

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2023)02-0556-14

论文引用格式: Liu Y, Shou H H and Ji K S. 2023. Circle average nonlinear subdivision curve design with normal constraints. Journal of Image and Graphics, 28(02): 0556-0569 (刘艳, 寿华好, 季康松. 2023. 带法向约束的圆平均非线性细分曲线设计. 中国图象图形学报, 28(02): 0556-0569)
[DOI:10.11834/jig.211072]

带法向约束的圆平均非线性细分曲线设计

刘艳, 寿华好*, 季康松

浙江工业大学理学院, 杭州 310023

摘要: **目的** 对采样设备获取的测量数据进行拟合, 可实现原模型的重建及功能恢复。但有些情况下, 获取的数据点不仅包含位置信息, 还包含法向量信息。针对这一问题, 本文提出了基于圆平均的双参数 4 点 binary 非线性细分法与单参数 3 点 ternary 插值非线性细分法。**方法** 首先将线性细分法改写为点的重复 binary 线性平均, 然后用圆平均代替相应的线性平均, 最后用加权测地线平均计算的法向量作为新插入顶点的法向量。基于圆平均的双参数 4 点 binary 细分法的每一次细分过程可分为偏移步与张力步。基于圆平均的单参数 3 点 ternary 细分法的每一次细分过程可分为左插步、插值步与右插步。**结果** 对于本文方法的收敛性与 C^1 连续性条件给出了理论证明; 数值实验表明, 与相应的线性细分相比, 本文方法生成的曲线更光滑且具有圆的再生力, 可以较好地实现 3 个封闭曲线重建。**结论** 本文方法可以在带法向量的初始控制顶点较少的情况下, 较好地实现带法向约束的离散点集的曲线重建问题。

关键词: 非线性细分法; 圆平均; 加权测地线平均; 点—法向量对; 法向约束

Circle average nonlinear subdivision curve design with normal constraints

Liu Yan, Shou Huahao*, Ji Kangsong

College of Science, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China

Abstract: **Objective** The subdivision technique has been developing in relevant to the design of efficient, hierarchical, local, and adaptive algorithms for modeling, plotting, and manipulating arbitrary topology-related free-shaped objects beyond the non-uniform rational B-splines (NURBS). The initial subdivision step is oriented at a control polygon or mesh. First, novel vertices can be involved in and the existed vertices can be optimized. Next, a new control polygon or control mesh can be obtained. Finally, the target curves of surfaces can be replicated to produce. Subdivision schemes can be segmented into two categories: 1) linear-based and 2) nonlinear-based because the issue of new points can change the linear combinations of old points in the iterative process. Generally speaking, linear subdivision schemes are easier to be implemented, but there are inflection points plotting on the limit curves and it is challenged to represent precise circle, while nonlinear subdivision schemes can eliminate inflection points and reproduce a circle accurately. The smooth curve-fit point clouds problem is concerned more in the context of computer-aided geometric design (CAGD) and computer graphics (CG). Measurement data can be obtained on real objects via such techniques like laser scanning, structure light source

收稿日期: 2021-12-06; 修回日期: 2022-02-14; 预印本日期: 2022-02-21

* 通信作者: 寿华好 shh@zjut.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61572430)

Supported by: National Natural Science Foundation of China (61572430)

converter, and X-ray tomography. To perform a commonly-used model reconstruction and functional recovery for the original model or product, these discrete data points are scanned and used for data fitting. But, data points are often linked to position information and normal vector information like optical reflector design. To resolve this problem, we develop two schemes of nonlinear subdivision in related to a parameters-dual 4-point binary and a parameter-solo 3-point ternary interpolation in terms of circle average. **Method** First, a two points and its normal vector-related binary nonlinear circle average is introduced. This task is targeted on circle average because the new point is on the circle-constructed derived from the original two points and corresponding normal vectors. Next, linear subdivision method is rewritten into a replicated binary average of points. In order to optimize linear subdivision schemes, linear average is replaced by the circle average. Third, the weighted geodesic average is used to calculate the newly vertex-inserted normal vector. The two kinds of circle average-based nonlinear subdivision schemes are obtained through melting the operations mentioned above into linear parameters-dual 4-point binary subdivision and parameter-solo 3-point ternary interpolation subdivision. For circle average-related two-parameter four-point binary subdivision scheme, each subdivision process is composed of two steps of displacement and tension both. For circle average-based single-parameter three-point ternary subdivision method, each subdivision step is reconstructed by left interpolation, interpolation, and right interpolation. In addition, the feasibility of these methods is tested theoretically and numerically. Some theorems of convergence and consistency of two proposed methods are illustrated because normal vectors-proved have factor-contracted, and the data points have factor-contracted and backup-displaced in the subdivision process. **Result** These methods are implemented in terms of MATLAB overall. The issue of parameters is studied on the two proposed subdivision schemes. First, for the circle average-based two-parameter 4-point binary subdivision scheme, the smaller of the tension parameter is, the limit curve is closer to the initial control polygon. The smaller of the displacement parameter is the limit curve is near to the initial control vertex. When the parameter-displaced is zero, the subdivision method is transferred to interpolation subdivision. For the circle average-based solo-parameter 3-point ternary subdivision method, the circle average is first to be applied to the linear ternary interpolation subdivision, which makes the vertices-controlling more fast. Then, for the same initial control vertices, the normal vector of one fixed control vertex is changed to produce different limit curves freely. Test results show that the selection of parameters and initial normal vectors can be used to control the shape of limit curves effectively. Finally, our nonlinear subdivision schemes proposed are compared to the corresponding linear subdivision schemes. When the initial control vertices are sampled from the circle, the corresponding normal vectors will be pointed between the center of the circle and the vertex. Test results show that our nonlinear subdivision schemes proposed can reconstruct the circle through the proposed nonlinear subdivision schemes and the corresponding linear subdivision schemes-reconstructed, but the corresponding linear subdivision schemes cannot be used to reconstruct the circle. Furthermore, three sorts of case studies for curve models are selected in comparison with curve reconstruction from multiple subdivision methods. The initial control vertices and their normal vectors are sampled based on curves-consistent, and they are subdivided for 8 times totally. Our nonlinear subdivision-schemed limit curve is much smoother, while the corresponding linear subdivision schemes have their sharp points. **Conclusion** Theoretically, it shows that our circle average-based two nonlinear subdivisions proposed are convergent and consistent with C^1 . Experimental results indicate that our nonlinear subdivision schemes can optimize linear subdivision-schemed modeling ability, and it has its circular regenerative potentials. Normal vectors-selected is beneficial to the shapes of limit curves to some extent.

