



JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS

主办: 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

2016
05
VOL.21

ISSN1006-8961
CN11-3758/TB



图像自动聚类 P574



第21卷第5期（总第241期）
2016年5月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊
中文核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院
主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

主 编 李小文
编辑出版《中国图象图形学报》编辑出版委员会
邮政信箱 北京9718信箱
邮 编 100101
电子信箱 jig@radi.ac.cn
电 话 010-64807995
网 址 www.cjig.cn

广告经营许可证 京朝工商广字第0361号
总 发 行 北京报刊发行局
订 购 全国各地邮局
海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司
(邮政信箱: 北京399信箱 邮编: 100048)
印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

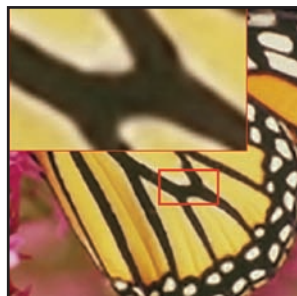
Title inscription: Song Jian | Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences
Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS
China Society of Image and Graphics
Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

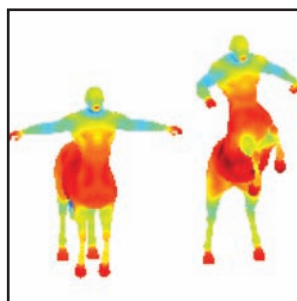
Editor-in-Chief LI Xiaowen
Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of Image and Graphics
P.O.Box 9718, Beijing, P.R.China
Zip code 100101
E-mail jig@radi.ac.cn
Telephone 010-64807995
Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals
Domestic All Local Post Offices in China
Overseas China International Book Trading Corporation
(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China)
Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

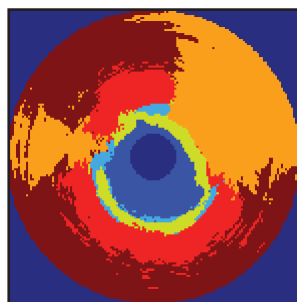
CN 11-3758/TB
ISSN 1006-8961
CODEN ZTTXFZ
国外发行代号 M1406
国内邮发代号 82-831
国内定价 60.00元



利用双通道卷积神经网络的
图像超分辨率算法(第556页)



融合特征描述约束的3维
等距模型对应关系计算(第
628页)



结合先验形状信息和序贯学
习的心血管内超声外弹力膜
检测(第646页)

综述

中国图像工程: 2015

章毓晋 533

图像处理和编码

基于代价敏感Adaboost目标跟踪

薛一哲, 王拓 544

利用双通道卷积神经网络的图像超分辨率算法

徐冉, 张俊格, 黄凯奇 556

图像分析和识别

局部均匀模式描述和双加权融合的人脸识别

任福继, 李艳秋, 许良凤, 胡敏, 王晓华 565

K步稳定的鞋印花纹图像自动聚类

王新年, 舒莹莹 574

空间约束混合高斯运动目标检测

董俊宁, 杨词慧 588

图像理解和计算机视觉

分层信息融合的物体级显著性检测

李波, 金连宝, 曹俊杰, 冷成财, 卢春园, 苏志勋 595

结合区域协方差分析的图像显著性检测

张旭东, 吕言言, 缪永伟, 郝鹏翼, 陈佳舟 605

前景判别的局部模型匹配目标跟踪

刘大千, 刘万军, 费博雯 616

计算机图形学

融合特征描述约束的3维等距模型对应关系计算

杨军, 闫寒, 王茂正 628

一类加权有理插值样条曲面及局部约束控制

刘植, 肖凯, 陈晓彦, 江平, 谢进 636

医学图像处理

结合先验形状信息和序贯学习的心血管内超声外弹力膜检测

林慕丹, 杨丰, 梁淑君, 赵海升, 黄铮, 崔凯 646

遥感图像处理

局部显著特征下的光学遥感图像舷靠舰船检测

李轩, 刘云清, 卞春江, 毛博年 657

长时序高光谱图像清晰度影响因素分析

尚任, 黑保琴, 李盛阳, 覃帮勇, 张九星 665

基于变差函数的中高分辨率SAR影像农村建筑区提取

林晨曦, 周艺, 王世新, 刘文亮, 田野, 张燕楠 674

CONTENTS

JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS

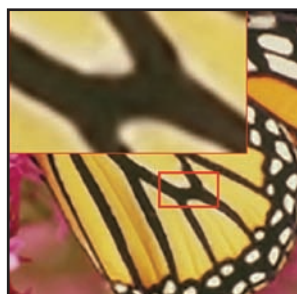
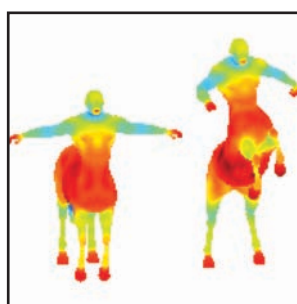
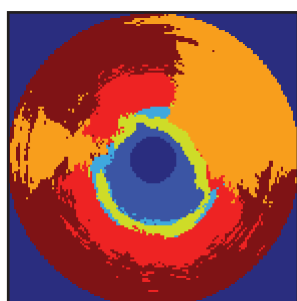


Image super-resolution using two-channel convolutional neural networks(P556)



Calculation of correspondences between three-dimensional isometric shapes with the use of a fused feature descriptor (P628)



External elastic membrane border detection based on for intravascular ultrasound images(P646)

Review

Image engineering in China: 2015	
Zhang Yujin	533

Image Processing and Coding

Object-tracking method based on improved cost-sensitive Adaboost	
Xue Yizhe, Wang Tuo	544
Image super-resolution using two-channel convolutional neural networks	
Xu Ran, Zhang Junge, Huang Kaiqi	556

Image Analysis and Recognition

Face recognition method based on local mean pattern description and double weighted decision fusion for classification	
Ren Fuji, Li Yanqiu, Xu Liangfeng, Hu Min, Wang Xiaohua	565
K-steps stabilization based on automatic clustering of shoeprint images	
Wang Xinnian, Shu Yingying	574
Moving object detection using improved Gaussian mixture models based on spatial constraint	
Dong Junning, Yang Cihui	588

Image Understanding and Computer Vision

Object level saliency detection by hierarchical information fusion	
Li Bo, Jin Lianbao, Cao Junjie, Leng Chengcai, Lu Chunyuan, Su Zhixun	595
Image saliency detection using regional covariance analysis	
Zhang Xudong, Lyu Yanyan, Miao Yongwei, Hao Pengyi, Chen Jiazhou	605
Foreground discrimination in local model-matching tracking	
Liu Daqian, Liu Wanjun, Fei Bowen	616

Computer Graphics

Calculation of correspondences between three-dimensional isometric shapes with the use of a fused feature descriptor	
Yang Jun, Yan Han, Wang Maozheng	628
Weighted rational interpolation spline surfaces and local constraint control	
Liu Zhi, Xiao Kai, Chen Xiaoyan, Jiang Ping, Xie Jin	636

Medical Image Processing

External elastic membrane border detection based on sequential learning and prior shape information for intravascular ultrasound images	
Lin Mudan, Yang Feng, Liang Shujun, Zhao Haisheng, Huang Zheng, Cui Kai	646

Remote Sensing Image Processing

Inshore ship detection method in optical remote sensing images using local salient characteristics	
Li Xuan, Liu Yunqing, Bian Chunjiang, Mao Bonian	657
Analysis of factors influencing clarity of hyper spectral images in long time series	
Shang Ren, Hei Baoqin, Li Shengyang, Qin Bangyong, Zhang Jiuxing	665
Variogram-based rural build-up area extraction from middle and high resolution SAR images	
Lin Chenxi, Zhou Yi, Wang Shixin, Liu Wenliang, Tian Ye, Zhang Yannan	674

中图法分类号: TP391.7 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2016)05-636-10

