体模拟方法提高计算效率的主要途径。shallow water 方程从描述水体运动最完善的纳维-斯托克斯方程(N-S)简化到 2 维而来。由于 shallow water 方程计算效率高,适合模拟大规模流体场景的模拟,越来越多的学者致力于研究基于 shallow water 方程的流体模拟方法^[8-12]。基于 shallow water 方程的模拟方法将水体表面看做高度场,通过更新高度场得到流体表面的运动情况。通过将 N-S 方程由 3 维简化到 2 维,并忽略粘性力和压力计算,在保持计算简单、运算速度快的同时符合物理规律。最近,Chentanez 等人^[9]通过在 GPU 上利用一致性欧拉网格方法求解 shallow water 方程,并耦合粒子系统,实时地模拟了较大规模的流体场景,但该方法在采用高分辨率网格模拟流体时计算效率仍较低,且在地形高度变化幅度较大时存在数值求解的不稳定,影响了该技术的推广和应用。针对这些问题,本文提出一种 shallow water 方程的稳定欧拉数值求解方法,解决了模拟过程中存在的毛刺、陡坡水滴斑点等问题。通过设计刚体和粒子系统与流体高度场的稳定耦合模型,实现了双向固流耦合和流体表面细节的真实感模拟。最后提出了高度场的多精度网格算法以及粒子的隔点采样方法,加速大规模流体的物理模拟计算。

1 基于 shallow water 方程的稳定欧拉方法

采用欧拉方法对 shallow water 方程进行数值求解,用一系列网格柱表示流体,通过计算每一时刻的高度场和速度场来更新流体表面。shallow water 方程的离散化形式为

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla h - h \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - g \nabla H \quad (2)$$

式中, h 表示流体的深度, $H = \eta + h$ 为水面高度, η 为地形高度, $\mathbf{u} = [u, v]^T$ 表示流体水平方向的速度, g 是重力加速度大小。时间积分采用欧拉时间积分方法计算, $\nabla \cdot \mathbf{u}$ 和 ∇H 采用有限差分进行计算,而对于关键的对流项 $-\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ 和 $-\mathbf{u} \cdot \nabla h$ 的求解,采用文献[4]中的半拉格朗日方法以实现较

大时间步长下的稳定求解,并对数值求解过程中出现的不稳定性问题:毛刺现象和陡坡水斑现象进行了处理。

1.1 毛刺现象处理

数值计算的误差积累会造成系统的不稳定,而边界又是最易产生不稳定因素的区域。当波浪从相对较深的水域传播到相对较浅的水域时,波浪的振幅会增加的同时波长会减小,经过时间积分的积累,最后波长会小于网格边长的大小 Δx ,这样欧拉网格便无法解析,超越了网格的精度,造成数值涟漪,形成毛刺现象。通过监测波浪的变化,使其在一个时间步长内变化不要过于剧烈,从而避免波浪振幅过大的情况出现。在每个时间步长,对于任一网格点 (i, j) ,检测其高度场值与相邻网格高度场的绝对差值是否小于一定阈值,即

$$|H_{i,j} - H_{i-1,j}| \leq 2\Delta x \quad (3)$$

$$|H_{i,j} - H_{i,j-1}| \leq 2\Delta x \quad (4)$$

式中,阈值选为 $2\Delta x$ 。当同时不满足式(3)(4)时,则证明产生了毛刺现象,此时对高度场值进行以下处理:

$$H_{i,j} = 0.5(H_{i-1,j} + H_{i,j-1}) + 2\Delta x \quad (5)$$

式(5)对产生毛刺的高度场进行了平滑,使其等于相邻网格的均值并加上最大阈值范围,根据不同地形的凹凸程度,该阈值有所变化。为了避免边界高度变化幅度过大,设置在每一时间步长边界网格的高度场等于边界相邻的网格的高度场。这样在每一步长进行高度平滑,高度不会在几个时间步长内不断积累,造成毛刺现象。

当流体的运动速度过大的时候,导致一个步长内,高度场平流距离过大,也会导致系统不稳定。尤其在边界区域,速度过大,会向边界外的方向运动,一个时间步长就可能运动较远的距离。如果仅仅对高度场进行夹断处理,模拟结果会有一个大幅的变化,就像跳帧现象。为避免这种跳帧,同时为保证边界区域不产生毛刺现象,将边界的水平速度设置为0,以避免其向外扩散,造成系统的不稳定。

对于非边界网格,当流体运动较为激烈导致运动速度很大时,同样会带来不稳定问题,采用夹断的方法限制速度的大小,与高度场的处理相似,在每一时间步长上检测速度的变化,速度在一个步长内变化大于一定阈值后,便立即进行夹断处理,避免在后

面时间内积累,导致毛刺现象。计算方法为

$$u \leq \alpha \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \quad (6)$$

$$v \leq \alpha \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \quad (7)$$

式中, $0 < \alpha < 1$ 为常量系数。流体运动速度的大小以一个时间步长内经过网格数量度量。设置速度最大为一个时间步长可经过半个网格边长的距离。当速度大于设定的阈值时,进行夹断处理,使其等于阈值。这样设置波浪传播的速度可极大地提升系统的稳定性。