Key words: nonlinear subdivision schemes; circle average; weighted geodesic average; point-normal pair; normal constraints

0 引言

在 CAGD (computer-aided geometric design) 和 CG (computer graphics) 中, 点云曲线曲面重建是一个广泛研究的问题。通过采样设备获取测量数据,

并对其进行数据拟合, 可以实现对原模型进行大致的重建及功能恢复。但有些情况下, 获取的数据点可能不只是简单的坐标信息, 可能包含一些几何约束(任浩杰等, 2022), 如在光学工程领域对带法向约束的数据点进行光学反射面设计。

与 NURBS (non-uniform rational B-splines) 相比,

细分允许设计高效的、分层的、局部的和自适应的算法,用于建模、绘制和操作任意拓扑的自由形状的对象。细分是不断插入新的顶点,更新旧的顶点,从而得到光滑曲线曲面。根据细分规则,细分曲线可分为线性细分与非线性细分。经典的线性细分曲线有 Chaikin 割角曲线 (Chaikin, 1974)、4 点插值细分法 (Dyn 等, 1987) 及其推广 (Hassan 等, 2002; 郑红婵等, 2004) 和单参数 3 点 ternary 插值细分 (郑红婵, 2003)。线性细分通常易于实现,细分规则较为简单,易分析其收敛性与光滑性,但是产生的极限曲线易有拐点,曲率变化大,并且很难重现圆。

为了克服线性细分法的缺陷,非线性细分法得到广泛关注。Ding 和 Hua (2000) 提出具有保凸性的非线性 4 点插值曲线。Yang (2006) 提出非线性基于法向量的曲线细分法, Dyn 和 Hormann (2012) 以及 Zhang 和 Zhang (2010) 在此基础上做了改进。Deng 和 Wang (2010) 提出一种基于双圆弧插值的中心细分法, Deng 和 Ma (2012, 2014) 对其进行了改进。Mao 等人 (2016) 利用三次 Bézier 曲线提出了基于法向量的快速曲线曲面插值细分方案。在此基础上, Lipovetsky (2022) 提出了基于 Bézier 平均的非线性细分法。Zhang 等人 (2020) 提出一种带张力参数的任意度非线性广义细分法。Bellaihou 和 Ikemakhen (2020) 提出一种在空间单位球上生成曲线的非线性几何细分法。Lipovetsky 和 Dyn (2016, 2019) 提出一种新的基于圆平均的 4 点非线性细分法和 L-R (Lane-Riesenfeld) 算法,并证明了它们的收敛性与连续性。李彩云等人 (2019) 提出基于圆平均的带参数 4 点插值细分与 3 点逼近细分。在此基础上,本文提出基于圆平均的双参数 4 点 binary 细分法与单参数 3 点 ternary 插值细分法。其中,基于圆平均的双参数 4 点 binary 细分法是基于圆平均的带参数 4 点插值细分的推广 (李彩云等, 2019), 增加了偏移参数 μ 。此外,本文首次提出将圆平均应用到 ternary 插值细分,这使得细分过程中控制顶点的增加速度更快。

本文针对有法向量的初始控制顶点,将线性细分法改写为点的重复 binary 平均,并用圆平均代替线性平均,用加权测地线平均 (Dyn 和 Sharon, 2017) 算出的法向量作为新插入顶点的法向量,从而得到两种基于圆平均的非线性细分法,并给出了收敛性与连续性的证明。数值例子表明,本文的 4 点细

分法比李彩云等人 (2019) 提出的 4 点细分更加灵活,与相应的线性细分相比,具有更强的曲线造型能力,同时具有圆的再生力;本文的 3 点 ternary 细分法在实现插值的同时,每一次细分获得的控制顶点是上一次控制顶点的 3 倍,这使得细分过程中控制顶点的增加速度更快,同时,也具有圆的再生力。

1 理论与方法

1.1 圆平均

圆平均是基于两点及其法向量的 binary 操作,由于新产生的点在原来两点及其法向量构造的圆弧 $\widehat{p_0 p_1}$ 上,所以称为圆平均。给定两个点—法向量对 $P_0 = (p_0, n_0)$ 和 $P_1 = (p_1, n_1)$, 权值 $\omega \in [0, 1]$, 其中单位法向量 n_0 与 n_1 的夹角为 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$), 则圆平均产生的新的点—法向量对为 $P_\omega = (p_\omega, n_\omega)$, 点 p_ω 在连接点 p_0 和 p_1 的短圆弧 $\widehat{p_0 p_1}$ 上,且 $\widehat{p_0 p_1}$ 对应的圆心角为 $\omega\theta$, 法向量 n_ω 是 n_0 与 n_1 的加权测地线平均。将 $P_\omega = (p_\omega, n_\omega)$ 的构造记为 $P_0 e_\omega P_1$; 当 $\omega = 1/2$ 时,记为 $P_0 e P_1$ 。 $\widehat{p_0 p_1}$ 的确定取决于 n_0 与 n_1 相对于直线 $p_0 p_1$ 是否位于不同的半平面。 $\widehat{p_0 p_1}$ 的选择标准和其他细节参考相应文献 (Lipovetsky 和 Dyn, 2019)。将圆平均的参数 ω 推广到区间 $[0, 1]$ 外依然成立 (李彩云等, 2019)。

1.2 加权测地线平均

在圆平均中构造的新点的法向量 n_ω 是 n_0 与 n_1 的加权测地线平均 (Dyn 和 Sharon, 2017)。对于单位法向量 $n_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ 与 $n_1 = (\cos \beta, \sin \beta)$ 的加权测地线平均定义为 $G(n_0, n_1; \omega) = (\cos \gamma, \sin \gamma)$, 其中, α, β, γ 是与直角坐标系横坐标轴的夹角且 $\gamma = (1 - \omega)\alpha + \omega\beta$ 。

本文的带法向约束的圆平均非线性细分法均是在点—法向量对上进行操作,且法向量是基于测地线平均的,独立于点的平均。证明本文细分法的收敛性即证明点和法向量的收敛性,主要依据下面的引理 1 (Dyn 和 Sharon, 2017) 与引理 2 (Lipovetsky 和 Dyn, 2016)。

引理 1 设 T 为适用于流形数据的测地线细分法。如果 T 有收缩因子,那么 T 是收敛的。

引理 2 细分法的加细顶点对于任意的控制顶

点收敛, 如果任何顶点序列满足:

1) $e^{k+1} \leq \eta e^k, \eta \in (0, 1)$, 其中, η 是收缩因子, $e^k = \max_i \{ |p_i^k p_{i+1}^k| \}$ (收缩性)。

2) $|p_{2i}^{k+1} - p_i^k| \leq c e^k$, 其中, $c > 0$ (位移安全性)。

2 基于圆平均的双参数4点 binary 细分法

2.1 本文的双参数4点 binary 细分法

给定初始控制顶点及其法向量对 $P_i^0 = (p_i, n_i)$, $i \in \mathbf{Z}$, 设 $P_i^k = (p_i^k, n_i^k)$ 为 k 次细分后的控制顶点及其法向量。线性双参数4点 binary 细分规则为

$$\begin{cases} p_{2i}^{k+1} = \mu p_{i-1}^k + (1 - 2\mu) p_i^k + \mu p_{i+1}^k \\ p_{2i+1}^{k+1} = -\omega p_{i-1}^k + \left(\frac{1}{2} + \omega\right) p_i^k + \left(\frac{1}{2} + \omega\right) p_{i+1}^k - \omega p_{i+2}^k \end{cases} \quad (1)$$