论文引用格式: Liu Z, Xiao K, Chen X Y, Jiang P, Xie J. Weighted rational interpolation spline surfaces and local constraint control[J]. Journal of Image and Graphics, 2016, 21(5): 636-644. [刘植, 肖凯, 陈晓彦, 江平, 谢进. 一类加权有理插值样条曲面及局部约束控制[J]. 中国图象图形学报, 2016, 21(5): 636-644.] [DOI:10. 11834/jig. 20160511]

一类加权有理插值样条曲面及局部约束控制

刘植¹, 肖凯¹, 陈晓彦¹, 江平¹, 谢进²

1. 合肥工业大学数学学院, 合肥 230009; 2. 合肥学院科学计算研究所, 合肥 230601

摘要: **目的** 构造一类新的基于函数值与偏导数值的加权有理插值样条曲面, 讨论该样条曲面的相关性质并分析曲面的局部约束控制。**方法** 一方面, 先从 x 方向构造有理三次插值样条, 再从 y 方向构造二元有理插值样条曲面; 另一方面, 按相反次序构造另一个二元有理插值样条曲面; 最后将两种插值曲面加权得到一类新的有理插值样条曲面。**结果** 讨论插值曲面的性质, 包括基函数、边界性质、积分加权系数的性质以及误差估计。通过选择合适的参数和加权系数, 在不改变插值数据的前提下实现对插值区域内的局部约束控制。**结论** 实验结果表明, 新的加权有理插值样条曲面具有良好的约束控制性质。

关键词: 有理插值样条; 局部控制; 积分加权系数; 权系数

Weighted rational interpolation spline surfaces and local constraint control

Liu Zhi¹, Xiao Kai¹, Chen Xiaoyan¹, Jiang Ping¹, Xie Jin²

1. School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China;

2. Institute of Scientific Computing, Hefei University, Hefei 230601, China

Abstract: **Objective** This study presents a new weighted rational spline interpolation surface based on the values and partial derivatives of functions being interpolated and discusses its properties. The local constraint control of surfaces is parsed. **Method** On one hand, a rational cubic interpolation spline is constructed on the x -direction and a bivariate rational interpolation spline surface is constructed on the y -direction. On the other hand, another bivariate rational interpolation spline surface is obtained in the reverse order. Finally, a new weighted rational interpolation spline surface is generated by weighting two different interpolation surfaces. **Result** This study discusses several properties of the interpolating function, such as the bases of the interpolation, the bounded property, the properties of integral weighted coefficients, and the error between the interpolating function and the function being interpolated. By selecting suitable parameters and weight coefficients, the local constraint control in the interpolating region can be obtained without changing the interpolating data. **Conclusion** Experimental results illustrate that the new weighted rational interpolation spline surface possesses good constraint control properties.

Key words: rational interpolation spline; local control; integral weighted coefficient; weight

收稿日期: 2015-10-16; 修回日期: 2015-12-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(11471093); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20110111120026); 安徽省教育厅自然科学重大研究基金项目(KJ2014ZD30); 中央高校基本科研业务费专项经费(JZ2015HGXI0175)

第一作者简介: 刘植(1976—), 男, 副教授, 硕士生导师, 2009年于合肥工业大学获计算机应用技术专业工学博士学位, 主要从事数值逼近、计算几何以及计算机辅助几何设计方面的研究。E-mail: liuzhi314@126.com

Supported by: National Natural Science Foundation of China (11471093)

0 引言

曲线与曲面的表示是计算机辅助几何设计中的重点问题之一。传统的曲线曲面设计大多数用的是多项式样条函数构造方法,对于给定的插值数据,插值曲线曲面的表示与交互设计不够灵活。随着计算机辅助几何设计技术的发展,Bézier方法、B样条及NURBS等方法被广泛应用到工业产品设计的各个方面,如轮船、汽车、飞机外壳曲面造型的设计^[1]。然而,这些方法生成曲线曲面的局部修改也极为不易。

近年来,关于有理插值曲线的研究克服了传统CAGD&CAD中曲线曲面难以局部修改的缺点。如刘爱奎等人^[2]提出的带有形状参数的加权有理插值曲线不仅具有简洁的表达式,同时可以让曲线整体约束于折线之间,具有局部点控制性质,此方法对曲线的设计方便快捷、行之有效。闫伟奇等人^[3]提出了一种多节点有理样条曲线及曲面,并研究了该有理样条的应用。Sun等人^[4-5]提出的基于等距线上离散数据构造的有理插值样条可以应用于地质勘探、锻造科技和医学影像中。随着单变量曲线设计方法研究的深入,二元有理插值曲面的研究也逐渐引起广大学者的关注^[6-7]。Duan等人分别构造了分母为双一次^[8]、双二次^[9]仅基于函数值的二元有理插值样条,并给出了样条函数的矩阵表示与边界性质。同年,Duan等人^[10]构造了一类基于函数值和偏导数的二元有理插值曲面样条,该样条函数具有简单对称的基函数,便于理论研究与曲面局部约束。邓四清等人^[11-13]构造了分母分别为双二次、双三次的二元有理插值曲面,并且研究了这些曲面的边界、逼近、中央点约束性质。项梅灵^[14]构造了仅基于函数值的二元有理插值样条曲面,并研究了其凸性、边界插值、极限、解析和正则等性质,指出其极限曲面是双曲抛物面,揭示了参数对曲面形状的影响。

加权混合是曲线曲面设计中的一种常用造型方法,Huang等人^[15]提出一种带有权的有理插值曲面,并研究了该二元有理插值样条函数的矩阵形式及误差估计。张云峰等人^[16]研究了仅基于函数值的加权有理插值样条曲面及其局部约束控制。

本文构造了一类新的基于函数值和偏导数值的二元加权有理样条,该有理插值样条函数对任意正参数和权系数都保持 C^1 连续,具备了样条曲面的积

分性质、边界性质和局部约束控制性质,以及更好的逼近精度。实验结果表明,加权有理插值样条曲面的可视化约束控制方法的有效性。

1 插值函数的构造

给定平面区域 $\Omega: [a, b; c, d]$, $\{(x_i, y_j, f_{i,j}, e_{i,j}, d_{i,j}), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ 为已知插值数据点集, $a = x_1 < \dots < x_n = b$ 和 $c = y_1 < \dots < y_m = d$ 为节点空间, $f(x, y)$ 、 $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 在点 (x_i, y_j) 的值分别记为 $f_{i,j}$ 、 $e_{i,j}$ 、 $d_{i,j}$ 。令 $h_i = x_{i+1} - x_i$, $l_j = y_{j+1} - y_j$,对 xy 平面上任意点 $(x, y) \in [x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$,取 $\theta = (x - x_i)/h_i$, $\eta = (y - y_j)/l_j$ 。先对每一个 $y = y_j, j = 1, \dots, m$ 构造 x 方向插值

$$\bar{P}_{i,j}^*(x) = \frac{\bar{p}_{i,j}^*(x)}{\bar{q}_{i,j}^*(x)}, i = 1, \dots, n-1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_{i,j}^*(x) &= (1-\theta)^3 \alpha_{i,j} f_{i,j} + \theta(1-\theta)^2 \bar{V}_{i,j}^* + \\ &\theta^2(1-\theta) \bar{W}_{i,j}^* + \theta^3 f_{i+1,j} \bar{q}_{i,j}^*(x) = \\ &(1-\theta)^2 \alpha_{i,j} + \theta^2 \end{aligned}$$

$$\bar{V}_{i,j}^* = \alpha_{i,j} f_{i,j} + \alpha_{i,j} h_i e_{i,j}$$

$$\bar{W}_{i,j}^* = f_{i+1,j} - h_i e_{i+1,j}$$

且 $\alpha_{i,j} > 0$ 。插值函数式(1)满足

$$\bar{P}_{i,j}^*(x_i) = f_{i,j}$$

$$\bar{P}_{i,j}^*(x_{i+1}) = f_{i+1,j}$$

$$\bar{P}'_{i,j}^*(x_i) = e_{i,j}$$

$$\bar{P}'_{i,j}^*(x_{i+1}) = e_{i+1,j}$$

对任意点集 $(i, j), i = 1, 2, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, m-1$ 。在 $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ 内构造函数

$$\begin{aligned} \bar{P}_{i,j}(x, y) &= (1-\eta)^3 \bar{P}_{i,j}^*(x) + \\ &\eta(1-\eta)^2 \bar{V}_{i,j} + \\ &\eta^2(1-\eta) \bar{W}_{i,j} + \eta^3 \bar{P}_{i,j+1}^*(x) \quad (2) \\ \bar{V}_{i,j} &= 3\bar{P}_{i,j}^*(x) + l_j d_{i,j} \\ \bar{W}_{i,j} &= 3\bar{P}_{i,j+1}^*(x) - l_j d_{i,j+1} \end{aligned}$$