1.2 陡坡水斑现象处理

shallow water 方程不仅可以模拟在平滑地形之上的流体运动,也可以模拟在凹凸不平地形之上的流体运动。当地形比较突兀,有陡峭的坡度变化时,地形会露出流体表面。然而,采用 shallow water 方程模拟流体,当地形露出水体表面时,部分流体残留在陡坡上形成斑点的陡坡水斑现象,造成了模拟的失真。

为了处理陡坡水斑问题,本文提出处理陡坡水斑算法。首先检测流体地形的变化,查找到符合产生斑点残水效应的区域。当地形高度场变化较大,且水体表面的高度低于地形高度的地带即为产生斑点残水效应的区域。检测公式为

$$\begin{cases} |\nabla \eta_{i,j}| > \beta \Delta x \\ H_{i-1,j} < \eta_{i,j} \text{ 或 } H_{i,j-1} < \eta_{i,j} \\ H_{i+1,j} < \eta_{i,j} \text{ 或 } H_{i,j+1} < \eta_{i,j} \end{cases} \quad (8)$$

式中, $\eta_{i,j}$ 表示网格点 (i, j) 处的地形高度, $\nabla \eta_{i,j}$ 表示这一点的的变化梯度,常量系数 $\beta = 3$ 。当地形变化大于3倍的网格边长,且邻居网格的水面高度低于此网格的地形高度时,会产生陡坡水斑现象。

在产生陡坡水斑残水的网格点,要让流体表面高度与相邻的网格流体的高度尽量接近,这样才起到平滑水斑的效果。处理公式为

$$\begin{cases} H_{i-1,j} = H_{i-1,j}^{\text{current}} + \lambda (H_{i,j} - H_{i-1,j}^{\text{current}}) \\ H_{i,j-1} = H_{i,j-1}^{\text{current}} + \lambda (H_{i,j} - H_{i,j-1}^{\text{current}}) \\ H_{i+1,j} = H_{i+1,j}^{\text{current}} + \lambda (H_{i,j} - H_{i+1,j}^{\text{current}}) \\ H_{i,j+1} = H_{i,j+1}^{\text{current}} + \lambda (H_{i,j} - H_{i,j+1}^{\text{current}}) \end{cases} \quad (9)$$

式中, $H_{i,j}^{\text{current}}$ 为流体高度场当前高度,经过如上平滑处理得到最终值 $H_{i,j}$ 。常数系数 $\lambda = 0.5$ 。通过平滑产生水斑的网格的水面高度,使其与相邻水面较高网格的高度尽量相近,达到去除水斑现象的效果。

2 流固交互模拟

2.1 流体对刚体的作用

流体会对漂浮在水面或淹没在水中的刚体产生作用力,影响物体的运动状态,为达到逼真的模拟效果,分别提出了浮力、拉力和举力模型。其中浮力的计算模型为

$$\mathbf{F}_{\text{bouyancy}} = \begin{cases} 0 & h(p) < p_y \\ \rho g A (h(p) - p_y) \mathbf{n}_y \mathbf{y} & \text{其他} \end{cases} \quad (10)$$

式中, $\mathbf{F}_{\text{bouyancy}}$ 向量代表一个固体三角面片所受到的浮力, p 为三角面片的重心, $h(p)$ 为 p 垂直投影到水体表面处的水面深度, p_y 为三角面片重心 p 所在的高度, g 为重力加速度, ρ 为水的密度, A 为三角面片垂直投影到水体表面的面积, $\mathbf{n}_y$ 为三角面片的法向量沿 y 轴分量的大小, $\mathbf{y} = [0, 1, 0]^T$ 为垂直水面向上的单位向量。

当 $h(p) < p_y$ 时,即三角面片在水体上面,没有跟水体接触,那么固体所受浮力为 0;而当 $h(p) \geq p_y$ 时,即三角面片在水体中或刚好漂浮在水面上,与水体接触便会受到水对它的浮力作用。应用阿基米德原理,浸在液体里的物体受到向上的浮力,浮力大小等于物体排开液体所受的重力,其大小为 $\rho g V$ 。 V 为该三角面片垂直投影到水体表面的三棱柱排开的水的体积,大小为投影面积 A 乘以三棱柱在水中的高度 $(h(p) - p_y)$ 。若面片沿 y 轴的向固体外的朝向为向下,则 $\mathbf{F}_{\text{bouyancy}}$ 为正;若向上,则为负。

拉力和举力在物体和水体交互的界面处进行计算,其方向与物体表面和流体的相对运动相关,大小与固体的速度和位置相关。如图 1 所示,向量 $\mathbf{N}$ 为三角面片的法向量,方向垂直于面片朝向固体外部,向量 $\mathbf{U}$ 为三角面片与水体表面的相对运动方向。向量 $\mathbf{F}_{\text{drag}}$ 为拉力,与相对运动方向相反;向量 $\mathbf{F}_{\text{lift}}$ 为举力,与相对运动垂直。

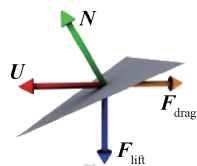


图 1 拉力和举力

Fig. 1 Drag force and lift force

拉力和举力的计算模型公式为

$$\mathbf{F}_{\text{drag}} = -\frac{1}{2} C^D A^{\text{effective}} |\mathbf{u}^{\text{rel}}| \quad (11)$$

$$\mathbf{F}_{\text{lift}} = -\frac{1}{2} C^L A^{\text{effective}} |\mathbf{u}^{\text{rel}}| \left(\mathbf{u}^{\text{rel}} \times \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{u}^{\text{rel}}}{|\mathbf{N} \times \mathbf{u}^{\text{rel}}|} \right) \quad (12)$$

