



主办: 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

2016
07
VOL.21

ISSN1006-8961
CN11-3758/TB



人脸图像处理 P865



第21卷第7期（总第243期）

2016年7月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊
中文核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院
主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

主 编 顾行发
编辑出版 《中国图象图形学报》编辑出版委员会
邮政信箱 北京9718信箱
邮 编 100101
电子信箱 jig@radi.ac.cn
电 话 010-64807995
网 址 www.cjig.cn

广告经营许可证 京朝工商广字第0361号
总 发 行 北京报刊发行局
订 购 全国各地邮局
海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司
(邮政信箱：北京399信箱 邮编：100048)
印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian

Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences
Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS
China Society of Image and Graphics
Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

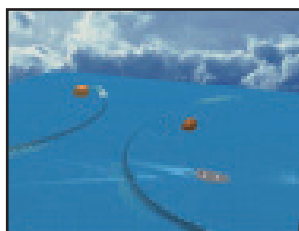
Editor-in-Chief Gu Xingfa
Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of
Image and Graphics
P.O.Box 9718, Beijing, P.R.China
Zip code 100101
E-mail jig@radi.ac.cn
Telephone 010-64807995
Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals
Domestic All Local Post Offices in China
Overseas China International Book Trading Corporation
(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China))
Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

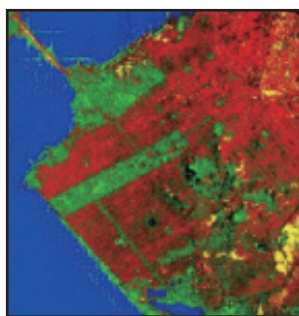
CN 11-3758/TB
ISSN 1006-8961
CODEN ZTTXFZ
国外发行代号 M1406
国内邮发代号 82-831
国内定价 60.00元



大规模柔体的连续碰撞检测
算法(第901页)



大规模流体场景的真实感与
实时模拟(第913页)



星载SAR影像上船舶方位
向模糊去除算法(第951页)

图像处理和编码

低存储化压缩感知

王金铭, 叶时平, 徐振宇, 蒋燕君 835

3D-HEVC深度图像快速帧内编码方法

张洪彬, 伏长虹, 陈锐霖, 萧允治, 苏卫民 845

加权KNN的图文数据融合分类

康丽萍, 孙显, 许光奎 854

结合肤色分割与平滑的人脸图像快速美化

邱佳梁, 戴声奎 865

图像分析和识别

级联型P-RBM神经网络的人脸检测

叶学义, 陈雪婷, 陈华华, 顾亚风, 吕秋云 875

结合全局与局部信息活动轮廓的非同质图像分割

郝智慧, 郭满才, 宋杨杨 886

计算机图形学

带参数的多项式势函数与构造基于Metaball的过渡曲线

李军成, 宋来忠, 刘成志 893

大规模柔体的连续碰撞检测算法

周清玲, 刘艳, 程天翔 901

虚拟现实与增强现实

大规模流体场景的真实感与实时模拟

邵绪强, 杨晓丹, 李继荣, 阎蕾 913

医学图像处理

形状约束下活动轮廓模型冠脉血管图像多尺度分割

郭笑妍, 梅雪, 李振华, 曹佳松, 周宇 923

遥感图像处理

深度置信网络在极化SAR图像分类中的应用

邓磊, 付姗姗, 张儒侠 933

高光谱图像低秩表达与噪声水平估计

唐中奇, 付光远, 赵晓林, 陈进, 张利 942

星载SAR影像上船舶方位向模糊去除算法

邴磊, 邢前国, 邹娜娜, 李圳波, 吴樊 951

TDFA: 一种生成空间影像金字塔的方法

张云舟, 张陌, 王晋年, 张刚 959

无人机侦察视频超分辨率重建方法

张岩, 李建增, 李德良, 杜玉龙 967

CONTENTS

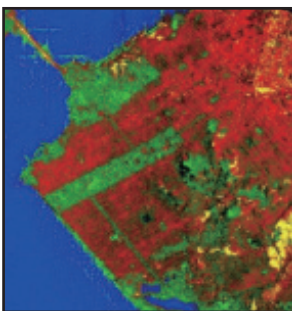
JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Continuous collision detection algorithm for large-scale deformable objects (P901)



Realistic and real-time simulation of large-scale fluids (P913)



Application of deep belief network in polarimetric SAR image classification (P951)

Image Processing and Coding

- Reducing the storage space of the measurement matrix for compressive sensing
Wang jinming, Ye shiping, Xu zhenyu, Jiang yanjun 835
- Fast intra coding for depth map in 3D-HEVC
Zhang Hongbin, Fu Changhong, Chan Yuilam, Siu Wanchi, Su Weimin 845
- Fusion method via KNN with weight adjustment for the classification of image-text co-occurrence data
Kang Liping, Sun Xian, Xu Guangluan 854
- Fast facial beautification algorithm based on skin-color segmentation and smoothness
Qiu Jialiang, Dai Shengkui 865

Image Analysis and Recognition

- Cascaded probability state-restricted Boltzmann machine for face detection
Ye Xueyi, Chen Xueting, Chen Huahua, Gu Yafeng, Lyu Qiuyun 875
- Inhomogeneous image segmentation based on active contours with global and local information
Hao Zhihui, Guo Mancai, Song Yangyang 886

Computer Graphics

- The polynomial potential function with a parameter and transition curve based on Metaball technology
Li Juncheng, Song Laizhong, Liu Chengzhi 893
- Continuous collision detection algorithm for large-scale deformable objects
Zhou Qingling, Liu Yan, Cheng Tianxiang 901

Virtual Reality and Augmented Reality

- Realistic and real-time simulation of large-scale fluids
Shao Xuqiang, Yang Xiaodan, Li Jirong, Yan Lei 913

Medical Image Processing

- Multi-scale segmentation of coronary artery image based on active contour model with shape constraints
Guo Xiaoyan, Mei Xue, Li Zhenhua, Cao Jiasong, Zhou Yu 923

Remote Sensing Image Processing

- Application of deep belief network in polarimetric SAR image classification
Deng Lei, Fu Shanshan, Zhang Ruxia 933
- Low-rank representation for hyperspectral image noise level estimation
Tang Zhongqi, Fu Guangyuan, Zhao XiaoLin, Chen Jin, Zhang Li 942
- Azimuth ambiguity removal method for ship detection based on spaceborne SAR images
Bing Lei, Xing Qianguo, Zou Nana, Li Zhenbo, Wu Fan 951
- TDFA: a generation method of spatial image pyramid
Zhang Yunzhou, Zhang Mo, Wang Jinnian, Zhang Gang 959
- Super-resolution reconstruction for UAV video
Zhang Yan, Li Jianzeng, Li Deliang, Du Yulong 967

中图法分类号: TN911.73 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2016)07-835-10

论文引用格式: Wang J M, Ye S P, Xu Z Y, Jiang Y J. Reducing the storage space of the measurement matrix for compressive sensing[J]. Journal of Image and Graphics, 2016, 21(7): 835-844. [王金铭, 叶时平, 徐振宇, 蒋燕君. 低存储化压缩感知[J]. 中国图象图形学报, 2016, 21(7): 835-844.] [DOI:10.11834/jig.20160701]