则 $\bar{P}_{i,j}(x, y)$ 满足

$$\bar{P}_{i,j}(x_r, y_s) = f_{r,s}$$

$$\frac{\partial \bar{P}_{i,j}(x_r, y_s)}{\partial x} = e_{r,s}$$

$$\frac{\partial \bar{P}_{i,j}(x_r, y_s)}{\partial y} = d_{r,s}$$

$$r = i, i+1, s = j, j+1$$

对于给定数据 $(x_r, y_s, f_{r,s}, e_{r,s}, d_{r,s}, r = i, i+1,$

$s = j, j + 1$) 和参数 $\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1}$, 在区域 $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ 上的插值函数 $\bar{P}_{i,j}(x, y)$ 具有唯一性。同时, 易于验证无论参数 $\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1}$ 取何值, 在整个插值区域 $[x_1, x_n; y_1, y_m]$ 上插值函数都保持 C^1 连续。

同理, 也可以先从 y 方向构造插值曲线。对于任意的 $x = x_i, i = 1, 2, \dots, n$, 在区间 $[y_j, y_{j+1}]$ 上, 构造 y 方向的插值

$$\bar{P}_{i,j}^*(y) = \frac{\bar{p}_{i,j}^*(y)}{\bar{q}_{i,j}^*(y)}, j = 1, 2, \dots, m - 1 \quad (3)$$

$$\bar{p}_{i,j}^*(y) = (1 - \eta)^3 \beta_{i,j} f_{i,j} + \eta(1 - \eta)^2 \bar{V}_{i,j}^* + \eta^2(1 - \eta) \bar{W}_{i,j}^* + \eta^3 f_{i,j+1}$$

$$\bar{q}_{i,j}^*(y) = (1 - \eta)^2 \beta_{i,j} + \eta^2$$

$$\bar{V}_{i,j}^* = \beta_{i,j} f_{i,j} + \beta_{i,j} l_j d_{i,j}$$

$$\bar{W}_{i,j}^* = f_{i,j+1} - l_j d_{i,j+1}$$

且 $\beta_{i,j} > 0$ 。

对任意点集 $(i, j), i = 1, 2, \dots, n - 1, j = 1, 2, \dots, m - 1$ 。在 $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ 内构造双变量有理插值函数

$$\bar{P}_{i,j}(x, y) = (1 - \theta)^3 \bar{P}_{i,j}^*(y) + \theta(1 - \theta)^2 \bar{V}_{i,j} + \theta^2(1 - \theta) \bar{W}_{i,j} + \theta^3 \bar{P}_{i+1,j}^*(y) \quad (4)$$

$$\bar{V}_{i,j} = 3 \bar{P}_{i,j}^*(y) + h_i e_{i,j}$$

$$\bar{W}_{i,j} = 3 \bar{P}_{i+1,j}^*(y) - h_i e_{i+1,j}$$

且 $\bar{P}_{i,j}(x, y)$ 满足

$$\begin{aligned} \bar{P}_{i,j}(x_r, y_s) &= f_{r,s} \\ \frac{\partial \bar{P}_{i,j}(x_r, y_s)}{\partial x} &= e_{r,s} \\ \frac{\partial \bar{P}_{i,j}(x_r, y_s)}{\partial y} &= d_{r,s} \end{aligned}$$

$$r = i, i + 1, s = j, j + 1$$

同理, 对于给定数据 $(x_r, y_s, f_{r,s}, e_{r,s}, d_{r,s}, r = i, i + 1, s = j, j + 1)$ 和参数 $\beta_{i,j}, \beta_{i+1,j}, \bar{P}_{i,j}(x, y)$ 在 $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ 具有唯一性。同时, 易得不论参数 $\beta_{i,j}, \beta_{i+1,j}$ 取何值, 在整个插值区域 $[x_1, x_n; y_1, y_m]$ 上插值函数保持 C^1 连续。

基于上述插值函数 $\bar{P}_{i,j}(x, y)$ 和 $\bar{P}_{i,j}(x, y)$, 构造一类新的加权有理插值函数

$$P_{i,j}(x, y) = \lambda \bar{P}_{i,j}(x, y) + (1 - \lambda) \bar{P}_{i,j}(x, y) \quad (5)$$

式中, $\lambda \in [0, 1]$ 为加权系数。显然, 式(5)定义的加权有理插值函数满足

$$P_{i,j}(x_r, y_s) = f_{r,s}$$

$$\frac{\partial P_{i,j}(x_r, y_s)}{\partial x} = e_{r,s}$$

$$\frac{\partial P_{i,j}(x_r, y_s)}{\partial y} = d_{r,s}$$

$$r = i, i + 1, s = j, j + 1$$

且无论系数 $\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1}$ 和 $\beta_{i,j}, \beta_{i+1,j}$ 取何值, 其在整个插值区域 $[x_1, x_n; y_1, y_m]$ 保持 C^1 连续。特别地, 当 $\alpha_{i,j} = -1$ 时, 式(1)是分母为一次的有理三次插值样条函数, 式(5)是分母为一次的加权有理插值曲面样条, 文献[16]构造的有理插值样条是式(5)的特例。

样条曲面的整体与局部修改是 CAGD 中的一个重点课题, 上述加权有理插值样条曲面通过调节权系数的取值, 可以灵活控制曲面的形状。给定插值数据如表 1 所示。

表 1 插值数据

Table 1 Interpolation data

(x_i, y_j)	$f_{i,j}$	$e_{i,j}$	$d_{i,j}$
(0,0)	1.0	0.5	-0.4
(0,1)	2.0	-6.0	-1.1
(1,0)	1.0	-1.0	0.5
(1,1)	3.0	-0.2	-2.0

参数 $\alpha_{i,j} = \alpha_{i,j+1} = \beta_{i,j} = \beta_{i+1,j} = 1$, 图 1 为带不同权系数 λ 有理插值样条。

相比图 1(b) 曲面的“平缓”, 图 1(e) 继承了图 1(a) 曲面的快速“上升”; 相比于图 1(a) 曲面陡然“上升”, 图 1(d) 继承了图 1(b) 曲面中的“平缓”部分; 当 $\lambda = 0.5$ 时 $P_{i,j}(x, y)$ 兼顾 $\bar{P}_{i,j}(x, y)$ 和 $\bar{P}_{i,j}(x, y)$ 的形状。由此可以看出, 加权有理插值样条可以根据需要选择继承 $\bar{P}_{i,j}(x, y)$ 或 $\bar{P}_{i,j}(x, y)$ 的几何特征, 在几何造型中生成更加丰富的形状。

2 插值基函数

插值样条函数 $P_{i,j}(x, y)$ 可以表示为

$$P_{i,j}(x, y) = \sum_{r=i}^{i+1} \sum_{s=j}^{j+1} [a_{r,s}(\theta, \eta) f_{r,s} + b_{r,s}(\theta, \eta) h_i e_{r,s} + c_{r,s}(\theta, \eta) l_j d_{r,s}] \quad (6)$$

$$a_{i,j}(\theta, \eta) = \frac{\lambda(1 - \eta)^2(1 + 2\eta)(1 - \theta)^2 \alpha_{i,j}}{(1 - \theta)^2 \alpha_{i,j} + \theta^2} +$$

$$\frac{(1 - \lambda)(1 - \theta)^2(1 + 2\theta)(1 - \eta)^2 \beta_{i,j}}{(1 - \eta)^2 \beta_{i,j} + \eta^2}$$