式中, C^D 、 C^L 为拉力和举力的影响常量系数, $\mathbf{u}^{\text{rel}} = \mathbf{u}^{\text{triangle}} - \mathbf{u}^{\text{fluid}}$ 为三角面片和流体的相对速度, $\mathbf{u}^{\text{fluid}} = \left[u, v, \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right]^T$ 为三角面片重心垂直投影到流体表面所在处的流体速度。 $A^{\text{effective}}$ 为三角面片有效面积,即

$$A^{\text{effective}} = \begin{cases} 0 & h(p) < p_y \text{ 或 } \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}^{\text{rel}} < 0 \\ \frac{|\mathbf{N} \times \mathbf{u}^{\text{rel}}|}{|\mathbf{u}^{\text{rel}}|} A & \text{其他} \end{cases} \quad (13)$$

2.2 刚体对流体的作用

物体在水体表面或水中运动不但会受到水体对它的作用力,同时也会对水施加作用力,影响水的运动。在基于 shallow water 方程的流体模拟过程中表现为:物体对其运动轨迹上经过的流体网格的高度场产生影响,同时对网格的速度场也产生影响。在一个时间步长内,运动较快的物体可能会经过多个水体的网格,即运动距离超过一个网格边长。在这种情况下,对水体的作用应施加在物体运动轨迹经过的所有网格上。在每一个时间步长内,采用的刚体对水体的作用算法步骤如下:

1) 计算物体运动经过的水体网格数目,即子循环次数 $n^{\text{step}} = \max(1, |\mathbf{u}^{\text{rel}} \cdot \mathbf{y}| \frac{\Delta t}{\Delta x} + 0.5)$ 。

2) 计算物体运动过程中排开水的体积 $V^p = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}^{\text{rel}} A \Delta t$ 。

3) 确定法向量沿 y 轴分量的符号为 $\text{sgn}(n_y)$ 。其中, n_y 为法向量沿 y 轴分量。

4) 在每个子循环中,计算每个被影响到的水体网格其高度场和速度场的变化。

经过以上步骤,完成一个三角面片在一个时间步长内对其运动轨迹划过的所有网格的作用影响。第 1 步的子循环次数最小为 1,最少对一个水体网格作用,最大为物体快速划过的网格数目。第 2 步中,物体运动过程中排开水的体积为其与水体相对运动速度在一个时间步长 Δt 内运动距离和三角面片面积乘积,是一个三棱柱的体积。第 3 步中,确定三

角面片指向固体外部朝向,若为1则方向为垂直水面向上,若为-1则方向为垂直水面向下。第4步计算水体网格高度场和速度场的变化,具体算法为:

- 1) for $q = 1$ to substeps do
- 2) $p_s = p + V \frac{q\Delta t}{n_{\text{step}}}$;
- 3) 设置 (i, j) 为距离 p_s 最近的网格点;
- 4) 计算面片在水面下的深度 $\text{depth} = h_{i,j} - p_z$;
- 5) if $\text{depth} > 0$ then
- 6) 计算阻尼系数 $C^d = e^{-\text{depth}}$;
- 7) 计算高度场变化 $h_{i,j} += C^d \frac{v_{\text{disp}}}{n_{\text{step}} \Delta x^2}$;
- 8) 计算速度变化 $u_{i,j} += \text{sgn}(n_y) \times C^d (V_x - u_{i,j})$, $v_{i,j} += \text{sgn}(n_y) \times C^d (V_y - v_{i,j})$;
- 9) end if
- 10) end for

在上述算法中,语句2)计算每一子步长中,物体运动后三角面片重心到达的位置。语句5)根据面片在水面以下的深度来判定物体是否对流体产生影响。语句6)计算随着固体在水体下深度的增加减少物体对流体的作用影响,阻尼系数与三角面片在水面以下深度成负指数增长,即在水体下越深其作用影响越小,而在水体下越浅其作用影响越大。语句7)计算对高度场的影响,其大小与物体划过水面排出水的体积有关,体积除以面积和子步长数,得到每个子步长的高度场变化。语句8)计算对水平速度的影响,其大小与三角面片和水体相对运动的速度成正比,方向为三角面片的朝向。

3 流体细节生成

基于 shallow water 方程的欧拉方法,将流体表面离散成高度场,其模拟结果只能表现流体表面形态,不能模拟波浪破碎、水花飞溅、漂浮泡沫等流体细节。针对此问题,提出了基于 shallow water 方程的欧拉方法与 SPH (smoothed particle hydrodynamics) 粒子方法的耦合方法来恢复流体细节,并提出隔点采样方法加速计算。