式中, ω 为张力参数, 刻画的是细分过程中第 $k+1$ 层的新点 p_{2i+1}^{k+1} 靠近 p_i^k 和 p_{i+1}^k 两点构成的边的程度; μ 为偏移参数, 刻画的是新点 p_{2i}^{k+1} 偏移第 k 层点 p_i^k 的程度。如图1所示, 实圆心点表示新产生的点, 其中, 向量 $e = \frac{1}{2}(p_i^k + p_{i+1}^k) - \frac{1}{2}(p_{i-1}^k + p_{i+2}^k)$, 向量 $t = \frac{1}{2}(p_{i-1}^k + p_{i+1}^k) - p_i^k$ 。显然, 4点插值细分法 (Dyn 等, 1987) 是该法 $\mu = 0$ 的一个特例。当 $|\omega| + |1/2 - \mu| + |\mu + \omega| < 1$ 时, 线性双参数4点 binary 细分法收敛 (郑红婵, 2003)。细分法可改写为

$$p_{2i}^{k+1} = \frac{1}{2}(2\mu p_{i-1}^k + (1 - 2\mu) p_i^k) + \frac{1}{2}(2\mu p_{i+1}^k + (1 - 2\mu) p_i^k) \quad (2)$$

$$p_{2i+1}^{k+1} = \frac{1}{2}((1 + 2\omega) p_i^k - 2\omega p_{i+1}^k) + \frac{1}{2}((1 + 2\omega) p_{i+1}^k - 2\omega p_{i+2}^k) \quad (3)$$

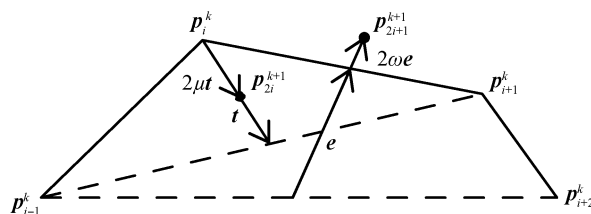


图1 线性双参数4点 binary 细分法的细分过程

Fig. 1 The subdivision process of linear two-parameter 4-point binary subdivision scheme

可以看出, 线性双参数4点 binary 细分法每一次细分由偏移步与张力步两步骤组成。用圆平均代替式(2)和式(3)的线性平均, 可以得到基于圆平均的双参数4点 binary 细分法。与线性双参数 binary 细分法类似, 本文的双参数4点 binary 细分法每一次细分也是由偏移步与张力步两步骤组成, 如图2所示。本法 $\mu = 0$ 时的细分法是李彩云等人 (2019) 提出的基于圆平均4点插值细分法的一个特例。

算法1 基于圆平均的双参数4点 binary 细分法。

输入: 初始控制点及其法向量 $P_i = (p_i, p_i)$, $i \in \mathbf{Z}$ 。

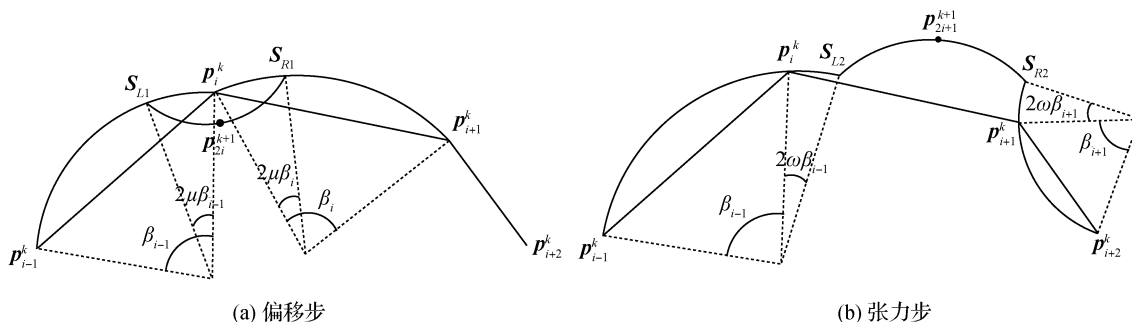


图2 本文的双参数4点 binary 细分法的细分过程

Fig. 2 The subdivision process of the two-parameter 4-point binary subdivision scheme proposed in this paper

((a) displacement step; (b) tension step)

输出: 迭代 m 次的顶点及其法向量对 $\mathbf{P}_i^m = (\mathbf{p}_i^m, \mathbf{n}_i^m), i \in \mathbf{Z}$ 。

1) 对 $\forall i \in \mathbf{Z}$, 有 $\mathbf{P}_i^0 \leftarrow \mathbf{P}_i$;

2) 对于 $k = 0, 1, 2, \dots, m$;

执行 $\forall i \in \mathbf{Z}$;

$$\left. \begin{aligned} S_{L1} &\leftarrow \mathbf{P}_i^k e_{2\mu} \mathbf{P}_{i-1}^k; \\ S_{R1} &\leftarrow \mathbf{P}_i^k e_{2\mu} \mathbf{P}_{i+1}^k; \\ \mathbf{P}_{2i}^{k+1} &\leftarrow S_{L1} e S_{R1}; \end{aligned} \right\} \text{偏移步}$$

$$\left. \begin{aligned} S_{L2} &\leftarrow \mathbf{P}_i^k e_{-2\omega} \mathbf{P}_{i-1}^k; \\ S_{R2} &\leftarrow \mathbf{P}_{i+1}^k e_{-2\omega} \mathbf{P}_{i+2}^k; \\ \mathbf{P}_{2i+1}^{k+1} &\leftarrow S_{L2} e S_{R2}. \end{aligned} \right\} \text{张力步}$$

2.2 收敛性

引理3(法向量收敛性) 当参数满足 $0 < \omega < \frac{3}{32}, 0 < \mu < \frac{1}{32}$ 时, 通过测地线平均代替双参数4点 binary 细分法适用于流形数据是收敛的。

证明: 用 $\mathbf{M}$ 表示一个完备的黎曼流形数据, 用 $d(\cdot, \cdot)$ 表示与它相关的黎曼距离, 用 $G(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1; \omega)$ 表示单位法向量 $\mathbf{n}_0$ 与 $\mathbf{n}_1$ 的加权测地线平均, $\delta(n) = \sup_i d(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i+1}^k)$, $\sup$ 为求上确界。根据引理1, 只需证该细分法的法向量有收缩因子, 即证 $d(\mathbf{n}_{2i}^{k+1}, \mathbf{n}_{2i+1}^{k+1}) \leq \delta(n)$ 。

由三角不等式, 有

$$\begin{aligned} d(\mathbf{n}_{2i}^{k+1}, \mathbf{n}_{2i+1}^{k+1}) &\leq d(\mathbf{n}_{2i}^{k+1}, G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i-1}^k; 2\mu)) + \\ &\quad d(G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i-1}^k; 2\mu), \mathbf{n}_i^k) + \\ &\quad d(\mathbf{n}_i^k, G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i-1}^k; -2\omega)) + \\ &\quad d(G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i-1}^k; -2\omega), \mathbf{n}_{2i+1}^{k+1}) \end{aligned} \quad (4)$$