低存储化压缩感知

王金铭, 叶时平, 徐振宇, 蒋燕君

浙江树人大学信息科技学院, 杭州 310015

摘要: 目的 非相关观测是压缩感知(CS)理论中的关键因素。高斯随机矩阵作为一种普适的CS非相关观测矩阵,在压缩感知中得到广泛的研究与应用。但在实际应用中,却存在实际内存占用较多,不适应大规模应用的问题。为寻求降低随机观测矩阵所需的存储空间,提出一种基于半张量积的压缩感知方法,利用该方法可以成倍地降低观测矩阵所需的存储空间。**方法** 该方法利用半张量积理论,构建降维随机观测矩阵,实现对原始信号的随机观测,并采用 l^q ($0 < q < 1$)范数的迭代重加权最小二乘法进行重构,从而得到稀疏信号的估计值。**结果** 仿真实验分别采用1维稀疏信号和2维图像信号进行了测试,并从重构概率、迭代收敛速度、重构信号的峰值信噪比等角度进行了测试和比较。通过不同大小的随机观测矩阵比较验证表明,采用降维后观测矩阵进行采样和重构,其重构信号质量并没有明显下降,但其观测矩阵所需的存储空间却可大大降低,如降低为通常的1/4, 1/16, 甚至更低。**结论** 本文压缩感知方法,可以大大降低观测矩阵所需的存储空间,同时有效降低数据运算复杂度以及内存占用率,有助于压缩感知的应用。

关键词: 压缩感知; 随机观测矩阵; 存储空间; 半张量积; 迭代重加权; 最小化

Reducing the storage space of the measurement matrix for compressive sensing

Wang Jinming, Ye Shiping, Xu Zhenyu, Jiang Yanjun

Collage of Information Science & Technology, Zhejiang Shuren University, Hangzhou 310015, China

Abstract: Objective A random measurement matrix plays a critical role for the successful use of compressive sensing (CS) theory and has been widely applied in CS. However, a random measurement matrix requires a large storage space, which is unsuitable for large-scale applications. To reduce the storage space for a random measurement matrix, a method for CS signal reconstruction was proposed based on theory of semi-tensor product. **Method** We constructed a random measurement matrix, with a dimension smaller than M and N , where M is the length of the sampling vector and N is the length of the signal that we intend to reconstruct. Then, we used the iteratively reweighted least square reconstruction algorithm to obtain the estimated values of sparse coefficients. **Result** Experiments were conducted using column sparse signals and images with various sizes. During the experiments, the probability of exact reconstruction, error, and peak signal-to-noise ratio

收稿日期: 2016-02-22; 修回日期: 2016-04-12

基金项目: 浙江省自然科学基金项目(LY14E070001); 浙江省公益技术应用研究计划项目(2015C33074); 浙江省科技计划项目(2014C33058); 浙江省高等学校访问学者专业发展项目(FX2014090)

第一作者简介: 王金铭(1978—), 男, 副教授, 2005年于浙江大学获电子科学技术专业硕士学位, 主要研究方向是非线性信息处理, 图像处理。E-mail: wjm7878@163.com

Supported by: Natural Sciences Fundational Zhejiang Province, China(LY14E070001)

(PSNR), of the proposed method were compared with measurement matrices with different dimensions. The proposed algorithm outperformed a smaller storage space with a suitable PSNR performance. **Conclusion** In this study, we proposed a new method to reduce the storage space of the measurement matrix for CS. The experimental results showed that if we appropriately reduced the dimension of the measurement matrix, then nearly no decline in the PSNR of the reconstruction was observed, but the storage space of the measurement matrix could be reduced by at least 1/4 or 1/16 times. All the results verified the validity of the proposed approach and demonstrated the significant potential for hardware implementation of the proposed sensing framework.

Key words: compressive sensing; random measurement matrix; storage space; semi-tensor product; iteratively re-weighted; minimization

0 引言

压缩感知理论(CS)是近年提出的一种可将模拟信号以较低采样频率转化为数字形式压缩信号的有效途径。压缩感知理论指出,若采样信号在某个变换域是稀疏的或者本身就是较稀疏的,则可用一个不相干的观测矩阵,直接采集少量的观测数据,通过解一个优化问题便可从少量的采集数据中以较高的概率重构出原始信号。CS理论从另一个角度开辟了一种新型的高速采样理论,它的出现改变了传统先高速采样后低码率压缩的信息采集模式,可显著降低数据存储和传输的代价,以及信号处理时间和计算成本。

从压缩感知理论可知,要成功实现信号的低速采样及重构,必须满足:1) 信号是稀疏的或者可稀疏的;2) 观测矩阵必须满足有限等距性质(RIP),即与稀疏化表示矩阵之间的不相干性。从目前的研究结果来看,利用 Fourier 变换、离散余弦变换(DCT)变换、小波变换等较好地实现了信号的稀疏化表示。此外,利用正交基级联字典、字典学习等方法同样能够较为有效地实现复杂信号的稀疏化表示。而由于观测矩阵必须满足 RIP 条件, Candes 曾在文献[1-2]中指出:在独立同分布的高斯随机变量形成的观测矩阵与任意稀疏化表示矩阵存在较强的不相干性,压缩观测信号可较高概率进行精确恢复。由于随机矩阵具备优良的不相干特性,目前的压缩感知研究过程中均被作为观测矩阵而得到广泛使用。作为一种普适的观测矩阵,随机矩阵在实际使用过程中,其计算复杂度较高,特别是针对高维数据采集时,存在占用内存较多,无法适用于大规模应用等问题^[3]。

面对这一问题,文献[4]提出了一种结构化随机矩阵,这种矩阵所需的存储量小,但构造结构化随机矩阵过程涉及到随机排序、快速正交变换、随机下采样等操作,存在不易实现等问题。文献[5-7]分别提出了一种基于分块压缩感知(block CS)的图像重构模型,这种分块压缩感知提供了一种可以有效降低观测矩阵所需存储空间大的问题,但对于稀疏度不均匀的原始图像,需要改变块的大小和测量率,这在某种程度上引入了一定的复杂度。同样为了降低观测矩阵的存储空间占用量,文献[8]提出了一种将观测矩阵数值进行二值化处理的方法,即将原先采用浮点数表示的观测矩阵元素采用二值化进行表示,大大降低了观测矩阵所需的存储空间。

同样为了尝试降低观测矩阵所需存储空间,本文提出一种使用半张量积(STP)的压缩感知方法。利用该方法,成倍降低观测矩阵维数,可有效降低观测矩阵所需的存储空间。

为验证基于半张量积压缩感知模型的有效性,结合 l^q ($0 < q < 1$) 范数的迭代重加权最小二乘解的方法,讨论了观测矩阵进行降维后的 l^q ($0 < q < 1$) 范数迭代重加权最小二乘重构方法,并对算法的收敛性进行了讨论。最后针对 1 维稀疏信号和 2 维图像信号进行了关于重构概率、重构信号的峰值信噪比等指标的测试和比较。实验结果表明,采用本文所述方法,能够利用降维观测矩阵实现对信号的重构,且重构信号的峰值信噪比并没有明显下降,但观测矩阵所占的存储空间却可以成倍地降低。

1 半张量积理论

半张量积是一种新型的矩阵乘法^[9]。对于传统矩阵乘法,当 A 的列数($C(A)$)与 B 的行数

$(R(\mathbf{B}))$ 相等, 则矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 可乘, 而矩阵半张量积是将传统矩阵乘法推广到阶数不等情形, 即 $C(\mathbf{A}) \neq R(\mathbf{B})$, 从而半张量积运算可以实现前边矩阵的列数和后边矩阵的行数不等时的矩阵乘法运算。更为重要的是, 半张量积保持了传统矩阵乘法的全部主要性质, 所以说它是一种有力的数学工具, 对于实现不同阶的高维矩阵数字信号处理提供了一个非常好的途径。