3.1 SPH 粒子的耦合

表示流体细节的 SPH 粒子与基于 shallow water 方程的流体的双向耦合过程中需要保持质量守恒和动量守恒。当粒子从水体高度场表面某一网格生成

时,粒子会离开流体并带走一部分质量和动量;当粒子落到水体高度场表面另一处网格时,便与水体融合并将自身携带的质量和动量归还给此处的水体。在模拟过程中,设置 SPH 粒子半径为 r ,则其体积 $V^p = \frac{4}{3}\pi r^3$ 。粒子在生成或消逝时引起的流体高度场变化量 Δh 的计算公式为 $\Delta h = \pm \frac{nV^p}{\Delta x^2}$ 。其中,生成粒子时 Δh 为负值,粒子消逝时 Δh 为正值, n 为一个网格里生成或消逝的粒子数。

对于粒子的生成,为了符合视觉效果,不是在网格某一固定位置生成粒子,而是在网格内部的任一随机位置生成。首先用随机函数,生成属于区间 $[1, \Delta x]$ 内的两个随机数 a 和 b ,则索引为 (i, j) 的网格中粒子 p 的生成位置 (x^p, z^p) 的计算公式为

$$x^p = i\Delta x + a \quad (14)$$

$$z^p = j\Delta x + b \quad (15)$$

当 SPH 粒子生成时,其初始速度的水平值通过所属网格的顶点速度的线性插值计算, y 轴速度设为 0。接着,粒子在空中做平抛运动,并受自身重力影响,慢慢会落回水面。若粒子速度为 (v_x^p, v_y^p, v_z^p) ,则落回水面高度场时,将其动量传递给高度场,那么水体网格的速度场更新为

$$u_{i,j} = \frac{u_{i,j}^{\text{old}} h_{i,j} \Delta x^2 + v_x^p V^p}{h_{i,j} \Delta x^2 + V^p} \quad (16)$$

$$v_{i,j} = \frac{v_{i,j}^{\text{old}} h_{i,j} \Delta x^2 + v_z^p V^p}{h_{i,j} \Delta x^2 + V^p} \quad (17)$$

式中, $u_{i,j}^{\text{old}}, v_{i,j}^{\text{old}}$ 为未更新时的流体网格速度。

SPH 粒子落到流体网格表面时,一部分以一定概率转为泡沫粒子,另一部分粒子则融合到水体中而消逝。所有粒子在生成时生命周期 t_{life} 设为无限大,当转为泡沫粒子时,设置其 t_{life} 为一个随机常量,并在每个时间步长减去 Δt ,直至其值为 0 而消逝。泡沫粒子在水面漂浮时,其速度和高度等于它所处位置流体的速度和高度,这样泡沫粒子可以随着流体网格的运动而漂浮。

3.2 SPH 粒子的生成

水体与固体交互过程中,如果水体与固体相对运动速度过大,水体表面张力不足,会使表面破碎,产生水滴粒子。模拟这种现象,关键点在于检测出固体周围的网格,并在符合条件的网格上生成粒子即可。首先通过定位刚体所在位置来确定生成粒子

的网格范围,接着具体确定生成粒子的时间和具体生成粒子的网格。当固体刚刚落入水体,网格高度场产生剧烈变化时会产生粒子。检测公式为

$$\begin{cases} h_{i,j}^{\text{pre}} > p_y \\ h_{i,j} < p_y \\ |\mathbf{u}^{\text{rel}}| > u^d \end{cases} \quad (18)$$

式中, $h_{i,j}^{\text{pre}}$ 为上一时间步长的被检测网格的高度, (p_x, p_y, p_z) 为被检测刚体三角面片的重心坐标, $h_{i,j}$ 为当前网格高度, u^d 为用户设定阈值。前两个条件表明固体周围的高度场发生了剧烈变化,第3个条件保证了固体和流体的相对速度较大。

生成粒子的速度除了与水体速度相关外,还与固体与水体的相互运动速度的大小相关,计算公式为

$$\mathbf{u}^p = \mathbf{u}^{\text{fluid}} - \gamma \mathbf{u}^{\text{rel}} \quad (19)$$

式中, γ 为用户设定常量。粒子速度应基本与流体速度相同,但由于受到固体速度的冲击,根据动量守恒可知,会减小粒子从流体继承的速度大小。

流体本身运动较为激烈时,也会使流体表面张力不足而破碎,生成粒子。如波浪拍打水面,当波浪向前冲时,它的前锋会溅出水花。模拟这样的现象,关键点在于检测到波浪的前锋的峰顶,并在峰顶处的网格生成水滴粒子。用来判断波浪前锋的峰顶的3个条件为

$$\begin{cases} |\nabla h_{i,j}| > \kappa \frac{g\Delta t}{\Delta x} \\ \nabla^2 h_{i,j} < l^c \\ \frac{h_{i,j} - h_{i,j}^{\text{pre}}}{\Delta t} > v^c \end{cases} \quad (20)$$

式中, $\nabla h_{i,j}$ 为高度场的梯度,第1个条件要使高度场梯度大于一定阈值,阈值由重力下降的距离与网格边长的比值决定, κ 为用户设定常数,该条件检测到水体比较陡峭的网格。第2个条件要使波长为数个网格宽度的长度, l^c 为波长系数,该条件保证生成粒子的网格在波浪顶端的附近。第3个条件要使网格高度增长速度较快, v^c 为速度常量,该条件保证网格高度增长较快,是波浪的前锋。检测网格若同时满足以上3个条件,则表明在该网格点产生波浪破碎现象,需要生成 SPH 粒子进行模拟。