式中,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{n}_{2i}^{k+1}, G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i-1}^k; 2\mu)) &= \\ \frac{1}{2} d(G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i-1}^k; 2\mu), G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i+1}^k; 2\mu)) \end{aligned} \quad (5)$$

$$d(G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i-1}^k; 2\mu), \mathbf{n}_i^k) \leq 2\mu\delta(n) \quad (6)$$

$$d(\mathbf{n}_i^k, G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i-1}^k; -2\omega)) \leq 2\omega\delta(n) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} d(G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i-1}^k; -2\omega), \mathbf{n}_{2i+1}^{k+1}) &= \\ \frac{1}{2} d(G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i-1}^k; -2\omega), G(\mathbf{n}_{i+1}^k, \mathbf{n}_{i+2}^k; -2\omega)) \end{aligned} \quad (8)$$

对式(5)和式(8)再次应用三角不等式, 有

$$\begin{aligned} d(G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i-1}^k; 2\mu), G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i+1}^k; 2\mu)) &\leq \\ d(G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i-1}^k; 2\mu), \mathbf{n}_i^k) + d(\mathbf{n}_i^k, G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i+1}^k; 2\mu)) &\leq \\ 4\mu\delta(n) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} d(G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i-1}^k; -2\omega), G(\mathbf{n}_{i+1}^k, \mathbf{n}_{i+2}^k; -2\omega)) &\leq \\ d(G(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i-1}^k; -2\omega), \mathbf{n}_i^k) + d(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i+1}^k) + \\ d(\mathbf{n}_{i+1}^k, G(\mathbf{n}_{i+1}^k, \mathbf{n}_{i+2}^k; -2\omega)) &\leq (1 + 4\omega)\delta(n) \end{aligned} \quad (10)$$

由式(4)–(10), 有

$$d(\mathbf{n}_{2i}^{k+1}, \mathbf{n}_{2i+1}^{k+1}) \leq \left(4\mu + 4\omega + \frac{1}{2}\right)\delta(n)$$

由于参数 $0 < \omega < \frac{3}{32}, 0 < \mu < \frac{1}{32}$, 则 $4\mu + 3\omega + \frac{1}{2} < 1$, 即该细分法有收缩因子, 所以法向量收敛。证毕。

引理4(位移安全性) 当 k 足够大时, 参数满足 $0 < \omega < \frac{3}{32}, 0 < \mu < \frac{1}{32}$ 时, 本文的双参数4点 binary 细分法是位移安全的。

证明: 李彩云等人(2019)已给出用圆平均代替线性平均产生的点 $|\mathbf{p}_{2i+1}^{k+1} - \mathbf{p}_i^k|$ 的位移安全性的证明。只需证明 $|\mathbf{p}_{2i}^{k+1} - \mathbf{p}_i^k|$ 的位移安全性。

如图2(a)所示, 令 $\mathbf{S}_{L1} = (s_{L1}, \mathbf{n}_{L1})$, $\mathbf{S}_{R1} = (s_{R1}, \mathbf{n}_{R1})$, $\beta_i = \theta(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i+1}^k)$, $e^k = \max_i |\mathbf{p}_i^k \mathbf{p}_{i+1}^k|$, $\theta^k = \max_i \beta_i^k$ 。

由三角不等式, 得

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_{2i}^{k+1} - \mathbf{p}_i^k| &\leq |\mathbf{p}_{2i}^{k+1} s_{L1}| + |s_{L1} \mathbf{p}_i^k| \leq \\ \frac{|s_{L1} s_{R1}|}{2 \cos \frac{1}{4} \theta(\mathbf{n}_{L1}, \mathbf{n}_{R1})} + \frac{|\mathbf{p}_i^k \mathbf{p}_{i-1}^k| |\sin \mu \beta_{i-1}|}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\theta(\mathbf{n}_L^k, \mathbf{n}_R^k) \leq 4\mu\theta^k \quad (12)$$

事实上, $\theta(\mathbf{n}_L^k, \mathbf{n}_R^k) \leq \theta(\mathbf{n}_L^k, \mathbf{p}_i^k) + \theta(\mathbf{p}_i^k, \mathbf{n}_R^k)$, 这里, $\theta(\mathbf{n}_L^k, \mathbf{p}_i^k) = 2\mu\theta(\mathbf{n}_{i-1}^k, \mathbf{n}_i^k)$, $\theta(\mathbf{p}_i^k, \mathbf{n}_R^k) = 2\mu\theta(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i+1}^k)$ 。因此, 式(12)成立。

下面对 $|s_{L1} s_{R1}|$ 进行估计

$$|s_{L1} s_{R1}| \leq |s_{L1} \mathbf{p}_i^k| + |\mathbf{p}_i^k s_{R1}|$$

由于 $\mathbf{S}_{L1} \leftarrow \mathbf{P}_i^k e_{2\mu} \mathbf{P}_{i-1}^k$, $\mathbf{S}_{R1} \leftarrow \mathbf{P}_i^k e_{2\mu} \mathbf{P}_{i+1}^k$

$$|s_{L1} \mathbf{p}_i^k| \leq \frac{|\mathbf{p}_i^k \mathbf{p}_{i+1}^k| |\sin \mu \beta_{i-1}|}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}}$$

$$|\mathbf{p}_i^k s_{R1}| \leq \frac{|\mathbf{p}_i^k \mathbf{p}_{i+1}^k| |\sin \mu \beta_{i-1}|}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}}$$

因此

$$|s_{L1}s_{R1}| \leq \frac{2|p_i^k p_{i+1}^k| \sin \mu \beta_{i-1}}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}} \leq 2Ae^k \quad (13)$$

$$\text{式中, } A = \max_i \frac{\sin \mu \beta_{i-1}}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}}.$$

将式(13)代入式(11), 有

$$|P_{2i}^{k+1} - P_i^k| \leq \frac{Ae^k}{\cos \mu \theta^k} + \frac{|p_i^k p_{i-1}^k| \sin \mu \beta_{i-1}}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}} \leq$$

$$e^k A \left(\frac{1}{\cos \mu \theta^k} + 1 \right) \leq c^k e^k$$

$$\text{其中, } c^k = A \left(\frac{1}{\cos \mu \theta^k} + 1 \right).$$

可以得到 $c^* = \lim_{k \rightarrow \infty} c^k = 2\mu(1+1) = 4\mu$, 当 k 足够大时, $c^k < 1$. 因此, 本文 4 点 binary 细分法是位移安全的。证毕。

引理 5 (收缩性) 当 k 足够大时, 参数满足 $0 < \omega < \frac{3}{32}, 0 < \mu < \frac{1}{32}$ 时, 本文的双参数 4 点 binary 细分法是收缩的。