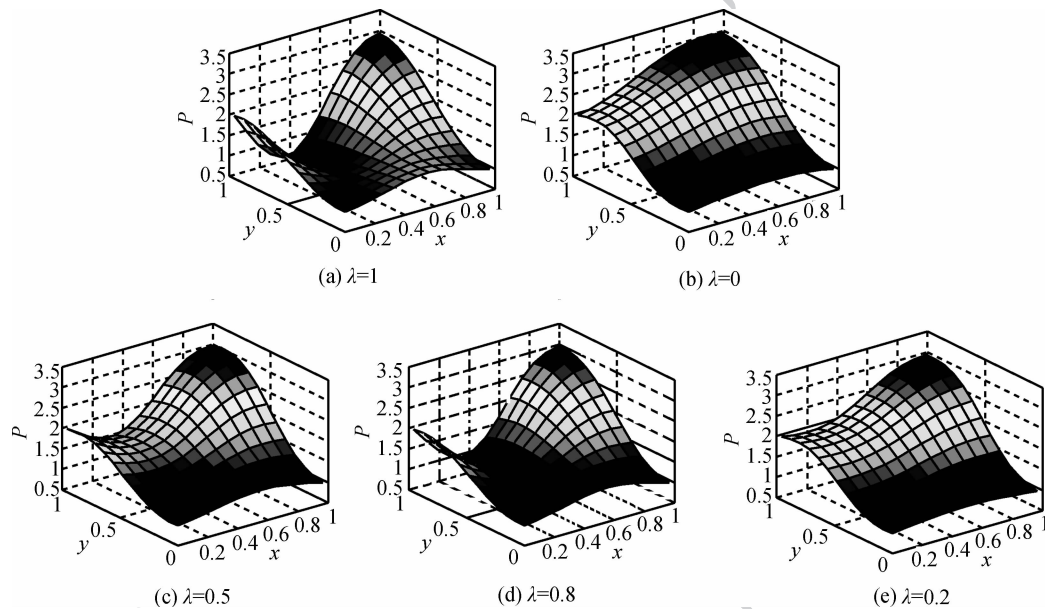


图1 带不同权重有理插值样条

Fig. 1 The rational interpolation spline with different weights ((a) $\lambda = 1$; (b) $\lambda = 0$; (c) $\lambda = 0.5$; (d) $\lambda = 0.8$; (e) $\lambda = 0.2$)

$$\begin{aligned}
 a_{i,j+1}(\theta, \eta) &= \frac{\lambda \eta^2 (3-2\eta) (1-\theta)^2 \alpha_{i,j+1}}{(1-\theta)^2 \alpha_{i,j+1} + \theta^2} + \\
 &\quad \frac{(1-\lambda) (1-\theta)^2 (1+2\theta) \eta^2}{(1-\eta)^2 \beta_{i,j} + \eta^2} \\
 a_{i+1,j}(\theta, \eta) &= \frac{\lambda (1-\eta)^2 (1+2\eta) \theta^2}{(1-\theta)^2 \alpha_{i,j} + \theta^2} + \\
 &\quad \frac{(1-\lambda) \theta^2 (3-2\theta) (1-\eta)^2 \beta_{i+1,j}}{(1-\eta)^2 \beta_{i+1,j} + \eta^2} \\
 a_{i+1,j+1}(\theta, \eta) &= \frac{\lambda \eta^2 (3-2\eta) \theta^2}{(1-\theta)^2 \alpha_{i,j+1} + \theta^2} + \\
 &\quad \frac{(1-\lambda) \theta^2 (3-2\theta) \eta^2}{(1-\eta)^2 \beta_{i+1,j} + \eta^2} \\
 b_{i,j}(\theta, \eta) &= \frac{\lambda (1-\eta)^2 (1+2\eta) \theta (1-\theta)^2 \alpha_{i,j}}{(1-\theta)^2 \alpha_{i,j} + \theta^2} + \\
 &\quad (1-\lambda) \theta (1-\theta)^2 \\
 b_{i,j+1}(\theta, \eta) &= \frac{\lambda \eta^2 (3-2\eta) \theta (1-\theta)^2 \alpha_{i,j+1}}{(1-\theta)^2 \alpha_{i,j+1} + \theta^2} \\
 b_{i+1,j}(\theta, \eta) &= -\frac{\lambda (1-\eta)^2 (1+2\eta) \theta^2 (1-\theta)}{(1-\theta)^2 \alpha_{i,j} + \theta^2} - \\
 &\quad (1-\lambda) \theta^2 (1-\theta) \\
 b_{i+1,j+1}(\theta, \eta) &= -\frac{\lambda \eta^2 (3-2\eta) \theta^2 (1-\theta)}{(1-\theta)^2 \alpha_{i,j+1} + \theta^2} \\
 c_{i,j}(\theta, \eta) &= \frac{(1-\lambda) (1-\theta)^2 (1+2\theta) \eta (1-\eta)^2 \beta_{i,j}}{(1-\eta)^2 \beta_{i,j} + \eta^2} + \\
 &\quad \lambda \eta (1-\eta)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{i,j+1}(\theta, \eta) &= -\frac{(1-\lambda) (1-\theta)^2 (1+2\theta) \eta^2 (1-\eta)}{(1-\eta)^2 \beta_{i,j} + \eta^2} - \\
 &\quad \lambda \eta^2 (1-\eta) \\
 c_{i+1,j}(\theta, \eta) &= \frac{(1-\lambda) \theta^2 (3-2\theta) \eta (1-\eta)^2 \beta_{i+1,j}}{(1-\eta)^2 \beta_{i+1,j} + \eta^2} \\
 c_{i+1,j+1}(\theta, \eta) &= -\frac{(1-\lambda) \theta^2 (3-2\theta) \eta^2 (1-\eta)}{(1-\eta)^2 \beta_{i+1,j} + \eta^2}
 \end{aligned}$$

式中, $a_{r,s}$ 、 $b_{r,s}$ 和 $c_{r,s}$ ($r = i, i+1; s = j, j+1$) 称为双变量样条插值函数 $P_{i,j}(x, y)$ 的基函数。

容易验证

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a_{i,j}(\theta, \eta)}{\partial \alpha_{i,j}} &> 0 \\
 \frac{\partial a_{i,j+1}(\theta, \eta)}{\partial \alpha_{i,j}} &= 0 \\
 \frac{\partial a_{i+1,j}(\theta, \eta)}{\partial \alpha_{i,j}} &< 0 \\
 \frac{\partial a_{i+1,j+1}(\theta, \eta)}{\partial \alpha_{i,j}} &= 0
 \end{aligned}$$

因此随着 $\alpha_{i,j}$ 的递增, $a_{i,j}(\theta, \eta)$ 也相应递增, 而 $a_{i+1,j}(\theta, \eta)$ 相应递减, 即生成的插值曲面在插值点 (x_i, y_j) 处的权重增加, 在插值点 (x_{i+1}, y_j) 处的权重减少, 而在 (x_i, y_{j+1}) 及 (x_{i+1}, y_{j+1}) 的权重没有发生变化。从几何形状上看, $\alpha_{i,j}$ 的变化会引起插值曲面在插值点 (x_i, y_j) 及 (x_{i+1}, y_j) 附近形状的剧烈变化 ($\alpha_{i,j}$ 的递增使插值曲面更靠近 (x_i, y_j) , 远离 (x_{i+1}, y_j)), 而在插值点 (x_i, y_{j+1}) 及 (x_{i+1}, y_{j+1}) 附