3.3 SPH 粒子隔点采样算法

高度场变化生成粒子要对所有的流体网格依次进行检测,需要耗费大量的计算时间。根据经验,若

一个网格属于符合条件的网格可生成粒子,那么与该网格相邻的网格大部分也符合生成粒子的条件。相邻网格点的流体不会有过于大的高度差,否则会产生不稳定的毛刺现象。一个时间步长内,流体的速度不会使得流体高度场的平流变化过大,基于这个理论,那么在计算生成粒子的网格点时,可不必逐点计算,本文提出隔点采样法,对网格进行 SPH 粒子隔点采样,可减少 75% 的计算时间。算法第 1 步对网格进行间隔采样检测;第 2 步生成粒子。只进行隔点采样,并在该点生成粒子,势必会造成其余符合条件的网格漏检测,为避免这个现象,并基于前面所述原理,可在符合条件的网格点周边的网格点同样生成粒子。

进行隔点采样,符合条件的网格可生成粒子。但是没要被采样到的网格也有可能生成粒子,采取将其周围 3 个网格都生成粒子的方法解决该问题,效果与逐点采样法基本相同,且计算效率提升,减少了粒子系统模拟环节的计算时间。隔点采样和粒子生成的示意图如 2 所示。

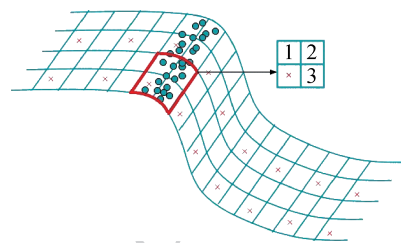


图2 隔点采样算法

Fig. 2 Interval sampling method

在图 2 的隔点采样方法示意图中,叉号网格为需要检测的网格,圆点表示生成的水滴粒子。图 2 表示刚刚检测到生成粒子的网格,并生成粒子,粒子还没有在空中运动,也没有再落回流体表面,因此图 2 中没有泡沫粒子。隔点采样后只有约 25% 的网格需要检测计算,查看是否满足生成粒子的条件。以方框标出的网格为例,叉号标出的网格为被检测的网格,并符合生成粒子的条件,但除了叉号网格需要生成粒子外,它周围的 1、2、3 号网格同样处在波峰位置,可以产生波浪破碎的现象,因此也需要生成水滴粒子,否则不符合物理规律,而且视觉效果较差。如此,隔点采样方法只进行了少部分网格的检测计算,达到的效果与对网格逐一进行检测所得到的模拟效果一样,但计算效率提升。

4 多精度网格模型

模拟流固交互细节,需要精确计算双向耦合作用,以达到良好的视觉效果,采用高精度的网格计算交互过程,以减小计算误差。这样的策略势必会消耗大量计算资源,影响流体模拟系统的实时性。此外,对于模拟大规模流体场景采用浅水方程框架,交互过程只影响计算流固双向耦合作用阶段,并不影响解算浅水方程模拟流体运动阶段,因此为达到精确计算流固交互过程而采用高精度网格。但是对于大规模流体而言,流体网格占场景的主要区域,固体只在某些部位出现,相对于流体,流固交互的区域极小。若采样高精度网格,大部分模拟时间消耗于计算流体运动,并非用于计算流固交互过程中,造成了大量计算资源的浪费。针对这个问题,提出多精度网格加速算法,根据系统框架模拟流体运动还是模拟流固交互运动,自动转换不同精度的网格,使计算基于 shallow water 方程的流体运动时,用低精度网格加快计算速度,而在计算流固交互环节时,使用高精度网格以精确计算交互作用。

计算水体与固体交互,需要精确计算高度场、速度场、相互作用力等物理量,应该使用高精度的计算网格减小误差;而计算流体运动时,不涉及交互和绘制,且流体的运动不是观察的重点,可采用低精度的计算网格,进一步提高计算效率。在绘制流体表面时,为满足视觉需求,同样需要高精度网格,以达到比较好的效果。基于这个思想,设计两层不同分辨率的网格,一个是低精度的物理网格,另一个是高精度的用于绘制和计算交互的网格。多精度网格加速算法就是在这两种网格中模拟计算时适时的切换,以达到提高计算效率的目的。多精度网格加速算法步骤如下:

- 1) 分别初始化低精度的物理网格和高精度的交互绘制网格;
- 2) 采用高精度网格计算初始流体运动;
- 3) 继续使用高精度网格精确计算流固交互过程;
- 4) 切换网格,采样或双线性插值得到低精度网格;
- 5) 采用低精度网格计算流体运动;
- 6) 切换网格,双线性插值得到高精度网格;

7) 采用高精度网格绘制场景;

8) 完成此步长计算和绘制,转至步骤3)。

网格切换过程如图3所示。其中,网格表示模拟流体的高度场,中部黑线形体表示固体。计算流体和固体交互时,采用高精度网格模拟计算,通过把高度场、速度场、力等物理量的交互数据映射或者插值到低精度的物理网格,然后在计算流体运动情况时,采用低精度的物理网格,最后在进行绘制时,只需要流体的高度场,因此把计算运动的数值结果,如高度再映射回高精度网格进行渲染。