证明: 由三角不等式, 得

$$\begin{aligned} |p_{2i}^{k+1} p_{2i+1}^{k+1}| &\leq |p_{2i}^{k+1} s_{L1}| + |s_{L1} p_i^k| + |p_i^k s_{L2}| + \\ &|s_{L2} p_{2i+1}^{k+1}| \leq \frac{|s_{L1} s_{R1}|}{2 \cos \mu \theta^k} + \frac{|p_{i-1}^k p_i^k| \sin \mu \beta_{i-1}}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}} + \\ &\frac{|p_{i-1}^k p_i^k| \sin \omega \beta_{i-1}}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}} + \frac{|s_{L2} s_{R2}|}{2 \cos \frac{1}{4}(1+4\omega)\theta^k} \quad (14) \end{aligned}$$

式中,

$$|s_{L2} s_{R2}| \leq e^k (1+2B) \quad (\text{李彩云等, 2019}) \quad (15)$$

$$\text{式中, } B = \max_i \frac{\sin \omega \beta_{i-1}}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}}.$$

将式(13)和式(15)代入式(14), 得

$$\begin{aligned} |p_{2i}^{k+1} p_{2i+1}^{k+1}| &\leq \frac{Ae^k}{\cos \mu \theta^k} + Ae^k + \\ &Be^k + \frac{e^k(1+2B)}{2 \cos \frac{1}{4}(1+4\omega)\theta^k} \leq \eta^k e^k \end{aligned}$$

$$\text{其中, } \eta^k = \frac{A}{\cos \mu \theta^k} + A + B + \frac{1+2B}{2 \cos \frac{1}{4}(1+4\omega)\theta^k}.$$

由于 $\beta_i \leq \theta^k$ 以及法向量收敛, $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k = 0$, 可以

得到

$$\eta^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta^k = \left(2\mu + 2\mu + 2\omega + \frac{1+4\omega}{2} \right) = \frac{1}{2} + 4\mu + 4\omega \quad (16)$$

又因为 $0 < \omega < \frac{3}{32}, 0 < \mu < \frac{1}{32}$, 则 $\eta^* < 1$. 从极限的定义可以得到, 当 k 足够大时, $\eta^k < 1$. $\exists \eta \in (0, 1)$ 及 K , 当 $k > K$, $\eta^k < \eta < 1$. 因此, 当 $k > K$, 该细分法是收缩的。证毕。

定理 1 当参数满足 $0 < \omega < \frac{3}{32}, 0 < \mu < \frac{1}{32}$

时, 基于圆平均的双参数 4 点 binary 细分法是收敛的。

证明: 由引理 4 和引理 5 可以得到点的收敛性, 再由引理 3, 可以得到本文的基于圆平均的双参数 4 点 binary 细分法是收敛的。证毕。

2.3 连续性

定理 2 当参数满足 $0 < \omega < \frac{3}{32}, 0 < \mu < \frac{1}{32}$

时, 基于圆平均的双参数 4 点 binary 细分法是 C^1 连续的。

证明: 由李彩云等人(2019)方法知, 要证本文双参数 4 点 binary 细分法是 C^1 连续的, 需要证明当 k 足够大时, 本文双参数 4 点 binary 细分法 k 次细分产生的控制顶点 p^k 到线性双参数 4 点 binary 细分法 k 次细分产生的控制顶点 q^k 的最大距离要足够小。即证当 k 足够大时, $\delta^k(p) = \sup_i |p_i^k q_{i+1}^k|$ 足够小。

线性双参数 4 点 binary 细分法和本文双参数 4 点 binary 细分法的一次细分均可以看做由偏移步和张力度步组成。李彩云等人(2019)已证明当 k 足够大时, 本文双参数 4 点 binary 细分法张力度步中 $\delta^{k+1}(p) = \sup_i |p_{2i+1}^{k+1} q_{2i+1}^{k+1}|$ 可以足够小。因此, 只需证明当 k 足够大时, 偏移步中 $\delta^k(p) = \sup_i |p_{2i+1}^{k+1} q_{2i+1}^{k+1}|$ 足够小。

线性双参数 4 点 binary 细分法的一次细分偏移步可以看做由两个内插步和一个平均步组成, 如图 3 所示。记内插步骤产生 $q_i^{k,L}(\text{left})$ 和 $q_i^{k,R}(\text{right})$, 平均步产生 q_{2i}^{k+1} ; 基于圆平均的 4 点 binary 线性细分法产生 $p_i^{k,L}(\text{left})$ 和 $p_i^{k,R}(\text{right})$; 用 q_{2i}^{k+1} 表示线段 $[q_i^{k,L}, q_i^{k,R}]$ 的中点, c_{2i}^{k+1} 表示线段 $[p_i^{k,L}, p_i^{k,R}]$ 的中点。令 $\Delta_i^{k,L} = |p_i^{k,L} q_i^{k,L}|$, $\Delta_i^{k,R} =$

$$|p_i^{k,R} q_i^{k,R}| \circ$$

由三角不等式,得

$$|p_{2i}^{k+1} q_{2i}^{k+1}| \leq |p_{2i}^{k+1} c_i^{k+1}| + |c_i^{k+1} q_{2i}^{k+1}| \quad (17)$$

由 Lipovetsky 和 Dyn(2019) 中引理 3.2, 得

$$|c_i^{k+1} q_{2i}^{k+1}| \leq 2 \max \{ \Delta_i^{k,L}, \Delta_i^{k,R} \}$$

由 Zhang 等人(2020) 中引理 4, 得

$$|p_{2i}^{k+1} c_i^{k+1}| \leq \chi_{\frac{1}{2}} |p_i^{k,L} p_i^{k,R}| \theta(n_i^{k,L}, n_i^{k,R}) \quad (18)$$

$$\Delta_i^{k,L} \leq \chi_{2\mu} |p_{i-1}^k p_i^k| \theta(n_{i-1}^k, n_i^k) \quad (19)$$

将式(12)和式(16)代入式(18), 得

$$|p_{2i}^{k+1} c_i^{k+1}| \leq 8\mu A \chi_{\frac{1}{2}} e^k \theta^k \quad (20)$$

将式(19)和式(20)代入式(17), 有

$$|p_{2i}^{k+1} q_{2i}^{k+1}| \leq (8\mu A \chi_{\frac{1}{2}} + 2\chi_{2\mu}) \theta^k e^k$$

又由式(12)和式(16), 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\theta^{k+1}}{\theta^k} = 2\mu, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e^{k+1}}{e^k} = \frac{1}{2} + 4\mu + 4\omega$$

且 $0 < \omega < \frac{3}{32}, 0 < \mu < \frac{1}{32}$ 。因此, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\theta^k \rightarrow 0$ 的速度比 $e^k \rightarrow 0$ 快, 从而当 k 足够大时, 可以得到

$$\max_i |p_{2i}^{k+1} q_{2i}^{k+1}| \leq (8\mu A \chi_{\frac{1}{2}} + 2\chi_{2\mu}) (e^k)^2 \quad (21)$$