定义1 设 $\mathbf{T}$ 是一个 np 维行向量, $\mathbf{X}$ 是一个 p 维列向量。将 $\mathbf{T}$ 分割成 p 个等长的块 $\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2, \dots, \mathbf{T}^p$, 它们都是 n 维行向量, 则定义左半张量积为

$$\mathbf{T} \ltimes \mathbf{X} = \sum_{i=1}^p \mathbf{T}^i x_i \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

式中, 符号 $\ltimes$ 表示向量的左半张量积。

定义2 设 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s]$ 是一个行向量, $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t]^T$ 是一个列向量, 根据两个向量的维度, 分别有以下两种情形:

1) 如果 t 是 s 的因子, 即 $s = t \times n$, 则 n 维行向量

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_L := \sum_{k=1}^t \mathbf{X}^k y_k \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

称为 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 的左半张量内积, 式中 $\mathbf{X} = [\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^t]$, $\mathbf{X}^i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, t$ 。

2) 如果 s 是 t 的因子, 即 $t = s \times n$, 则 n 维列向量

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_L := (\langle \mathbf{Y}^T, \mathbf{X}^T \rangle_L)^T \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

也称为 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 的左半张量内积。

定义3 设 $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ 。如果 n 是 p 的因子或者 p 是 n 的因子, 则有

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \ltimes \mathbf{N} \quad (4)$$

称 $\mathbf{C}$ 是 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 的左半张量积。式中 $\mathbf{C} = (\mathbf{C}^{ij}) = R_i(\mathbf{M}) \ltimes C_j(\mathbf{N}), i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, q$ 。

1) 对于定义3所示的 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$, 若 $n = p$, 则有 $\mathbf{M} \ltimes \mathbf{N} = \mathbf{MN}$, 即半张量积退化称为普通矩阵积。

2) 两个矩阵的左半张量积的维数可以很容易地根据前一个矩阵列数和后一个矩阵行数的公因子消去来计算得到, 如

$$\mathbf{F}_{p \times qr} \ltimes \mathbf{G}_{r \times s} \ltimes \mathbf{H}_{qst \times l} = (\mathbf{F} \ltimes \mathbf{G})_{p \times qs} \ltimes \mathbf{H}_{qst \times l} = (\mathbf{F} \ltimes \mathbf{G} \ltimes \mathbf{H})_{pt \times l} \quad (5)$$

性质1 只要 $\ltimes$ 有定义, 即矩阵有合适的维数, 则 $\ltimes$ 满足:

1) 分配律

$$\begin{cases} \mathbf{F} \ltimes (\mathbf{aG} \pm \mathbf{bH}) = \mathbf{aF} \ltimes \mathbf{G} \pm \mathbf{bF} \ltimes \mathbf{H} \\ (\mathbf{aF} \pm \mathbf{bG}) \ltimes \mathbf{H} = \mathbf{aF} \ltimes \mathbf{H} \pm \mathbf{bG} \ltimes \mathbf{H} \end{cases} \quad (6)$$

式中 $a, b \in \mathbb{R}$ 。

2) 结合律

$$(\mathbf{F} \ltimes \mathbf{G}) \ltimes \mathbf{H} = \mathbf{F} \ltimes (\mathbf{G} \ltimes \mathbf{H}) \quad (7)$$

性质2

1) 若 $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 均可逆, 则

$$(\mathbf{F} \ltimes \mathbf{G})^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \ltimes \mathbf{G}^{-1} \quad (8)$$

2) $(\mathbf{F} \ltimes \mathbf{G})^T = \mathbf{F}^T \ltimes \mathbf{G}^T \quad (9)$

2 压缩感知模型

现有的压缩感知模型可以简单描述如下: 设信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 在某个正交基矩阵 $\Psi_{N \times N}$ 下能够进行稀疏化表示, 即

$$\mathbf{x}_{N \times 1} = \Psi_{N \times N} \boldsymbol{\theta}_{N \times 1} \quad (10)$$

式中, 正交基矩阵满足 $\Psi \Psi^T = \Psi^T \Psi = \mathbf{I}$, 信号经稀疏化表示后的系数 $\theta_i = \langle \mathbf{x}, \Psi_i \rangle = \Psi_i^T \mathbf{x}$ 。

若系数向量 $\boldsymbol{\theta}_{N \times 1}$ 中仅有 K 个非零分量, 且 $K \leq N$, 则称信号 $\mathbf{x}$ 或系数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 是 K -稀疏的。若存在一个与稀疏化表示矩阵 $\Psi_{N \times N}$ 不相干的矩阵 $\Phi_{M \times N}$ (其中 $M \ll N$) 作为压缩感知的观测矩阵, 则压缩感知模型可简单表示为

$$\mathbf{y}_{M \times 1} = \Phi_{M \times N} \Psi_{N \times N} \boldsymbol{\theta}_{N \times 1} \quad (11)$$

如式(11)所示, 对信号进行一次压缩观测, 可以得到 M 个线性观测值 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$, 利用这些少量信号和系数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 是 K -稀疏的约束条件, 通过凸优化或线性规划的方法可重构信号 $\mathbf{x}$ 。

在这个模型的基础上, 观测矩阵参与了 CS 处理方法中压缩观测与信号恢复这两个重要的数据处理过程, 且对整个方法的性能有着很大的影响, 因而观测矩阵的设计是压缩感知的一个核心问题。从式(11)可知, 观测矩阵的大小 $M \times N$ 仍与原始数据的维数 N 相关, 因此当面对高维数据时, 即 N 特别大, 观测矩阵 Φ 所占的存储空间较大, 信号恢复过程的计算量为维持在较高的水平。

3 半张量积压缩感知模型

本着为降低压缩感知过程中观测矩阵所占的存储空间以及降低计算量的角度, 提出一种应用半张量积的压缩感知模型, 使其有效降低观测矩阵在压缩感知以及重构过程中所占的存储空间容量。半张量积压缩感知模型定义为

$$\mathbf{y}_{M \times 1} = \Phi_{(M/t) \times (N/t)} \bowtie \Psi_{N \times N} \bowtie \theta_{N \times 1} \quad (12)$$

式中, $\Phi_{(M/t) \times (N/t)}$ 是降维后的随机观测矩阵, 其维数为 $(M/t) \times (N/t) \in \mathbb{Z}^+$, $t \in \mathbb{Z}^+$ 且 $t < M$ 。此外, 从式(12)所示的压缩感知模型可知, 在相同数据类型的情形下, 其观测矩阵 Φ 占用的存储空间是式(11)所示观测矩阵所占存储空间的 $1/t^2$ 倍。

经过上述简单定义后, 利用式(5)(7), 可以验证式(12)是满足式(11)所示的压缩感知模型的, 同样用 M 个观测值可以对 N 维信号进行表示, 即

$$\begin{aligned} \Phi_{(M/t) \times (N/t)} \bowtie (\Psi_{N \times N} \bowtie \theta_{N \times 1}) &= \Phi_{(M/t) \times (N/t)} \bowtie \\ (\Psi \bowtie \theta)_{N \times 1} &= (\Phi \bowtie \Psi \bowtie \theta)_{M \times 1} = \mathbf{y}_{M \times 1} \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} (\Phi_{(M/t) \times (N/t)} \bowtie \Psi_{N \times N}) \bowtie \theta_{N \times 1} &= (\Phi \bowtie \Psi)_{M \times N} \bowtie \theta_{N \times 1} = \\ (\Phi \bowtie \Psi \bowtie \theta)_{M \times 1} &= \mathbf{y}_{M \times 1} \end{aligned}$$