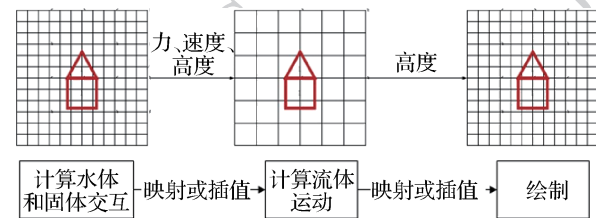


图3 多精度网格模型

Fig. 3 Multi-resolution grid model

5 实验和结果分析

实验硬件配置为: Intel Xeon E5630 CPU、6GB RAM 和 NVIDIA Geforce GTX 690 GPU; 软件编程环境为: Windows 7、Visual studio 2008 和 OpenGL 2.0。最后对输出三角形网格面利用开源光线跟踪绘制引擎 POV-Ray 3.6 进行真实感绘制。

传统方法使用欧拉网格方法通过求解 shallow water 方程来模拟流体时,如果流体速度过大或高度场变化过大,模拟结果会产生毛刺现象。本文提出的毛刺平滑方法可以有效地消除毛刺现象,如图4所示。流体表面采用 150×150 分辨率网格表示,并建立在凹凸不平的地形上。图4(a)为未使用平滑毛刺方法^[9-10],由于地形变化剧烈,高度场梯度过大,会出现参差不齐的尖端即毛刺现象。图4(b)为使用本文平滑毛刺方法后得到的结果,可以看到该算法正确检测到产生毛刺的区域,经处理使流体可以平滑的流过,流体表面不会产生毛刺现象。

本文提出的处理陡坡水斑算法,在水体流过陡坡后,留在陡坡上的水体平滑、连成一片慢慢退却,残水不会产生陡坡水斑现象,如图5所示。实验采用 125×125 分辨率网格,初始状态流体有向右的运动速度 3.0 m/s 。图5(a)为未使用水斑处理算法产

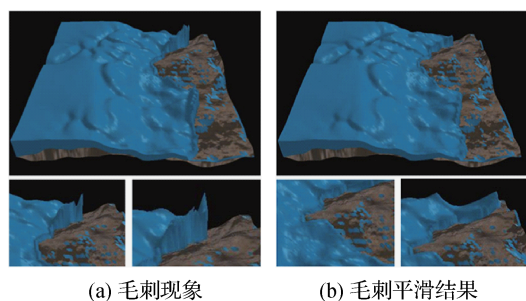


图4 毛刺平滑方法实验效果

Fig. 4 Results of water burrs' removing method
((a) water burrs; (b) water burrs' removing)

生陡坡水斑效果^[9-10],在陡坡上留下呈斑点状流体残留,影响了模拟真实感。图5(b)为加入本文处理陡坡水斑算法后得到的结果,可以看到水体流过陡坡后,在陡坡上留下的残水慢慢退去,并连成一片,不会产生由于数值求解不稳定造成的陡坡水斑现象。

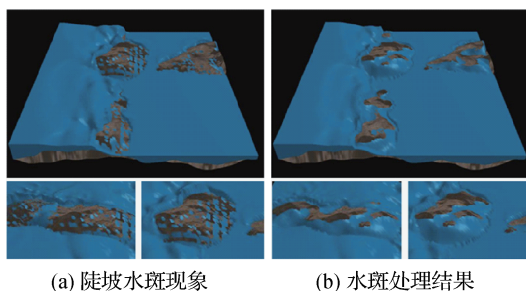


图5 处理陡坡水斑算法实验结果图

Fig. 5 Results of water spots' removing method
((a) water spots; (b) water spots' removing)

固流耦合的真实感模拟是流体动画的重要内容。本文提出的固流耦合方法可以稳定地模拟刚性固体和水面的双向交互效果,如图6所示。采用 120×120 分辨率的网格高度场表示流体,固体为数个刚性木箱子。水面原本静止,当箱子受到重力作用落入水中后,使水面在箱子周围产生波纹,并且波纹逐渐向远处扩散。由于运动速度较大,箱子一开始淹没到水里,但收到浮力作用,使箱子逐渐显现出来。箱子做上下的弹性运动,最后静止。

通过把 SPH 粒子耦合到网格高度场以模拟流

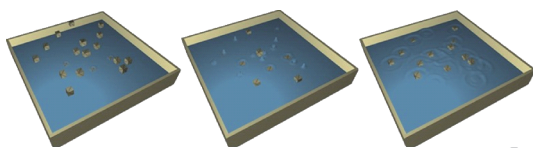


图6 刚性箱子和水面的双向耦合

Fig. 6 Two-way coupling of rigid boxes and water

体剧烈运动产生的液滴飞溅和泡沫等细节,如图7所示。数个木头和箱子做自由落体运动落入静止水面中。固体周围符合条件的网格自动生成带有初始速度的 SPH 粒子,在水面上形成水花飞溅效果。当粒子飞溅起来,受自身重力作用在另一个位置落到水体表面,70%的水滴粒子消逝,30%的水滴粒子转换为泡沫粒子,漂浮在水面上,直到生命周期结束,泡沫粒子消逝。实验中粒子的最大数目为7 000。