近形状的变化很小。因此,在几何设计中,参数 $\alpha_{i,j}$ 主要用于控制插值曲面在 (x_i, y_j) 及 (x_{i+1}, y_j) 附近的形状。同理,其他参数 $\alpha_{i+1,j}, \beta_{i,j}, \beta_{i,j+1}$ 可以控制插值曲面在相应位置的形状。

对表1插值数据,取 $\lambda = 0.25$, 讨论参数取值对有理插值曲面形状的影响,各参数取值如表2所示。

相应有理插值曲面如图2所示。

由图1和图2可知,在曲面设计中可以灵活选取权系数及参数来生成理想的有理插值曲面。

表2 参数表

Table 2 Parameters table

图2	$\alpha_{i,j}$	$\alpha_{i+1,j}$	$\beta_{i,j}$	$\beta_{i,j+1}$
(a)	1.00	60.0	1.00	1.00
(b)	0.05	0.05	1.00	1.00
(c)	1.00	1.00	60.0	60.0
(d)	1.00	0.05	0.05	1.00
(e)	1.00	1.00	1.00	60.0
(f)	1.00	1.00	0.05	0.05

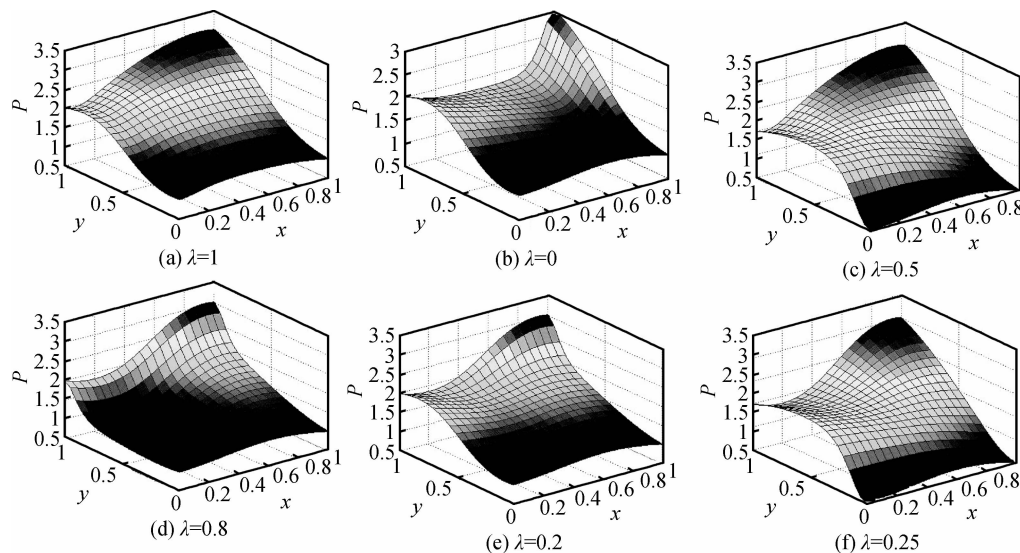


图2 带不同参数的有理插值样条

Fig. 2 The rational interpolation spline with different parameters ((a) $\lambda = 1$; (b) $\lambda = 0$; (c) $\lambda = 0.5$; (d) $\lambda = 0.8$; (e) $\lambda = 0.2$; (f) $\lambda = 0.25$)

为进一步讨论插值样条函数的有界性,需要讨论基函数的一些性质。首先

$$\sum_{r,s} |a_{r,s}| = a_{i,j} + a_{i,j+1} + a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1} = 1 \quad (7)$$

$$\sum_{r,s} |b_{r,s}| = b_{i,j} + b_{i,j+1} - b_{i+1,j} - b_{i+1,j+1} = \theta(1-\theta) \left[\lambda(1-\eta)^2(1+2\eta) \frac{(1-\theta)\alpha_{i,j} + \theta}{(1-\theta)^2\alpha_{i,j} + \theta^2} + \lambda\eta^2(3-2\eta) \frac{(1-\theta)\alpha_{i,j+1} + \theta}{(1-\theta)^2\alpha_{i,j+1} + \theta^2} + (1-\lambda) \right]$$

注意到,对给定的 $\sigma \in (0, +\infty)$, 有

$$\max_{\delta \in [0,1]} \left\{ \frac{(1-\delta)\sigma + \delta}{(1-\delta)^2\sigma + \delta^2} \right\} = \frac{(1+\sqrt{\sigma})^2}{2\sqrt{\sigma}}$$

故

$$\sum_{r,s} |b_{r,s}| \leq \theta(1-\theta) \left[\lambda(1-3\eta^2+2\eta^3) \frac{(1+\sqrt{\alpha_{i,j}})^2}{2\sqrt{\alpha_{i,j}}} + \lambda\eta^2(3-2\eta) \frac{(1+\sqrt{\alpha_{i,j+1}})^2}{2\sqrt{\alpha_{i,j+1}}} + (1-\lambda) \right]$$

$$\lambda\eta^2(3-2\eta) \frac{(1+\sqrt{\alpha_{i,j+1}})^2}{2\sqrt{\alpha_{i,j+1}}} + (1-\lambda) \leq \frac{1}{4} [\lambda(1-3\eta^2+2\eta^3) + \lambda\eta^2(3-2\eta) + (1-\lambda)]$$

$$\max \left[\frac{(1+\sqrt{\alpha_{i,j}})^2}{2\sqrt{\alpha_{i,j}}}, \frac{(1+\sqrt{\alpha_{i,j+1}})^2}{2\sqrt{\alpha_{i,j+1}}} \right] = \frac{1}{4} \max \left[\frac{(1+\sqrt{\alpha_{i,j}})^2}{2\sqrt{\alpha_{i,j}}}, \frac{(1+\sqrt{\alpha_{i,j+1}})^2}{2\sqrt{\alpha_{i,j+1}}} \right] \triangleq \bar{M}$$

即

$$\sum_{r,s} |b_{r,s}| \leq \bar{M} \quad (8)$$

同理

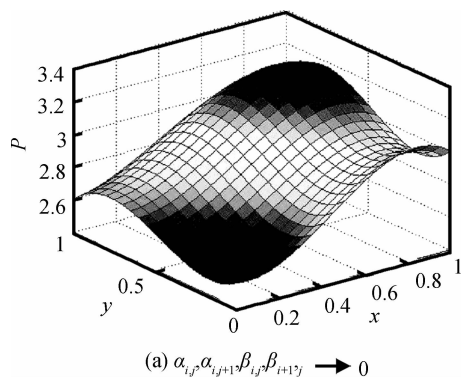
$$\sum_{r,s} |c_{r,s}| = c_{i,j} - c_{i,j+1} + c_{i+1,j} - c_{i+1,j+1} \leq \frac{1}{4} \max \left[\frac{(1+\sqrt{\beta_{i,j}})^2}{2\sqrt{\beta_{i,j}}}, \frac{(1+\sqrt{\beta_{i+1,j}})^2}{2\sqrt{\beta_{i+1,j}}} \right] \triangleq \bar{\bar{M}} \quad (9)$$

式中, $\bar{M}, \bar{\bar{M}} > 0$ 。

此外, 当 $\alpha_{i,j} \rightarrow 0$ 时, 式(1)定义的 $\bar{P}_{i,j}^*(x)$ 是满足条件 $f(x_{i+1}, y_j) = f_{i+1,j}$, $f_x(x_{i+1}, y_j) = e_{i+1,j}$ 的插值函数; 当 $\alpha_{i,j} \rightarrow \infty$ 时, 式(1)定义的 $\bar{P}_{i,j}^*(x)$ 是满足条件 $f(x_i, y_j) = f_{i,j}$, $f_x(x_i, y_j) = e_{i,j}$ 的插值函数。此时, $\bar{P}_{i,j}(x, y)$ 是 $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ 上的一个二元插值函数。同理, 当 $\beta_{i,j} \rightarrow 0$ 时, 式(4)定义的 $\bar{P}_{i,j}(x, y)$ 也是一个二元插值函数。