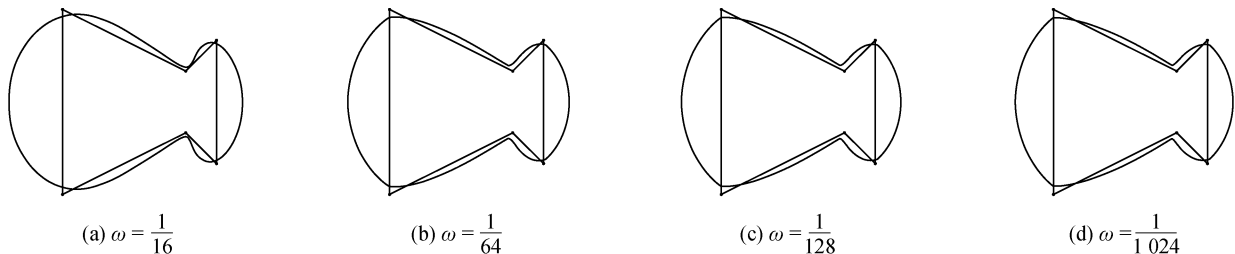


图4 不同张力参数下的基于圆平均的双参数4点 binary 细分法的极限曲线

Fig. 4 Limit curves of the two-parameter four-point binary subdivision method based on circle average under

different tension parameters ((a) $\omega = \frac{1}{16}$; (b) $\omega = \frac{1}{64}$; (c) $\omega = \frac{1}{128}$; (d) $\omega = \frac{1}{1024}$)

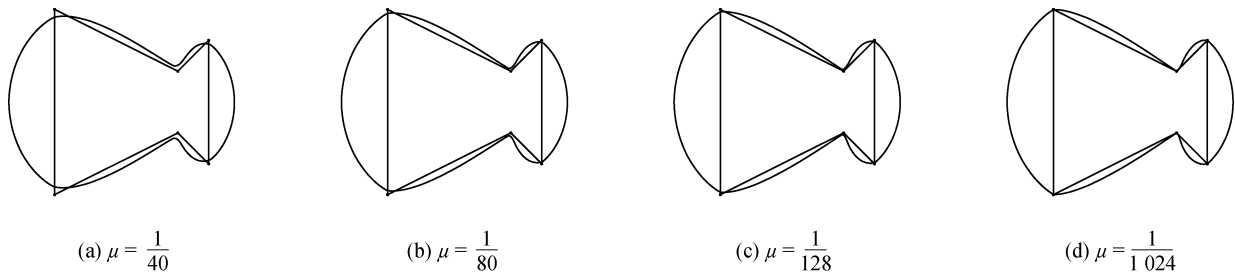


图5 不同偏移参数下的基于圆平均的双参数4点 binary 细分法的极限曲线

Fig. 5 Limit curves of the two-parameter four-point binary subdivision method based on circle average under

different displacement parameters ((a) $\mu = \frac{1}{40}$; (b) $\mu = \frac{1}{80}$; (c) $\mu = \frac{1}{128}$; (d) $\mu = \frac{1}{1024}$)

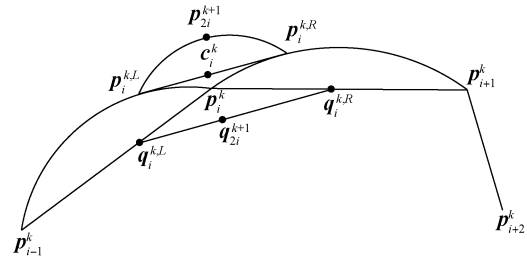


图3 本文的双参数4点 binary 细分法偏移步中新点与对应线性细分的新点之间的距离

Fig. 3 The distance between the new point generated by displacement step of the two-parameter four-point binary subdivision scheme proposed in this paper and the new point generated by corresponding linear subdivision scheme

由于当张力参数 ω 以及偏移参数 μ 满足 $\max \{4|\mu + 2\omega|, 4\omega + |1 - 4\mu - 4\omega|\} < 1$ 时, 线性双参数 binary 4 点细分 C^1 连续, 因此本文提出的细分法是 C^1 连续的。证毕。

2.4 数值图例

图4—图6 为基于圆平均的双参数4点 binary 细分法的数值图例。张力参数 ω 刻画的是新点靠近控制多边形的程度。 ω 越小, 生成的极限曲线

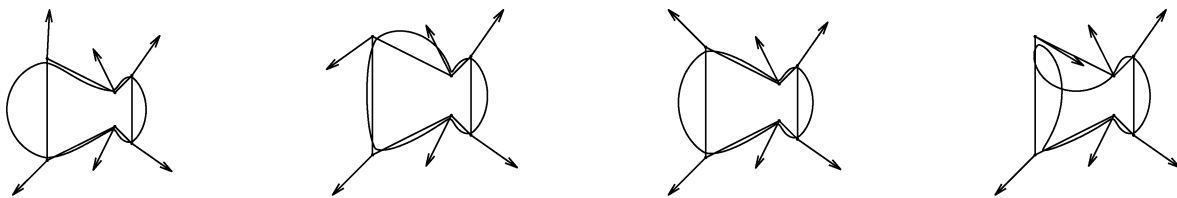


图 6 不同初始点法向量对基于圆平均的双参数 4 点 binary 细分法极限曲线的影响

Fig. 6 Influence of normal vector of initial point on the limit curve of two-parameter four-point binary subdivision scheme based on circle average

越接近初始控制多边形,如图 4 所示。偏移参数 μ 刻画的是细分过程中第 $k+1$ 层的新点偏移第 k 层控制点的程度。 μ 越小,生成的极限曲线越接近初始控制顶点,如图 5 所示。这也充分体现了李彩云等人(2019)的方法是本文基于圆平均的双参数 4 点 binary 细分法的特例,当位移参数 $\mu = 0$ 时,本文方法即为李彩云等人(2019)提出的基于圆平均 4 点插值细分法。由于该细分法在细分过程中新点的位置与法向量有关,所以初始控制顶点不同的法向量也会影响极限曲线,如图 6 所示,在初始控制顶点相同,改变其中一个控制顶点的法向量的情况下,在初始控制顶点的法向量与相邻 2 个控制顶点的法向量相比均变化很大时,极限曲线出现了自交的情况。因此,选择合适的法向量可以避免产生的极限曲线。

3 基于圆平均的单参数 3 点 ternary 插值细分法

3.1 本文的 3 点细分法

线性单参数 3 点 ternary 插值细分法的细分规则为

$$\begin{cases} p_{3i-1}^{k+1} = \omega p_{i-1}^k + \left(\frac{4}{3} - 2\omega\right)p_i^k + \left(\omega - \frac{1}{3}\right)p_{i+1}^k \\ p_{3i}^{k+1} = p_i^k \\ p_{3i+1}^{k+1} = \left(\omega - \frac{1}{3}\right)p_{i-1}^k + \left(\frac{4}{3} - 2\omega\right)p_i^k + \omega p_{i+1}^k \end{cases} \quad (22)$$

式中, ω 为形状参数,细分进程如图 7 所示。

可以看出,每次细分过程均由一个左插步、一个右插步和一个插值步组成。当 $1/6 < \omega < 1/3$, 线性单参数 3 点 ternary 细分法是收敛的 (Zheng, 2003)。式(22)可改写为