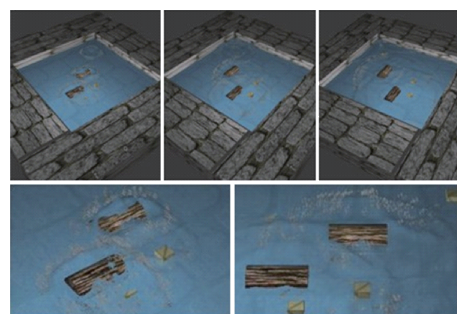
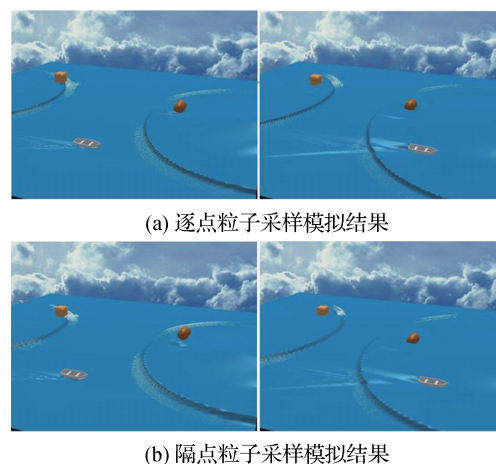


图7 固流交互中液滴飞溅和泡沫模拟结果

Fig. 7 Simulation results of water splashes and foams in fluid-solid coupling

本文提出隔点采样方法来降低 SPH 粒子采样分辨率以提高效率,效果如图8所示。实验采用 300×300 分辨率的高度场网格,图8(a)(b)分别为逐点采样算法和本文的隔点采样方法模拟高度场生成粒子效果。其中逐点采样算法生成粒子最大数目为 1.61×10^4 ,而隔点采样方法生成粒子最大数目为 1.57×10^4 ,只略小于逐点采样算法,从宏观看,生成粒子效果基本一致。



(b) 隔点粒子采样模拟结果

图8 不同粒子采样算法模拟结果对比

Fig. 8 The results of different particle sampling methods
((a) successive particle sampling algorithm;
(b) interval particle sampling algorithm)

传统统一网格算法^[9-10]与本文多精度网格算法模拟效果的对比如图9所示。图9(a)为用分辨率为 300×300 的统一网格计算流体运动及流固交互的模拟效果,图9(b)为采用 150×150 低分辨率网格计算流体运动、 300×300 高分辨率网格计算流固交互的模拟效果。从两幅对比结果可以看出,统一分辨率网格算法比多精度网格算法模拟的流体稍精细一些,但整体效果几乎没有区别。

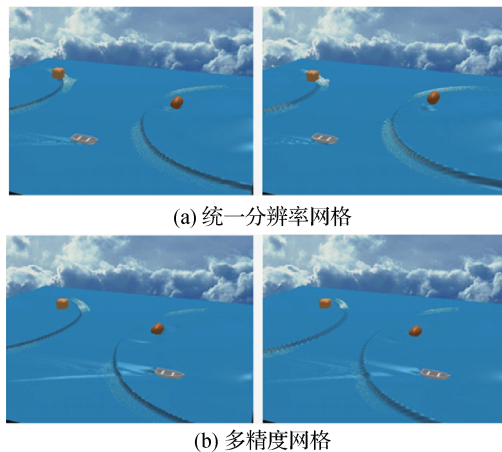


图9 不同网格算法模拟效果对比

Fig. 9 The results of different grid resolution methods
(a) single resolution grid algorithm;
(b) multi-resolution grid algorithm)

隔点采样方法在不同网格规模下相对于逐点采样算法的加速比如图10所示。从对比结果得到,网格规模对加速比的影响较小,加速比呈现比较平稳的趋势,基本保持在1.25到1.5之间。这是由于不论在多大规模的网格的情况下,算法都是隔点检测网格,相对于网格规模,有75%的网格不用检测,生成粒子的网格只与符合生成粒子条件的网格数量相关,即与流体场景相关。

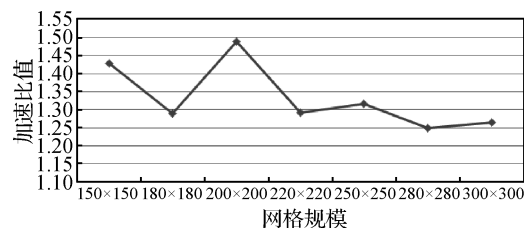


图10 隔点采样算法加速比

Fig. 10 The speed-up ratio of interval sampling method

多精度网格方法相对于统一网格方法^[9-10]的加速比如图11所示。高精度网格为 300×300 ,低精

度网格为 $(300/n) \times (300/n)$ 。从对比结果可以看出,加速呈现开始较快增加后,在 n 值大于2.5以后逐渐趋于平稳。这是因为 n 值较大,造成计算流体的物理网格精度很低,其计算时间与高精度下计算流固交互时间相比,已占用极少的时间。所以, n 值较大的情况下,加速比趋于平稳,最大可达到1.7倍以上。

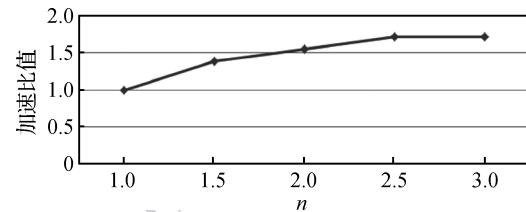


图11 多精度网格算法加速比

Fig. 11 The speed-up ratio of multi-resolution grid method

图12给出了不同网格规模及粒子数目情况下本文算法的模拟帧率,这里每一帧计算时间包含物理计算以及渲染两部分。从图12中可以看出,在较大规模的流体场景下,本文方法可以保持25帧/s到30帧/s的帧率,达到实时性能要求。