特别地, 当 $\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1} \rightarrow 0$ 且 $\beta_{i,j}, \beta_{i+1,j} \rightarrow 0$ 时, $P_{i,j}(x, y)$ 的基函数为

$$\begin{aligned} a_{i,j}(\theta, \eta) &= 0 \\ a_{i,j+1}(\theta, \eta) &= (1-\lambda)(1-\theta)^2(1+2\theta) \\ a_{i+1,j}(\theta, \eta) &= \lambda(1-\eta)^2(1+2\eta) \\ a_{i+1,j+1}(\theta, \eta) &= \lambda\eta^2(3-2\eta) + (1-\lambda)\theta^2(3-2\theta) \\ b_{i,j}(\theta, \eta) &= (1-\lambda)\theta(1-\theta)^2 \\ b_{i,j+1}(\theta, \eta) &= 0 \\ b_{i+1,j}(\theta, \eta) &= -\lambda(1-\eta)^2(1+2\eta)(1-\theta) - \\ &\quad (1-\lambda)\theta^2(1-\theta) \\ b_{i+1,j+1}(\theta, \eta) &= -\lambda\eta^2(3-2\eta)(1-\theta) \\ c_{i,j}(\theta, \eta) &= \lambda\eta(1-\eta)^2 \\ c_{i,j+1}(\theta, \eta) &= -\lambda\eta^2(1-\eta) - \\ &\quad (1-\lambda)(1-\theta)^2(1+2\theta)(1-\eta) \\ c_{i+1,j}(\theta, \eta) &= 0 \\ c_{i+1,j+1}(\theta, \eta) &= -(1-\lambda)\theta^2(3-2\theta)(1-\eta) \end{aligned}$$



同理, $\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1} \rightarrow \infty$ 且 $\beta_{i,j}, \beta_{i+1,j} \rightarrow \infty$ 时, $P_{i,j}(x, y)$ 的基函数为

$$\begin{aligned} a_{i,j}(\theta, \eta) &= \lambda(1-\eta)^2(1+2\eta) + \\ &\quad (1-\lambda)(1-\theta)^2(1+2\theta) \\ a_{i,j+1}(\theta, \eta) &= \lambda\eta^2(3-2\eta) \\ a_{i+1,j}(\theta, \eta) &= (1-\lambda)\theta^2(3-2\theta) \\ a_{i+1,j+1}(\theta, \eta) &= 0 \\ b_{i,j}(\theta, \eta) &= \lambda(1-\eta)^2(1+2\eta)\theta + \\ &\quad (1-\lambda)\theta(1-\theta)^2 \\ b_{i,j+1}(\theta, \eta) &= \lambda\eta^2(3-2\eta)\theta \\ b_{i+1,j}(\theta, \eta) &= -(1-\lambda)\theta^2(1-\theta) \\ b_{i+1,j+1}(\theta, \eta) &= 0 \\ c_{i,j}(\theta, \eta) &= (1-\lambda)(1-\theta)^2(1+2\theta)\eta + \\ &\quad \lambda\eta(1-\eta)^2, c_{i,j+1}(\theta, \eta) = -\lambda\eta^2(1-\eta) \\ c_{i+1,j}(\theta, \eta) &= (1-\lambda)\theta^2(3-2\theta)\eta \\ c_{i+1,j+1}(\theta, \eta) &= 0 \end{aligned}$$

给定平面区域 $\Omega: [0, 1; 0, 1]$, 插值数据如表 1 所示, 取 $\lambda = 0.5$ 。

当 $\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1} \rightarrow 0$ 且 $\beta_{i,j}, \beta_{i+1,j} \rightarrow 0$ 时, 加权有理插值样条的极限曲面见图 3(a); $\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1} \rightarrow \infty$ 且 $\beta_{i,j}, \beta_{i+1,j} \rightarrow \infty$ 时, 加权有理插值样条的极限曲面见图 3(b)。

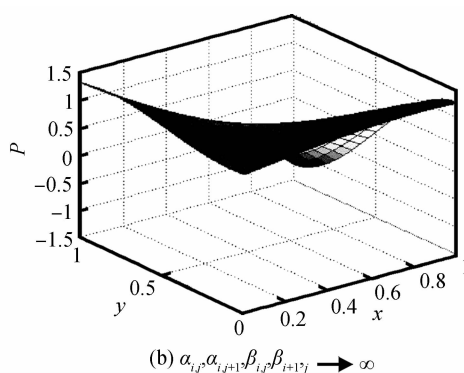


图3 有理插值样条的极限曲面

Fig. 3 The limit surfaces of the rational interpolation spline ((a) $\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1}, \beta_{i,j}, \beta_{i+1,j} \rightarrow 0$; (b) $\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1}, \beta_{i,j}, \beta_{i+1,j} \rightarrow \infty$)

3 积分性质

由式(7)~(9)可知, 加权有理插值函数 $P_{i,j}(x, y)$ 具有如下积分性质:

性质 1 设 $f(x, y) \equiv 1, (x, y) \in D, P_{i,j}(x, y)$

是定义在 $D = [x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ 上的加权有理插值函数。则对任意 $\lambda \in [0, 1], P_{i,j}(x, y)$ 的积分保持一致性, 即

$$\iint_D P_{i,j}(x, y) dx dy = h_i l_j$$

此外, 对一般的 $f(x, y)$, 由式(6)易知

$$\iint_D P_{i,j}(x,y) dx dy =$$

$$h_i l_j \sum_{r=i}^{i+1} \sum_{s=j}^{j+1} (a_{r,s}^* f_{r,s} + b_{r,s}^* h_i e_{r,s} + c_{r,s}^* l_j d_{r,s})$$

式中

$$a_{r,s}^* = \iint_{[0,1;0,1]} a_{r,s}(\theta,\eta) d\theta d\eta$$

$$b_{r,s}^* = \iint_{[0,1;0,1]} b_{r,s}(\theta,\eta) d\theta d\eta$$

$$c_{r,s}^* = \iint_{[0,1;0,1]} c_{r,s}(\theta,\eta) d\theta d\eta$$

($r = i, i+1, s = j, j+1$) 称为 $P_{i,j}(x,y)$ 的积分加权系数,且它们的符合具有类似表 2 的结论。类似式(7)–(9),代入易证如下性质:

性质 2 $P_{i,j}(x,y)$ 是定义在 $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ 上的加权有理插值函数,对任意 $\lambda \in [0,1]$,存在正实数 $\bar{M}, \bar{\bar{M}}$,使 $P_{i,j}(x,y)$ 的积分加权系数满足

$$\sum_{r=i}^{i+1} \sum_{s=j}^{j+1} a_{r,s}^* = 1$$

$$\sum_{r=i}^{i+1} \sum_{s=j}^{j+1} |b_{r,s}^*| \leq \bar{M}$$

$$\sum_{r=i}^{i+1} \sum_{s=j}^{j+1} |c_{r,s}^*| \leq \bar{\bar{M}}$$

特别地,当 $\lambda = 1$ 时, $P_{i,j}(x,y) = \bar{P}_{i,j}(x,y)$, $\lambda = 0$ 时, $P_{i,j}(x,y) = \bar{\bar{P}}_{i,j}(x,y)$,相应的积分加权系数也具有类似性质 2 的结论,此处不再赘述。

4 有界性

由于式(5)定义的双变量加权有理插值是在每个矩形区域内的局部插值,插值函数取决于被插函数的函数值和偏导数。在每个含有参数的插值区域,参数的取值不同插值曲面会产生相应的变化。因此,我们需要考虑插值曲面变化的范围,即插值函数的有界性。