至此, 本文所述问题的关键在于, 如何采用式(12)所示的压缩感知模型来对 N 维信号进行恢复或重构。

若 $\mathbf{x}_{N \times 1}$ 本身是 K -稀疏的, 则式(12)所示模型可用矩阵乘积形式表示为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \cdots & \phi_{1,N/t} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \cdots & \phi_{2,N/t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{M/t,1} & \phi_{M/t,2} & \cdots & \phi_{M/t,N/t} \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad (13)$$

式中, $\phi_{i,j} \in \Phi_{(M/t) \times (N/t)}$, $i = 1, 2, \dots, M/t$, $j = 1, 2, \dots, N/t$, 利用式(1)–(4)所示的半张量积定义, 式(13)表示为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^{1,1} + \cdots + \xi^{1,j} + \cdots + \xi^{1,N/t} \\ \vdots \\ \xi^{i,1} + \cdots + \xi^{i,j} + \cdots + \xi^{i,N/t} \\ \vdots \\ \xi^{M/t,1} + \cdots + \xi^{M/t,j} + \cdots + \xi^{M/t,N/t} \end{pmatrix} \quad (14)$$

式中, $\xi^{i,j} = \phi_{i,j} [x_{(j-1)t+1} \cdots x_{jt}]^T$, $i = 1, 2, \dots, M/t$, $j = 1, 2, \dots, N/t$, 且 $\xi^{i,j}$ 表示了一个 t 维的列向量。任意行元素 $\xi^{i,1} + \cdots + \xi^{i,j} + \cdots + \xi^{i,N/t}$ 的和也是一个 t 维的列向量。当观测矩阵维数为 $M \times N$ 时, 即 $t = 1$, 则式(14)可表示成 $\mathbf{y}_{M \times 1} = \Phi_{M \times N} \cdot \mathbf{x}_{N \times 1}$, 即满足式(11)所示压缩感知模型。

综上所述, 本文所提的基于半张量积的压缩感知模型是适用于式(10)所示的压缩感知模型的。为

此, 借鉴目前已得到广泛研究的基于 l^q ($0 < q < 1$) 范数的迭代重加权最小二乘法^[10-11] (IRLS) 来讨论上述基于半张量积的压缩感知模型的重构方法。

4 半张量积压缩感知模型重构算法

相关研究已表明, 基于 l^q ($0 < q < 1$) 范数最小化求解, 在无噪声的情况下, 相比 l^1 范数最小化求解, 有更强的稀疏信号恢复能力, 且 l^q 范数最小化问题在有噪声干扰的情况下也是稳定的^[12], 在这些理论的基础上, 本文将探讨基于半张量积的 l^q ($0 < q < 1$) 范数的迭代重加权最小二乘解的方法。

令观测矩阵 $\Phi_{(M/t) \times (N/t)}$ 是行满秩矩阵, 即 $\text{rank}(\Phi_{(M/t) \times (N/t)}) = M/t$, $\|\mathbf{x}\|_0$ 表示 $\mathbf{x}$ 的 l^0 范数, 即表示 $\mathbf{x}$ 中非零元素的个数。则引入 $\Phi_{(M/t) \times (N/t)}$ 的所有 K -个分量的值域可表示为

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_K &= \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^M \mid \mathbf{y} = \Phi_{(M/t) \times (N/t)} \bowtie \mathbf{x}_{N \times 1}, \\ &\quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \|\mathbf{x}\|_0 \leq K \} \end{aligned} \quad (15)$$

同样, 因为 $M < N$, 所以对于任意的 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$, 方程 $\Phi_{M/t \times N/t} \bowtie \mathbf{x}_{N \times 1} = \mathbf{y}_{M \times 1}$ 同样存在无穷多个解, 且令式(15)所有解的集合为 $f(\mathbf{y}) = \Phi^{-1}(\mathbf{y})$ 。

若给定 $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}_K$, $K < M/t$, 考虑 l^q ($0 < q < 1$) 范数的最小化问题

$$\min \{ \|\mathbf{x}\|_q \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \Phi \bowtie \mathbf{x} = \mathbf{y} \} \quad (16)$$

式中, $\|\mathbf{x}\|_q = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$, $\Phi \in \mathbb{R}^{(M/t) \times (N/t)}$ 。

在 l^q ($0 < q < 1$) 范数最小化的前提下, 考虑式(16)的近似

$$\min \left\{ \frac{1}{q} \sum_{i=1}^N (x_i^2 + \varepsilon^{1+q})^{\frac{q}{2}} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \Phi \bowtie \mathbf{x} = \mathbf{y} \right\} \quad (17)$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 式(17)所示的最小化问题即为式(16)的解, 即

$$\mathbf{x} = \min \left\{ \frac{1}{q} \sum_{i=1}^N (x_i^2 + \varepsilon^{1+q})^{\frac{q}{2}} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \Phi \bowtie \mathbf{x} = \mathbf{y} \right\} \quad (18)$$

对式(18), 引入 Lagrange 乘子 $\lambda \in \mathbb{R}^M$ 和 Lagrange 函数, 有

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \lambda) &= \frac{1}{q} \sum_{i=1}^N (x_i^2 + \varepsilon^{1+q})^{\frac{q}{2}} + \\ &\quad \lambda^T (\Phi \bowtie \mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (19)$$

则式(18)的解满足

$$\begin{cases} \frac{\partial F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = \frac{x_i}{(x_i^2 + \varepsilon^{1+q})^{(2-q)/q}} + (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\lambda})_i = 0 \\ \frac{\partial F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j} = (\boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{x} - \mathbf{y})_j = 0 \end{cases} \quad (20)$$

式中, $i=1, 2, \dots, N$; $j=1, 2, \dots, M$ 。对于式(20)采用迭代法进行求解, 即

$$\begin{cases} \frac{x_i^{(n+1)}}{((x_i^{(n)})^2 + \varepsilon_n^{1+q})^{(2-q)/q}} + (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\lambda}^{(n+1)})_i = 0 \\ \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{y} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

式中, $i=1, 2, \dots, N$ 。且在迭代过程中, 对于上述 l^q ($0 < q < 1$) 范数的最小化问题, 定义函数

$$T_q(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \varepsilon) = \frac{q}{2} \left[\sum_{i=1}^N x_i^2 w_i + \sum_{i=1}^N \left(\varepsilon^2 w_i + \frac{2-q}{q} w_i^{\frac{q}{q-2}} \right) \right] \quad (22)$$

式中, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^N$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, 且迭代权重 $\mathbf{w}$ 定义为

$$w_i^{(n)} = \frac{((x_i^{(n)})^2 + \varepsilon_n^{1+q})^{(2-q)/q}}{((x_i^{(n)})^2 + \varepsilon_n^{1+q})^{(2-q)/q}} \quad (23)$$

迭代开始时, 令 $\mathbf{w}^{(0)} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon_0 = 1$, 则 $\mathbf{x}^{(n+1)}$ 有

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \arg \min_{\mathbf{x} \in f(\mathbf{y})} T_q(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{w}^{(n)}, \varepsilon_n) \quad (24)$$

且迭代过程中, ε_n 的更新采用

$$\varepsilon_{n+1} = \min \left(\varepsilon_n, \frac{r(\mathbf{x}^{(n+1)})_{K+1}}{N} \right) \quad (25)$$