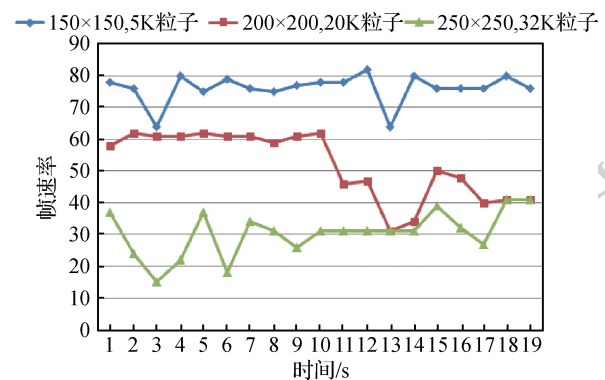


图12 不同规模场景下系统帧率

Fig. 12 The time performances of different scenarios

6 结论

为了实现大规模流体场景的真实感与实时模拟,提出了一种基于 shallow water 方程的稳定欧拉模拟方法。该方法有效解决了传统方法在模拟过程中出现的毛刺、陡坡水斑等不稳定问题;实现了高度场流体表面和刚性物体的双向耦合,并通过粒子采样捕获流体细节特征以增强模拟的真实感;通过多精度网格算法以及隔点采样方法,有效解决了流体

交互模拟阶段和粒子系统生成阶段计算资源分配不合理的问题,提高了计算效率。实验结果表明,本方法对于分辨率为 300×300 网格规模,粒子数为 2.2×10^4 的情况下,模拟帧率可达到 20 帧/s 以上,可广泛应用于大规模真实感流体的实时模拟领域。

基于 shallow water 方程的欧拉方法通过结合 SPH 粒子系统的可以表现逼真的流体细节,但灵活度不够。一种可行的方法是,采用层次细节技术的思想,在流体表面用 3 维欧拉立方体,而在较深的流体采用 2 维的流体柱表示,但 2 维欧拉网格与 3 维欧拉立方体的相互转换过程有待进一步研究。

参考文献 (References)

- [1] Wu X L, Wu E H, Zhang H. A couple scheme for a large-scale fluid simulation[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2011, 23(6): 1028-1033. [武小龙, 吴恩华, 张辉. 大规模场景流体模拟的耦合算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2011, 23(6): 1028-1033.]
- [2] Mastin G A, Watterberg P A, Mareda J F. Fourier synthesis of ocean scenes[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 1987, 7(3): 16-23. [DOI: 10.1109/MCG.1987.276961]
- [3] Thon S, Dischler J M, Haznfarpour D. Ocean waves synthesis using a spectrum-based turbulence function[C]//Proceedings of Computer Graphics International Conference. Geneva, Switzerland; IEEE, 2000: 65-75. [DOI: 10.1109/CGI.2000.852321]
- [4] Stam J. Stable fluids[C]//Proceedings of the 26th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York, USA; ACM, 1999: 121-128. [DOI: 10.1145/311535.311548]
- [5] Müller M, Charypar D, Gross M. Particle-based fluid simulation for interactive applications[C]//2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. New York, USA; ACM, 2003: 154-159. [DOI: 10.2312/SCA03/154-159]
- [6] Wojtan C, Turk G. Fast viscoelastic behavior with thin features[J]. ACM Transactions on Graphics, 2008, 27(3): #47. [DOI: 10.1145/1399504.1360646]
- [7] Shao X, Zhou Z, Magnenat-Thalmann N, Wu W. Stable and fast fluid-solid coupling for incompressible SPH. Computer Graphics Forum, 2015, 34(1): 191-204. [DOI: 10.1111/cgf.12467]
- [8] Thürey N, Müller-Fischer M, Schirm S, et al. Real-time breaking waves for shallow water simulations[C]//Proceedings of the 15th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications. Maui, HI; IEEE, 2007: 39-46. [DOI: 10.1109/PG.2007.33]
- [9] Chentanez N, Müller M. Real-time simulation of large bodies of water with small scale details[C]//2010 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. New York, NY, USA; ACM, 2010: 197-206. [DOI: 10.2312/SCA/SCA10/197-206]
- [10] Pan Z R, Huang J, Tong Y Y, et al. Wake synthesis for shallow water equation[J]. Computer Graphics Forum, 2012, 31(71): 2029-2036. [DOI: 10.1111/j.1467-8659.2012.03195.x]
- [11] Lee H, Han S. Solving the shallow water equations using 2D SPH particles for interactive applications[J]. The Visual Computer, 2010, 26(6-8): 865-872. [DOI: 10.1007/s00371-010-0439-9]
- [12] Solenthaler B, Bucher P, Chentanez N, et al. SPH based shallow water simulation[C]//Proceedings of the 8th Workshop on Virtual Reality Interactions and Physical Simulations. Goslar, Germany; The Eurographics Association, 2011: 39-46. [DOI: 10.2312/PE/vriphys/vriphys11/039-046]