记 $M_1 = \max_{r,s} \{ |f_{r,s}| \}, M_2 = \max_{r,s} \{ |h_i e_{r,s}| \}, M_3 = \max_{r,s} \{ |l_j d_{r,s}| \}$, 其中 $r = i, i+1; s = j, j+1$ 。由式(7)–(9)得

$$|P_{i,j}(x,y)| =$$

$$\left| \sum_{r=i}^{i+1} \sum_{s=j}^{j+1} (a_{r,s} f_{r,s} + b_{r,s} h_i e_{r,s} + c_{r,s} l_j d_{r,s}) \right| \leq$$

$$\sum_{r=i}^{i+1} \sum_{s=j}^{j+1} (|a_{r,s}| |f_{r,s}| + |b_{r,s}| |h_i| |e_{r,s}| + |c_{r,s}| |l_j| |d_{r,s}|) \leq$$

$$M_1 + \bar{M} M_2 + \bar{\bar{M}} M_3$$

从而得到以下结论:

定理 1 给定插值数据 $\{(f_{r,s}, e_{r,s}, d_{r,s}), r = i, i+1; s = j, j+1\}$, $P_{i,j}(x,y)$ 为式(5)定义在矩形域 $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ 上的双变量加权有理插值函数,则

$$|P_{i,j}(x,y)| \leq M_1 + \bar{M} M_2 + \bar{\bar{M}} M_3$$

5 局部约束控制

对于一组给定的插值数据,插值曲面的形状通常是固定的。本文定义的加权有理插值函数,由于带有形状参数和加权系数,插值曲面可以在插值数据给定的前提下灵活调节插值曲面的形状。

对于插值区域 $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ 内任意点 (x, y) ,不失一般性,取 $(\theta, \eta) = (0.5, 0.5)$,插值曲面的局部点控制问题,即选取形状参数和加权系数,使有理插值样条曲面 $P_{i,j}(x,y)$ 在中点 $(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}, \frac{y_{i+1} - y_i}{2})$ 处的函数值等于给定的实数 M ,即

$$\sum_{r=i}^{i+1} \sum_{s=j}^{j+1} (a_{r,s} f_{r,s} + b_{r,s} h_i e_{r,s} + c_{r,s} l_j d_{r,s}) = M \quad (10)$$

式中, $|M| \leq M_1 + \bar{M} M_2 + \bar{\bar{M}} M_3$,该局部点控制问题称为中央点函数值控制问题。

式(10)含有 5 个未知量 $\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1}, \beta_{i,j}, \beta_{i+1,j}$ 及 λ ,为了便于确定各参数的值,可令 $\lambda = 0.5, \alpha_{i,j} = \alpha_{i,j+1} = \alpha_i, \beta_{i,j} = \beta_{i+1,j} = \beta_j$,则式(10)可化简为

$$k_1 \alpha_i + k_2 \beta_j + k_3 \alpha_i \beta_j + k_4 = 0 \quad (11)$$

式中

$$k_1 = 4(f_{i,j} + 2f_{i,j+1} + f_{i+1,j+1}) +$$

$$h_i(3e_{i,j} + 2e_{i,j+1} - e_{i+1,j}) +$$

$$l_j(d_{i,j} - 3d_{i,j+1} - 2d_{i+1,j+1}) - 16M$$

$$k_2 = 4(f_{i,j} + 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}) +$$

$$h_i(e_{i,j} - 3e_{i+1,j} - 2e_{i+1,j+1}) +$$

$$l_j(3d_{i,j} - d_{i,j+1} + 2d_{i+1,j}) - 16M$$

$$k_3 = 4(2f_{i,j} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j}) +$$

$$h_i(3e_{i,j} + 2e_{i,j+1} - e_{i+1,j}) +$$

$$l_j(3d_{i,j} - d_{i,j+1} + 2d_{i+1,j}) - 16M$$

$$k_4 = 4(f_{i,j+1} + f_{i+1,j} + 2f_{i+1,j+1}) +$$

$$h_i(e_{i,j} - 3e_{i+1,j} - 2e_{i+1,j+1}) +$$

$$l_j(d_{i,j} - 3d_{i,j+1} - 2d_{i+1,j+1}) - 16M$$

称式(11)为中央点函数值控制方程。如果存在 α_i , $\beta_j > 0$ 使式(11)成立, 则加权有理插值样条函数 $P_{i,j}(x,y)$ 的中央点控制问题有解。

定理2 $P_{i,j}(x,y)$ 的中央点控制问题有解的充分条件是序列 $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ 变号数的值不为零。

6 误差估计

定理3 设 $f(x,y) \in C^1$, 对任意的正参数 $\alpha_{i,j}$, $\alpha_{i,j+1}, \beta_{i,j}, \beta_{i+1,j}$, 式(5)定义的加权有理插值样条函数对任意 $(x,y) \in [x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$, 满足

$$|f(x,y) - P_{i,j}(x,y)| \leq \frac{2N_1 + (1 + \bar{M})N_2 + (1 + \bar{\bar{M}})N_3}{2N_1 + (1 + \bar{M})N_2 + (1 + \bar{\bar{M}})N_3}$$

式中

$$\begin{aligned} N_1 &= \max \{ |f(x,y)| \} \\ N_2 &= \max \{ h_i |f'_x(x,y)| \} \\ N_3 &= \max \{ l_j |f'_y(x,y)| \} \end{aligned}$$

证明 由 Taylor 展开可知

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_r, y_s) + (x - x_r) \frac{\partial}{\partial x} f(\xi_1, \xi_2) + \\ &\quad (y - y_s) \frac{\partial}{\partial y} f(\xi_1, \xi_2) \end{aligned}$$

式中, $\xi_1 \in [x_i, x_{i+1}]$, $\xi_2 \in [y_j, y_{j+1}]$, $r = i, i+1, s = j, j+1$, 从而

$$|f(x,y) - f(x_r, y_s)| \leq N_2 + N_3$$

则由定理1得

$$\begin{aligned} |f(x,y) - P_{i,j}(x,y)| &\leq |f(x,y) - f(x_r, y_s)| + \\ &\quad |f(x_r, y_s) - P_{i,j}(x,y)| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (N_2 + N_3) + N_1 + (N_1 + \bar{M}N_2 + \bar{\bar{M}}N_3) = \\ 2N_1 + (1 + \bar{M})N_2 + (1 + \bar{\bar{M}})N_3 \end{aligned}$$

即证。

7 数值实验

例1 (局部约束控制)利用中央点函数值控制方程式(11), 可以通过修改参数 α_i, β_j 的值控制中央点函数值。给定平面区域 $\Omega: [0, 1; 0, 1]$, 插值数据如表1所示, 基于正参数 α_i, β_j 和加权系数 $\lambda \in [0, 1]$ 重构插值函数 $P_{i,j}(x,y)$ 。取 $\lambda = 0.5$, 由中央点函数值控制方程式(11), 可以实现加权有理插值样条的局部约束控制。图4(a)表示 $\alpha_i = \beta_j = 1.0$ 时的插值曲面, 中央点函数值为 $M = 1.534$ 。

为了使曲面在中央点处的形状“局部上升”, 取 $M = 1.7$, 令 $\alpha_i = 0.1$, 解得 $\beta_j = 19.151$, 图4(b)表示此时的插值曲面。为了使曲面在中央点处的形状“局部下降”, 取 $M = 1.0$, 令 $\alpha_i = 10$, 解得 $\beta_j = 1.826$, 图4(c)表示此时的插值曲面。

例2 (误差估计)设被插函数为

$$f(x,y) = \sqrt{1 - (1-x)^2 - (1-y)^2}$$

式中, $x \in [0.5, 1.5; 0.5, 1.5]$ 。取 $x_i = 0.5 + 0.2(i-1)$, $y_j = 0.5 + 0.2(j-1)$, $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 。即 $h_i = l_j = 0.2$ 。令 $\lambda = 0.5$, 且

$$\alpha_{i,j} = \beta_{i,j} = 0.5 + 0.5(i-1) + 0.5(j-1)$$

则插值曲面 $P_{i,j}(x,y)$ 与被插值曲面 $f(x,y)$ 的误差如图5所示。

选择不同的权系数和参数值, 可以得到理想的设计效果, 表3所示为不同的权系数和参数生成插值曲面的误差。 $\alpha_{i,j} = \alpha_{i+1,j} = \alpha, \beta_{i,j} = \beta_{i,j+1} = \beta$ 。