式中, K 表示信号的稀疏度, $r(\mathbf{x})$ 表示将向量 $\mathbf{x}$ 中的每个分量取绝对值, 并进行单调递减排序后得到的向量, 即 $r(\mathbf{x})_1 \geq r(\mathbf{x})_2 \geq \dots \geq r(\mathbf{x})_N \geq 0$ 。 $r(\mathbf{x}^{(n+1)})_{K+1}$ 表示 $\mathbf{x}^{(n+1)}$ 经单调排序后的第 $K+1$ 个分量。迭代过程中, 当 $\varepsilon_n = 0$ 时, 终止迭代, 并得到相应的稀疏解。

为了得到更明确的表达形式, 定义 $\mathbf{D}_n$ 为 $N \times N$ 的对角矩阵, 其矩阵中第 i 个对角分量表示为

$$D_{i,i} = \frac{1}{w_i^{(n)}}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

则上述线性系统的解可表示为

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{D}_n \times \boldsymbol{\Phi}^T \times (\boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{D}_n \times \boldsymbol{\Phi}^T)^{-1} \times \mathbf{y} \quad (26)$$

式中, $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{(M/t) \times (N/t)}$, $\mathbf{D}_n \in \mathbb{R}_+^{N \times N}$ 。

从而本文所涉及的半张量积 l^q ($0 < q < 1$) 范数的迭代重加权最小二乘解的算法如下:

1) 初始化

$$\mathbf{w}^{(0)} = (1, \dots, 1), \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \mathbf{x}^{(0)} = (1, \dots, 1);$$

2) 根据 $\mathbf{w}^{(n)}$ 得到 $N \times N$ 对角矩阵 $\mathbf{D}_n$;

3) 根据式(26)计算并更新 $\mathbf{x}^{(n+1)}$;

4) 根据式(25)计算并更新 ε_n 值;

5) 根据式(23)计算并更新 $\mathbf{w}^{(n)}$ 值;

6) 更新迭代次数, 并判断 ε_n 是否满足条件, 若不满足, 返回第2)步, 继续迭代计算; 若满足则退出迭代, 并输出稀疏解 $\mathbf{x}^{(n+1)}$ 。

上述算法中, 对于第 n 次迭代 ($n \geq 0$), $T_q(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{w}^{(n)}, \varepsilon_n)$ 表示为

$$T_q(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{w}^{(n)}, \varepsilon_n) = \frac{q}{2} \left[\sum_{i=1}^N (x_i^{(n)})^2 w_i^{(n)} + \sum_{i=1}^N \left(\varepsilon_n^2 w_i^{(n)} + \frac{2-q}{q} (w_i^{(n)})^{\frac{q}{q-2}} \right) \right] \quad (27)$$

式中, $w_i^{(n)} > 0$, $(x_i^{(n)})^2 \geq 0$, $\varepsilon_n > 0$ 。由式(23)—(25)所示的更新方式, 则对于函数 $T_q(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{w}^{(n)}, \varepsilon_n)$ 具有单调性质

$$\begin{aligned} T_q(\mathbf{x}^{(n+1)}, \mathbf{w}^{(n+1)}, \varepsilon_{n+1}) &\leq \\ T_q(\mathbf{x}^{(n+1)}, \mathbf{w}^{(n)}, \varepsilon_{n+1}) &\leq \\ T_q(\mathbf{x}^{(n+1)}, \mathbf{w}^{(n)}, \varepsilon_n) &\leq \\ T_q(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{w}^{(n)}, \varepsilon_n) \end{aligned}$$

则对任意的 $n \geq 1$, 可以得到

$$\|\mathbf{x}^{(n)}\|_q \leq T_q(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{w}^{(0)}, \varepsilon_0) = A \quad (28)$$

且

$$w_i^{(n)} \geq A^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

式中, A 是正的常数。

此外, 对于 $n \geq 1$, 同样可以得到

$$\begin{aligned} T_q(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{w}^{(n)}, \varepsilon_n) - T_q(\mathbf{x}^{(n+1)}, \mathbf{w}^{(n+1)}, \varepsilon_{n+1}) &\geq \\ T_q(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{w}^{(n)}, \varepsilon_n) - T_q(\mathbf{x}^{(n+1)}, \mathbf{w}^{(n)}, \varepsilon_n) &= \\ \frac{q}{2} \left[\sum_{i=1}^N (x_i^{(n)})^2 w_i^{(n)} \right] - \frac{q}{2} \left[\sum_{i=1}^N (x_i^{(n+1)})^2 w_i^{(n)} \right] &= \\ \frac{q}{2} \sum_{i=1}^N \{ [(x_i^{(n)})^2 - (x_i^{(n+1)})^2] w_i^{(n)} \} &\geq \end{aligned}$$

$$\frac{q}{2} A^{-1} \sum_{i=1}^N [(x_i^{(n)})^2 - (x_i^{(n+1)})^2]$$

由式(28), 便可得到

$$\sum_{i=1}^N [(x_i^{(n)})^2 - (x_i^{(n+1)})^2] \leq \frac{2A^2}{q}$$

式中, $0 < q < 1$, 从而可以得到迭代序列是收敛的, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n+1)}) = 0$$

5 实验结果与分析

为验证上述基于半张量积压缩感知算法的迭代收敛速度及精确恢复稀疏解的能力,分别设计了两组实验进行验证。第1组选择1维稀疏信号进行重构,并从1维信号在不同稀疏度情况下的恢复概率,恢复信号的信噪比以及相同稀疏度情形下,重构信号的收敛速度等角度进行比较。第2组实验选择了2维图像信号进行重构,并从重构信号峰值信噪比的角度对重构性能与观测矩阵的降维比例进行比较。实验平台配备了 Intel i7-4600 CPU, 2.1 GHz 主频, 8 GB 内存, 64 位 Windows 8 操作系统, 仿真软件采用 Matlab R2010b。

5.1 1 维稀疏信号重构性能比较

实验时,构建1维稀疏信号

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \text{zeros}(N, 1) \\ p &= \text{randperm}(N) \\ \mathbf{x}(p(1:K)) &= \text{randn}(K, 1) \end{aligned}$$

式中, $K = 1, 2, \dots, M/2$, M 为信号的观测次数, $N = 256$, 则 $\mathbf{x}$ 便是表示一个长度为 256, 稀疏度为 K , 且非零位置为随机的 1 维稀疏信号。此处设定 K 的最大值为 $M/2$, 原因是文献[13]中已指出, 一个向量要保证稀疏恢复的唯一性, 其非零元素的个数最多不超过一个极限值 $M/2$ 。

为验证对上述 1 维稀疏信号重构性能, 设定测量次数 M 为 128。仿真次数为 500 次。实验时构建了满足 $N(0, \frac{1}{(M/t)})$ 高斯独立分布的 $(M/t) \times (N/t)$ 维高斯随机观测矩阵 $\Phi_{(M/t) \times (N/t)}$, 如表 1 所示。

表 1 半张量积压缩感知模型的观测矩阵, $N = 256$

Table 1 Comparison of different dimensional measurement matrices with $N = 256$

M	$t=1$	$t=2$	$t=4$
128	$\Phi_{128 \times 256}$	$\Phi_{64 \times 128}$	$\Phi_{32 \times 64}$

由表 1 可知, 当 $t=1$ 时, 其观测矩阵维数满足式(11)所示的压缩感知模型, 并没有实现降低观测矩阵所占存储空间的目的, 但当 $t=2$ 和 4 时, 其观测矩阵大小分别是 $t=1$ 时所对应观测矩阵的 $1/4$ 和 $1/16$ 。若随机观测矩阵中每一元素采用单精度浮点数进行表示, 即每个元素用 4 个字节表示, 则