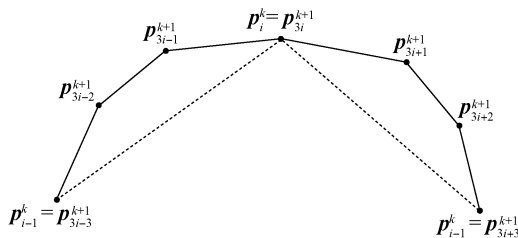


图 7 线性单参数 3 点 ternary 细分法的细分过程

Fig. 7 The subdivision process of the linear single-parameter 3-point ternary subdivision scheme

$$p_{3i-1}^{k+1} = \frac{2}{3} \left(\left(1 - \frac{3}{2}\omega\right)p_i^k + \frac{3}{2}\omega p_{i+1}^k \right) + \frac{1}{3} \left((2 - 3\omega)p_i^k + (3\omega - 1)p_{i+1}^k \right) \quad (23)$$

$$p_{3i+1}^{k+1} = \frac{1}{3} \left((2 - 3\omega)p_i^k + (3\omega - 1)p_{i-1}^k \right) + \frac{2}{3} \left(\left(1 - \frac{3}{2}\omega\right)p_i^k + \frac{3}{2}\omega p_{i+1}^k \right) \quad (24)$$

用圆平均代替式(23)和式(24),得到基于圆平均的单参数 3 点 ternary 细分法,其中形状参数 ω 的取值范围为 $2/9 < \omega < 1/3$ 。与线性单参数 3 点 ternary 细分法类似,本文单参数 3 点 ternary 细分法的每次细分过程均由左插步、右插步和插值步组成,构造过程如图 8 所示。其中,图 8(a)是在 $k+1$ 次细分中左插步产生的新点 p_{3i-1}^{k+1} ,图 8(b)是在 $k+1$ 次细分中右插步产生的新点 p_{3i+1}^{k+1} 。插值步 $p_{3i}^{k+1} = p_i^k$ 比较简单,本文略去了构造过程。

算法 2 基于圆平均的单参数 3 点 ternary 细分法

输入: 初始控制点及其法向量 $P_i = (p_i, n_i)$, $i \in \mathbf{Z}$ 。

输出: 迭代 m 次的顶点及其法向量对 $P_i^m = (p_i^m, n_i^m)$, $i \in \mathbf{Z}$ 。

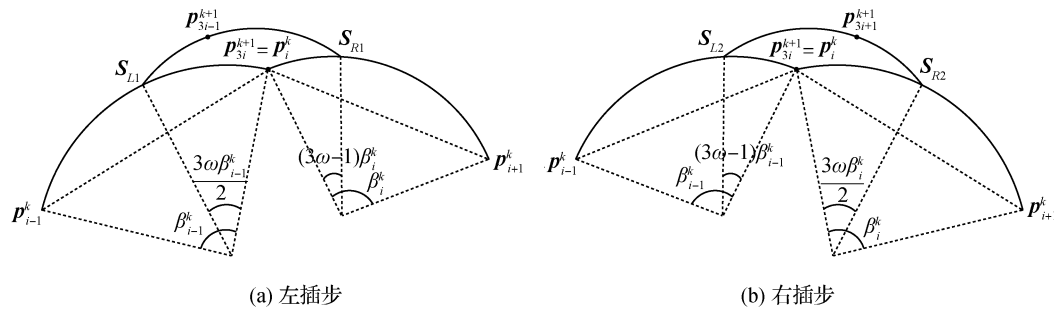


图8 本文单参数3点 ternary 细分法的构造

Fig. 8 Construction of the single-parameter 3-point ternary subdivision scheme proposed in this paper

((a) left interpolation step; (b) right interpolation step)

1) 对 $\forall i \in \mathbf{Z}$, 有 $\mathbf{P}_i^0 \leftarrow \mathbf{P}_i$;2) 对于 $k = 0, 1, 2, \dots, m$;执行 $\forall i \in \mathbf{Z}$;
$$\left. \begin{aligned} S_{L1} &\leftarrow \mathbf{P}_i^k e^{\frac{3}{2}\omega} \mathbf{P}_{i-1}^k; \\ S_{R1} &\leftarrow \mathbf{P}_i^k e^{\frac{3}{2}\omega-1} \mathbf{P}_{i+1}^k; \\ \mathbf{P}_{2i}^{k+1} &\leftarrow S_{L1} e^{\frac{1}{3}} S_{R1}; \end{aligned} \right\} \text{左插步}$$
 $\mathbf{P}_{3i}^{k+1} = \mathbf{P}_i^k$; 插值步
$$\left. \begin{aligned} S_{L2} &\leftarrow \mathbf{P}_i^k e^{\frac{3}{2}\omega-1} \mathbf{P}_{i-1}^k; \\ S_{R2} &\leftarrow \mathbf{P}_{i+1}^k e^{\frac{3}{2}\omega} \mathbf{P}_{i+2}^k; \\ \mathbf{P}_{2i+1}^{k+1} &\leftarrow S_{L2} e^{\frac{2}{3}} S_{R2} \circ \end{aligned} \right\} \text{右插步}$$

3.2 收敛性

定理3 当形状参数满足 $\frac{2}{9} < \omega < \frac{1}{3}$ 时, 基于

圆平均的单参数3点 ternary 细分法是收敛的。

证明: 对于该细分法法向量的收敛性的证明可参考 Dyn 和 Sharon (2017) 与本文引理3的证明, 不再给出详细证明。下面给出该细分法点的收敛性证明。

由于该细分法为插值细分, 即 $|\mathbf{p}_{3i}^{k+1} - \mathbf{p}_i^k| = 0$, 所以细分法是位移安全的。根据引理2, 要证明点的收敛性, 只需要证明收缩性。

如图8所示, 设 $\mathbf{S}_{L1} = (s_{L1}, \mathbf{n}_{L1})$ 和 $\mathbf{S}_{R1} = (s_{R1}, \mathbf{n}_{R1})$ 为细分法左插步中产生的中间点及其法向量对, $\mathbf{S}_{L2} = (s_{L2}, \mathbf{n}_{L2})$ 和 $\mathbf{S}_{R2} = (s_{R2}, \mathbf{n}_{R2})$ 为细分法右插步中产生的中间点及其法向量对; 令 $\beta_i = \theta(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{i+1}^k)$, $e^k = \max_i \{|\mathbf{p}_i^k \mathbf{p}_{i+1}^k|\}$, $\theta^k = \max_i \{\beta_i^k\}$ 。

由三角不等式, 得

$$|\mathbf{p}_{3i-1}^{k+1} \mathbf{p}_{3i}^{k+1}| \leq |\mathbf{p}_{3i-1}^{k+1} \mathbf{S}_{L1}| + |\mathbf{S}_{L1} \mathbf{p}_{3i}^{k+1}| \leq$$

$$\frac{|\mathbf{s}_{L1} \mathbf{s}_{R1}| \sin \frac{\theta(\mathbf{n}_{L1}, \mathbf{n}_{R1})}{6}}{\sin \frac{\theta(\mathbf{n}_{L1}, \mathbf{n}_{R1})}{2}} + \frac{|\mathbf{p}_{i-1}^k \mathbf{p}_i^k| \sin \frac{3}{4}\omega\beta_{i-1}}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}} \quad (25)$$