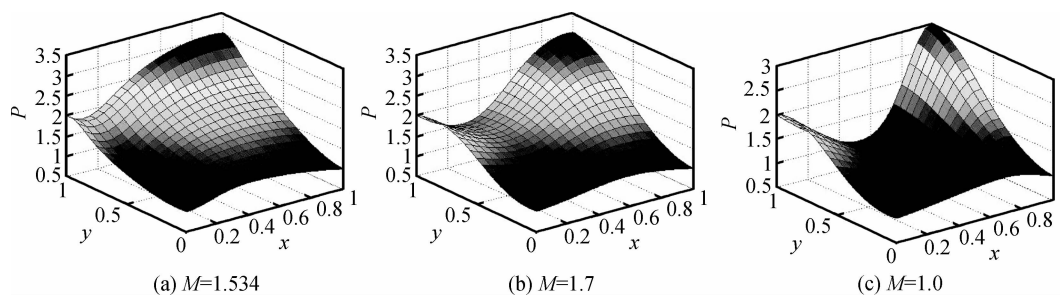


图4 加权有理插值样条曲面的局部约束控制

Fig.4 Local constraint control of the weighted rational interpolation spline surfaces

((a) $M = 1.534$; (b) $M = 1.7$; (c) $M = 1.0$)

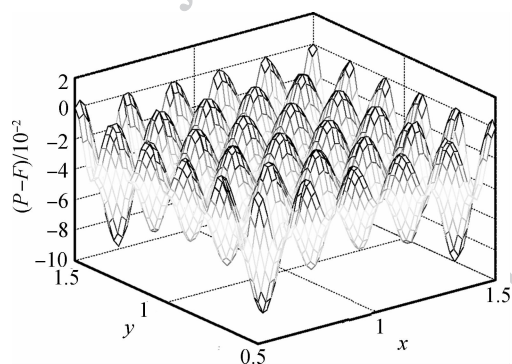


图5 插值样条曲面的误差

Fig. 5 The error of interpolating spline surface

表3 不同权系数和参数对应的逼近误差

Table 3 Approximation error with different weight and parameters

λ	α	β	误差/ 10^{-2}
0.45	1	1	0.9
0.45	2	0.462	1.0
0.45	10	18.308	1.3
0.25	1	1	8.5
0.25	10	0.004	1.8
0.25	1	0.058	1.2

8 结 论

本文构造了一种新的基于函数值和偏导数的加权有理插值样条曲面。该样条曲面具有简单对称的基函数,不仅带有形状参数,还带有权系数。对任意的参数及权系数,生成的插值样条曲面满足 C^1 连续。进一步讨论了该插值样条函数的积分性质、边界性质、误差逼近性质与局部区域控制性质。数值实例说明,对于给定的插值数据,通过对参数 $\alpha_{i,s}$ 、 $\beta_{r,j}$ 以及权系数 λ 的修改,可以灵活调控加权有理插值样条曲面的形状以满足设计需要。文中构造的加权插值样条可以插值任意数据点模型,并且理论上是可以实现空间模型的任意处修改。基于本文的研究,后面可以进一步研究不同类型有理样条的融合与形状设计。

参考文献 (References)

- [1] Yan L L, Han X L. Improvement of the modifiable Bézier curves [J]. Journal of Image and Graphics, 2014, 19(9): 1368-

1376. [严兰兰, 韩旭里. 对可调控 Bézier 曲线的改进[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(9): 1368-1376.] [DOI: 10.11834/jig.20140914]

- [2] Liu A K, Duan Q, Du S T, et al. Region controlling of the interpolating curve by weighted rational interpolation[J]. Journal of Computer Aided Design and Computer Graphics, 2000, 12(7): 497-501. [刘爱奎, 段奇, 杜世田, 等. 插值曲线区域控制的加权有理插值方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12(7): 497-501.] [DOI: 10.3321/j.issn:1003-9775.2000.07.005]
- [3] Yan W Q, Ding W, Qi D X. Rational many-knot spline interpolating curves and surfaces[J]. Journal of Image and Graphics Series A, 2001, 6(6): 568-572. [闫伟奇, 丁玮, 齐东旭. 有理多结点样条插值曲线及曲面[J]. 中国图象图形学报 A 辑, 2001, 6(6): 568-572.] [DOI: 10.3969/j.issn.1006-8961.2001.06.011]
- [4] Sun Q H, Bao F X, Zhang Y F, et al. A bivariate rational interpolation based on scattered data on parallel lines[J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2013, 24(1): 75-80. [DOI: 10.1016/j.jvcir.2012.11.003]
- [5] Dejdumrong N. A new bivariate basis representation for Bézier-based triangular patches with quadratic complexity[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 61(8): 2292-2295. [DOI: 10.1016/j.camwa.2010.09.051]
- [6] Kouibia A, Pasadas M. Variational bivariate interpolating splines with positivity constraints[J]. Applied Numerical Mathematics, 2003, 44(4): 507-526. [DOI: 10.1016/S0168-9274(02)00174-5]
- [7] Dagnino C, Lamberti P. On the approximation power of bivariate quadratic C^1 splines[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2001, 131(1-2): 321-332. [DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00265-X]
- [8] Duan Q, Wang L, Twizell E H. A new bivariate rational interpolation based on function values[J]. Information Sciences, 2004, 166(1-4): 181-191. [DOI: 10.1016/j.ins.2003.12.001]
- [9] Duan Q, Zhang H L, Liu A K et al. A bivariate rational interpolation with a bi-quadratic denominator[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 195(1-2): 24-33. [DOI: 10.1016/j.cam.2005.07.015]
- [10] Duan Q, Zhang Y F, Twizell E H. A bivariate rational interpolation and the properties[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 179(1): 190-199. [DOI: 10.1016/j.amc.2005.11.094]
- [11] Deng S Q, Fang K, Xie J. A new bivariate rational interpolation based on function values and the properties[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2008, 31(4): 758-768. [邓四清, 方遼, 谢进. 一种新的基于函数值的二元有理插值及其性质[J]. 应用数学学报, 2008, 31(4): 758-768.] [DOI: 10.3321/j.issn:0254-3079.2008.04.023]

- [12] Deng S Q, Fang K, Xie J, et al. A bivariate rational interpolation based on function values and the properties[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2009, 31(1): 77-86. [邓四清, 方遼, 谢进, 等. 一种基于函数值的二元有理插值函数及其性质[J]. *计算数学*, 2009, 31(1): 77-86.] [DOI: 10.3321/j.issn:0254-7791.2009.01.006]
- [13] Deng S Q, Fang K, Xie J, et al. Bounded property and point control of a new bivariate rational bicubic interpolating spline with parameters[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2010, 32(4): 337-348. [邓四清, 方遼, 谢进, 等. 一种新的带参数双三次有理插值样条的有界性与点控制[J]. *计算数学*, 2010, 32(4): 337-348.]
- [14] Xiang M L, Tang Y H. Convexity of a bivariate rational interpolating spline function[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2012, 24(9): 1171-1179. [项梅灵, 唐月红. 一种二元有理插值样条函数的凸性[J]. *计算机辅助设计与图形学*, 2012, 24(9): 1171-1179.] [DOI: 10.3969/j.issn.1003-9775.2012.09.009]
- [15] Huang W X, Wang G J. A weighted bivariate blending rational interpolation based on function values[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 217(9): 4644-4653. [DOI: 10.1016/j.amc.2010.11.016]
- [16] Zhang Y F, Bao F X, Zhang C M, et al. A rational interpolation surface model and visualization constraint[J]. *Scientia Sinica Mathematica*, 2014, 44(7): 729-740. [张云峰, 包芳勋, 张彩明, 等. 一类有理插值曲面模型及其可视化约束控制[J]. *中国科学: 数学*, 2014, 44(7): 729-740.] [DOI: 10.1360/N012013-00135]