对于表 1 中 $t=1$ 所对应的观测矩阵需要 128 KB 字节的存储空间, 而 $t=2$ 或 4 时, 对应观测矩阵仅需 32 KB 或 8 KB 字节, 从而大大降低了观测矩阵所需的存储空间以及重构过程中的内存占用率。

文献[11]中证明了基于 l^q ($0 < q < 1$) 范数的迭代重加权最小二乘解在 q 值较大时, 其恢复稀疏解的能力相对较强, 因此, 后续实验中均选择 $q = 0.8$ 来验证半张量积压缩感知重构方法对稀疏解的恢复情况。

图 1 表示了观测次数 $M = 128$ 时, 不同稀疏度的原始信号 $\mathbf{x}$ 在不同观测矩阵的情况下其正确恢复的概率。实验中, 对每个稀疏度 K ($K = 1, 2, \dots, M/2$), 都随机生成了 500 次的稀疏向量 $\mathbf{x}$, 并计算其恢复的成功率。实验时, 选取算法的终止条件是 $\varepsilon_n < 10^{-8}$, 即在每次重构过程中, 设 $\varepsilon_0 = 1$, 若经过若干次迭代后, 有 $\varepsilon_n < 10^{-8}$, 则退出重构。重构结束后, 计算重构信号 $\hat{\mathbf{x}}$ 与原始信号 $\mathbf{x}$ 的相对误差 E , 若相对误差 $E < 10^{-5}$, 则认为重构是成功的, 反之则认为本次重构是错误的。1 维信号的相对误差 E 以及重构概率为

$$E = \frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \quad (29)$$

$$pr = \frac{T_{\text{correct}}}{T_{\text{total}}} \quad (30)$$

式中, T_{correct} 表示正确重构的次数, T_{total} 表示重构的总次数, $\mathbf{x}$ 表示原始信号, $\hat{\mathbf{x}}$ 表示重构信号。

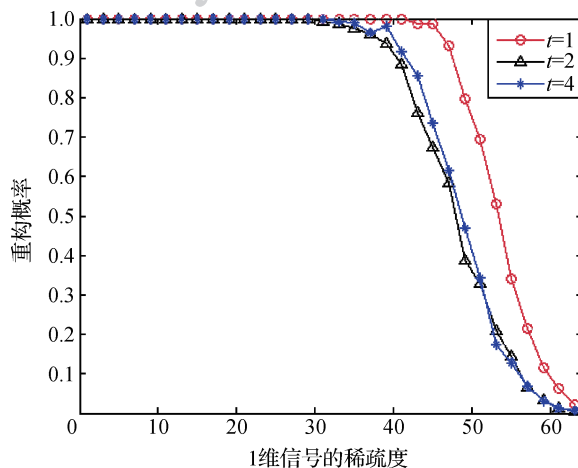


图 1 不同维数观测矩阵重构概率比较

($M = 128$, $N = 256$, $q = 0.8$)

Fig. 1 Comparison of probability of exact reconstruction with different dimensions of measurement matrices

($M = 128$, $N = 256$, $q = 0.8$)

图1中, $t=1$ 表示采用的观测矩阵为 $\Phi_{128 \times 256}$, $t=2$ 和 $t=4$ 分别表示观测矩阵为 $\Phi_{64 \times 128}$ 和 $\Phi_{32 \times 64}$ 。从图1可知, 当观测矩阵维数降低后, 即 $t=2$ 和 $t=4$ 时, 且当 K 值较大时, 对稀疏信号的重构概率相比 $t=1$ 时有一定的下降, 但其整体上保持了较高的重构概率。此外从图1中可知, 对观测矩阵进行降维后, 采用上述基于半张量积压缩感知模型对信号进行观测, 是可以实现对原始信号的精确重构。至于图1中重构概率的降低, 其主要原因在于, 随着观测矩阵维数的降低, 对于每一个观测值 y_i , 仅用了 N/t 个系数及未知量 $\mathbf{x}$ 进行表示, 且在相邻的 t 个观测值中 (对于 t 个相邻观测值, 定义 $y_1, \dots, y_t$ 表示为第1组相邻的 t 个观测值, $y_{(i-1) \times t+1}, \dots, y_{i \times t}$ 表示为第 i 组的 t 个相邻观测值, 则对于 M 个观测值 $\mathbf{y}$, 可分为 M/t 组), 所表示的系数都是相同的, 即

$$\begin{pmatrix} y_{(i-1) \times t+1} \\ y_{(i-1) \times t+2} \\ \vdots \\ y_{i \times t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{i,1}x_1 + \dots + \phi_{i,j}x_{(j-1) \times t+1} + \dots + \phi_{i,N/t}x_{(N/t-1) \times t+1} \\ \phi_{i,1}x_2 + \dots + \phi_{i,j}x_{(j-1) \times t+2} + \dots + \phi_{i,N/t}x_{(N/t-1) \times t+2} \\ \vdots \\ \phi_{i,1}x_t + \dots + \phi_{i,j}x_{(j-1) \times t+t} + \dots + \phi_{i,N/t}x_{(N/t-1) \times t+t} \end{pmatrix} \quad (31)$$

式中, $y_{(i-1) \times t+1}, \dots, y_{i \times t}$ 表示相邻的 t 个观测值, 每一个观测值表示未知量 $\mathbf{x}$ 的系数都是 $(\phi_{i,1}, \dots, \phi_{i,N/t})$ 。若 $N=10$, $M=6$, $t=2$ 时, 构建的随机观测矩阵为 $\Phi_{3 \times 5}$, 便有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{1,1}x_1 + \phi_{1,2}x_3 + \phi_{1,3}x_5 + \phi_{1,4}x_7 + \phi_{1,5}x_9 \\ \phi_{1,1}x_2 + \phi_{1,2}x_4 + \phi_{1,3}x_6 + \phi_{1,4}x_8 + \phi_{1,5}x_{10} \\ \phi_{2,1}x_1 + \phi_{2,2}x_3 + \phi_{2,3}x_5 + \phi_{2,4}x_7 + \phi_{2,5}x_9 \\ \phi_{2,1}x_2 + \phi_{2,2}x_4 + \phi_{2,3}x_6 + \phi_{2,4}x_8 + \phi_{2,5}x_{10} \\ \phi_{3,1}x_1 + \phi_{3,2}x_3 + \phi_{3,3}x_5 + \phi_{3,4}x_7 + \phi_{3,5}x_9 \\ \phi_{3,1}x_2 + \phi_{3,2}x_4 + \phi_{3,3}x_6 + \phi_{3,4}x_8 + \phi_{3,5}x_{10} \end{pmatrix}$$

式中, 相邻两个观测值分别为 $[y_1, y_2]^T$ 、 $[y_3, y_4]^T$ 及 $[y_5, y_6]^T$ 。从上式中可以明显看到, 相邻两个观测值在表示原始信号 $\mathbf{x}$ 时所采用的系数是一样的, 在用最小二乘法进行迭代时, 当原始信号 $\mathbf{x}$ 的稀疏度 K 较大时, 需要相对较多的迭代次数才能收敛, 即存在收敛速度相对较慢的问题, 从而造成了图1中所示的重构概率的下降。但当原始信号 $\mathbf{x}$ 的稀疏度

K 较小时, 即原始信号 $\mathbf{x}$ 中存在大量的零元素, 观测矩阵维数下降对迭代收敛速度影响不大, 其结果如图2所示。

图2表示了在不同观测次数及稀疏度的情形下, 即 $M=128$, $N=256$, $K=30$ 时, 采用不同观测矩阵, 经历相同次数迭代后, 其稀疏解的收敛速度。图2中采用式(29)所示的相对误差 E 表示稀疏解的收敛速度。在迭代次数相同时, 其相对误差减小的越快表示收敛速度越快, 图2中数据是经过500次实验取相对误差平均值后得到的结果。

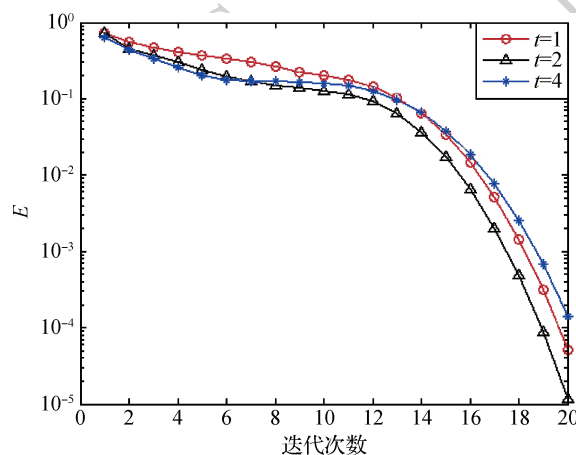


图2 不同维数观测矩阵重构过程中相对误差随迭代次数比较 ($M=128$, $N=256$, $K=30$, $q=0.8$)

Fig. 2 Comparison of reconstruction error with different dimensions of measurement matrices ($M=128$, $N=256$, $K=30$, $q=0.8$)

由图2可知, 当稀疏度较低时, 将观测矩阵维数进行降维后, 即 $t=2$ 或 $t=4$ 时, 经过相同的迭代次数, 重构信号的相对误差均能达到相同的数量级, 即收敛速度大致相当。

为进一步验证观测矩阵降维后的重构性能, 进行针对固定原始信号长度 N , 固定稀疏度 K , 经不同的观测次数, 来比较其正确重构的概率。实验中, 设定 $N=256$, $K=30$, 重构算法终止条件及判断重构是否成功的条件与图1所设条件一致, 同样进行了500次实验, 其结果如图3所示。

从图3可知, 在稀疏度 K 相对较小的情形下, 经过相同次数的观测, 其正确重构概率大致相当。至此, 通过上述实验, 充分说明了利用本文所述的基于半张量积压缩感知模型, 对观测矩阵进行降维处理后, 虽然重构概率较 $t=1$ 时有一定下降, 但对1维信号还是能够进行高概率重构。

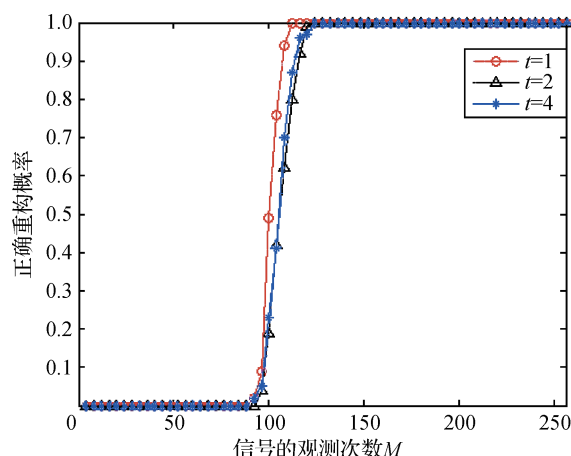


图3 不同维数观测矩阵正确重构概率随观测次数 M 的比较 ($N=256, K=30, q=0.8$)

Fig. 3 Comparison of probability of exact reconstruction with different dimensions of measurement matrices by different M ($N=256, K=30, q=0.8$)

5.2 2 维图像信号重构性能比较

在压缩感知与重构过程中,其对象必须是稀疏信号才能进行精确的重构。2 维图像信号在很多变换域下,能够进行稀疏化表示,如小波变换, DCT, 快速傅里叶变换 (FFT) 等等。实验中,选取小波变换矩阵对原始 2 维图像进行稀疏化表示,并将得到的稀疏信号投影到观测矩阵,得到相应的观测信号 y 。通过基于 l^q ($0 < q < 1$) 范数的迭代重加权最小二乘法,重构出原始图像的小波系数,最后在通过小波系数反变换重构出原始图像的重构图像。

实验中采用 4 幅原始图像作为实验载体,大小分别为为 256×256 像素的 Lena、Peppers,以及大小为 512×512 像素的 Mandrill 和 DICOM 医学灰度图像 OT-colon,其中 OT-colon 医学灰度图像可以从文献[14]得到。

为比较采用降维观测矩阵 ($t > 1$) 对重构质量的影响,进一步验证本文算法的可行性,对 4 幅原始图像采用相同的采样率,即 $M/N=0.5$,同时在设定观测矩阵维数时,分别取 $t=1, 2$ 和 4。在得到各自的观测信号 y 后,利用本文重构算法对原始图像进行 50 次重构,分别观测其重构图像和重构图像峰值信噪比。图 4 列出了 Lena 和 Peppers 的重构结果。

图 4(b)~(d) 分别表示了对 2 维原始图像的重构结果。对应图 4(b)~(d) 的高斯随机观测矩阵 Φ 的大小分别为 $128 \times 256, 64 \times 128$ 和 32×64 。从图 4 中可以较为直观地看到,在采用降维后的高斯随机观测矩阵对信号进行采样并重构后,其重构的 2 维图像质量并没有明显的下降,这表明了本文基于半张量积的压缩感知算法对观测矩阵进行降维,是同样可以对原始信号进行有效重构。且该方法非常直接有效地降低了观测矩阵的大小,也降低了观测矩阵的存储空间占用量。

为进一步衡量 2 维图像的重构效果,计算了各重构图像的峰值信噪比 (PSNR),结果如表 2 所示。

表 2 中列出了 4 幅原始图像采用 3 种不同大小



图4 不同维数观测矩阵重构 2 维图像比较 (Lena, Peppers, $M=128, N=256, q=0.8$)

Fig. 4 Comparison of the reconstructed images with different dimensions of measurement matrices (Lena and Peppers, $M=128, N=256, q=0.8$) ((a) the original image; (b) using the matrix $\Phi_{128 \times 256}$; (c) using the matrix $\Phi_{64 \times 128}$; (d) using the matrix $\Phi_{32 \times 64}$)

表 2 不同维数观测矩阵重构 2 维图像峰值信噪比 ($M/N=0.5, q=0.8$)
Table 2 Comparison of the PSNR of reconstructions with different dimensions of measurement matrices
($M/N=0.5, q=0.8$)

图像 ($N \times N$ /像素)	观测矩阵降维比例	PSNR/dB		
		最大值	最小值	平均值
Lena(256 × 256)	$t=1$	31.163 2	29.656 3	30.571 7
	$t=2$	31.250 1	28.441 0	30.427 4
	$t=4$	31.242 5	26.739 6	29.8515
Peppers(256 × 256)	$t=1$	31.556 6	29.456 7	30.627 1
	$t=2$	31.556 6	29.342 5	30.478 9
	$t=4$	31.528 5	28.719 5	29.689 6
Mandirll(512 × 512)	$t=1$	23.752 4	22.983 6	23.175 5
	$t=2$	23.105 0	22.973 5	23.041 6
	$t=4$	23.083 4	22.865 0	23.002 6
OT-colon(512 × 512)	$t=1$	30.626 6	30.237 8	30.405 3
	$t=2$	30.440 3	29.864 9	30.188 9
	$t=4$	30.394 7	29.734 7	30.010 3

的高斯随机观测矩阵分别经 50 次采样和重构后,其重构图像峰值信噪比的最大值,最小值和平均值。从表 2 可知,对高斯随机观测矩阵进行降维后(如 $t=2$ 或 4),随着观测矩阵维数的减小,其重构图像的峰值信噪比也逐渐降低,但其总体上仍具备较高的重构质量,且在主观视觉上很难觉察重构图像质量的下降。从而进一步验证了可以采用本文的方

法,利用降维后的观测矩阵对原始信号进行采样和重构。

实验中,为进一步验证降维观测矩阵对重构性能的影响,采用不同的采样率对原始图像进行了采样,且在采样率相同时,利用不同维数的高斯随机观测矩阵进行观测。实验同样进行了 50 次,取重构图像峰值信噪比的平均值,其结果如表 3 所示。

表 3 不同采样率时不同维数观测矩阵重构 2 维图像峰值信噪比 ($q=0.8$)
Table 3 Comparison of the PSNR of reconstructions with different dimensions of measurement matrices and
different observation numbers ($q=0.8$)

图像 ($N \times N$ /像素)	M/N	PSNR 平均值/dB				
		$t=1$	$t=2$	$t=4$	$t=8$	$t=16$
Lena(256 × 256)	0.8	40.336 1	40.277 1	39.926 0	38.425 8	37.380 0
	0.5	30.571 7	30.427 4	29.851 5	28.868 0	27.937 8
	0.4	26.841 9	26.225 7	24.963 1	24.298 5	23.177 3
	0.25	15.746 6	15.503 5	14.653 0	14.665 1	13.568 9
Peppers(256 × 256)	0.8	42.366 3	42.238 3	41.568 2	37.970 9	36.878 0
	0.5	30.627 1	30.478 9	29.689 6	28.564 0	28.081 3
	0.4	26.460 0	25.859 5	25.682 1	24.267 0	23.684 5
	0.25	15.964 9	15.650 5	15.112 5	14.089 3	13.801 5
OT-colon(512 × 512)	0.8	39.492 0	39.359 6	39.103 4	38.913 7	38.619 3
	0.5	30.405 3	30.188 9	30.010 3	28.451 9	28.160 1
	0.4	27.074 7	27.041 1	26.850 7	23.579 3	22.270 1
	0.25	21.868 1	21.513 6	21.358 0	20.846 0	20.107 2
Mandrill(512 × 512)	0.8	29.189 6	29.130 7	29.079 5	28.797 8	28.698 1
	0.5	23.175 5	23.041 6	23.002 6	22.034 5	21.672 6
	0.4	21.624 0	21.599 7	21.564 5	21.207 0	21.109 6
	0.25	19.303 2	19.229 4	19.038 0	18.951 3	18.851 3

如表3所示,在相同采样率的情形时,随着高斯随机观测矩阵维数的降低,经其采样重构后的峰值信噪比呈一定的降低趋势,但下降趋势非常平缓。特别地,当 $t=2$ 或4时,其重构信号的峰值信噪比与 $t=1$ 时几乎相等,即当观测矩阵大小降低至 $1/4$ 时,对2维图像信号的重构质量几乎没有影响。当观测矩阵维数继续降低时,其重构图像的质量稍有下降,且下降程度较 $t=2$ 或4时更为明显。由此,可以清楚地看到本文所提的基于半张量积的压缩感知模型,有效降低了观测矩阵所占存储空间。故在实际应用中,可以根据实际情况,找到重构质量与观测矩阵存储空间的折中点。

6 结 论

结合半张量积理论,提出了一种新型的压缩感知模型。虽然所提出的压缩感知模型没有有效提升重构图像的质量,但有效降低了观测矩阵在采样和重构过程中所占的存储空间。实验仿真结果表明,在观测矩阵降维的过程中,重构信号的质量并没有非常明显的下降,且当选择适当大小的观测矩阵,其重构图像的质量几乎没有下降。利用所述模型,完全遵循了现有压缩感知的理论框架,在采样和重构过程中不增加任何附加操作。

本文借鉴基于 $l^q(0 < q < 1)$ 范数的迭代重加权最小二乘重构方法对采样信号进行了重构,在重构过程中,当原始信号的稀疏度 K 较大时,存在重构时间增加,实时性变差的现象。这一点是后续将要继续着重解决的一个重点。此外,在后续工作中,将继续尝试其他的重构方法,以期在降低观测矩阵维数的情形下,在提升或不降低重构信号质量的同时,进一步加快重构速度,以实现压缩感知的低存储,快速化重构。

参考文献 (References)

- [1] Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509. [DOI: 10.1109/TIT.2005.862083]
- [2] Candès E J, Eldar Y C, Needell D, et al. Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2011, 31(1): 59-73. [DOI: 10.1016/j.acha.2010.10.002]
- [3] Candès E, Romberg J. Sparsity and incoherence in compressive sampling[J]. Inverse Problems, 2007, 23(3): 969-985. [DOI: 10.1088/0266-5611/23/3/008]
- [4] Do T T, Gan L, Nguyen N H, et al. Fast and efficient compressive sensing using structurally random matrices[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(1): 139-154. [DOI: 10.1109/TSP.2011.2170977]
- [5] Li R, Gan Z L, Zhu X C. A global reconstruction model of images using block compressed sensing[J]. Signal Processing, 2012, 28(10): 1416-1422. [李然, 干宗良, 朱秀昌. 基于分块压缩感知的图像全局重构模型[J]. 信号处理, 2012, 28(10): 1416-1422.] [DOI: 10.3969/j.issn.1003-0530.2012.10.009]
- [6] Wang A H, Liu L, Zeng B, et al. Progressive image coding based on an adaptive block compressed sensing[J]. IEICE Electronics Express, 2011, 8(8): 575-581. [DOI: 10.1587/elex.8.575]
- [7] Jiang Y W, Yu X M. An image variable sampling and reconstruction algorithm based DWT multiscale block compressed sensing[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2013, 52(3): 30-33. [蒋业文, 于昕梅. 基于DWT的多尺度分块变采样率压缩感知图像重构算法[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2013, 52(3): 30-33.] [DOI: 10.13471/j.cnki.acta.snus.2013.03.005]
- [8] Zhu Z Z, Zhou C B, Liu F L, et al. Binarized measurement matrix for compressive sensing[J]. Journal of Microwaves, 2014, 30(2): 79-83, 96. [朱志臻, 周崇彬, 刘发林, 等. 用于压缩感知的二值化测量矩阵[J]. 微波学报, 2014, 30(2): 79-83, 96.]
- [9] Chen D Z, Qi H S, Li Z Q. Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach[M]. London: Springer, 2011: 19-53.
- [10] Daubechies I, DeVore R, Fornasier M, et al. Iteratively reweighted least squares minimization for sparse recovery[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2010, 63(1): 1-38. [DOI: 10.1002/cpa.20303]
- [11] Cheng X L, Zheng X, Han W M. Algorithms on the sparse solution of under-determined linear systems[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2013, 28(2): 235-248. [程晓良, 郑璇, 韩渭敏. 求解欠定线性方程组稀疏解的算法[J]. 高校应用数学学报, 2013, 28(2): 235-248.] [DOI: 10.3969/j.issn.1000-4424.2013.02.015]
- [12] Saab R, Yilmaz Ö. Sparse recovery by non-convex optimization-instance optimality[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 29(1): 30-48. [DOI: 10.1016/j.acha.2009.08.002]
- [13] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306. [DOI: 10.1109/TIT.2006.871582]
- [14] Barr S. Medical image samples. [EB/OL]. 1999-07-24 [2015-06-08]. <http://www.barre.nom.fr/medical/samples/>.