利用三角不等式对 $|\mathbf{s}_{L1} \mathbf{s}_{R1}|$ 进行估计, 有

$$\begin{aligned} |\mathbf{s}_{L1} \mathbf{s}_{R1}| &\leq |\mathbf{s}_{L1} \mathbf{p}_i^k| + |\mathbf{p}_i^k \mathbf{s}_{R1}| \leq \\ &\frac{|\mathbf{p}_{i-1}^k \mathbf{p}_i^k| \sin \frac{3}{4}\omega\beta_{i-1}}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}} + \frac{|\mathbf{p}_i^k \mathbf{p}_{i+1}^k| \sin \frac{3\omega-1}{2}\beta_i}{\sin \frac{\beta_i}{2}} \leq \\ &e^k \left(\frac{\sin \frac{3}{4}\omega\beta_{i-1}}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}} + \frac{\sin \frac{3\omega-1}{2}\beta_i}{\sin \frac{\beta_i}{2}} \right) \quad (26) \end{aligned}$$

对 $\theta(\mathbf{s}_{L1}, \mathbf{s}_{R1})$ 进行估计, 有

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{n}_{L1}, \mathbf{n}_{R1}) &\leq \theta(\mathbf{n}_{L1}, \mathbf{n}_i^k) + \theta(\mathbf{n}_i^k, \mathbf{n}_{R1}) \leq \\ &\frac{3}{2}\omega\beta_{i-1}^k + (3\omega-1)\beta_i^k \leq \left(\frac{9}{2}\omega-1\right)\theta^k \quad (27) \end{aligned}$$

由式(25)–(27), 得

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_{3i-1}^{k+1} \mathbf{p}_{3i}^{k+1}| &\leq \\ &e^k \left(\frac{\sin \frac{3}{4}\omega\beta_{i-1}}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}} + \frac{\sin \frac{3\omega-1}{2}\beta_i}{\sin \frac{\beta_i}{2}} \right) \times \\ &\frac{\sin \frac{\theta(\mathbf{s}_{L1}, \mathbf{s}_{R1})}{6}}{\sin \frac{\theta(\mathbf{s}_{L1}, \mathbf{s}_{R1})}{2}} + e^k \frac{\sin \frac{3}{4}\omega\beta_{i-1}}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}} \end{aligned}$$

根据该细分法的对称性, 边 $|\mathbf{p}_{3i}^{k+1} \mathbf{p}_{3i+1}^{k+1}|$ 有类似结果。因此, 可得

$$e^{k+1} \leq e^k \times$$

$$\left(\frac{\sin \frac{\theta(s_{L1}, s_{R1})}{6}}{\sin \frac{\theta(s_{L1}, s_{R1})}{2}} \times \left(C + \frac{\sin \frac{3\omega-1}{2}\beta_i}{\sin \frac{\beta_i}{2}} \right) + D \right)$$

式中, $C = \max_i \left\{ \frac{\sin \frac{3}{4}\omega\beta_{i-1}}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}}, \frac{\sin \frac{3}{4}\omega\beta_{i+1}}{\sin \frac{\beta_{i+1}}{2}} \right\}$, $D = \max_i \frac{\sin \frac{3}{4}\omega\beta_{i-1}}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}}$ 。

因此, $e^{k+1} \leq \eta^k e^k$ 。其中,

$$\eta^k = \frac{\sin \frac{\theta(s_{L1}, s_{R1})}{6}}{\sin \frac{\theta(s_{L1}, s_{R1})}{2}} \times \left(C + \frac{\sin \frac{3\omega-1}{2}\beta_i}{\sin \frac{\beta_i}{2}} \right) + D$$

由于 $\beta_i \leq \theta^k$ 以及法向量收敛, $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k = 0$, 可得

$$\eta^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta^k = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\omega + (3\omega - 1) \right) + \frac{3}{2}\omega = 3\omega - \frac{1}{3} \quad (28)$$

又因为 $\frac{2}{9} < \omega < \frac{1}{3}$, 则 $\eta^* < 1$ 。从极限定义可得, 当 k 足够大时, $\eta^k < 1$ 。 $\exists \eta \in (0, 1)$ 及 K , 当 $k > K$, $\eta^k < \eta < 1$ 。因此, 当 $k > K$, 细分法是收缩的。

综上所述, 本文的基于圆平均的单参数 3 点 ternary 插值细分法是收敛的。证毕。

3.3 连续性

定理 4 当形状参数满足 $2/9 < \omega < 1/3$ 时, 基于圆平均的单参数 3 点 ternary 细分法是 C^1 连续的。

证明: 与定理 2 证明过程类似。线性单参数 3 点 ternary 细分法的每次细分中, 左插步和右插步均可以看做由两个内插步和一个平均步组成, 如图 8 所示。

首先证明当 k 足够大时, 在 $k+1$ 次过程中, 左插步控制顶点到 p^{k+1} 到单参数 3 点 ternary 细分法产生的控制顶点 q^{k+1} 的最大距离足够小, 即 k 足够大时, $\delta^{k+1}(p) = \sup_i \{ |p_{3i-1}^{k+1} q_{3i-1}^{k+1}| \}$ 足够小。

如图 9 所示, 记线性单参数 3 点 ternary 插值细分法内插步骤产生 $q_i^{k,L}$ 和 $q_i^{k,R}$, 平均步产生 q_{3i-1}^{k+1} ; 基于圆平均的 3 点 ternary 插值细分法左插步产生 $p_i^{k,L}$

和 $p_i^{k,R}$; 用 q_{3i-1}^{k+1} 表示线段 $[q_i^{k,L}, q_i^{k,R}]$ 的三等分点, c_i^{k+1} 表示线段 $[p_i^{k,L}, p_i^{k,R}]$ 的三等分点。

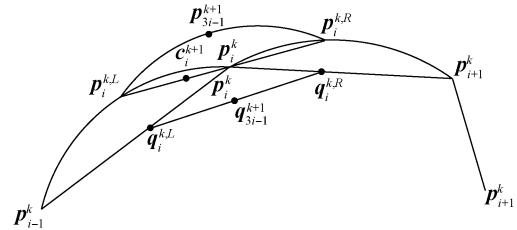


图 9 本文的单参数 3 点 ternary 细分法左插步中新点与对应线性细分的新点之间的距离

Fig. 9 The distance between the new point generated by left interpolation step of the single-parameter 3-point ternary subdivision scheme proposed in this paper and the new points generated by corresponding linear subdivision scheme

令 $\Delta_i^{k,L} = |p_i^{k,L} q_i^{k,L}|$, $\Delta_i^{k,R} = |p_i^{k,R} q_i^{k,R}|$, 由三角不等式, 得

$$|p_{3i-1}^{k+1} q_{3i-1}^{k+1}| \leq |p_{3i-1}^{k+1} c_i^{k+1}| + |c_i^{k+1} q_{3i-1}^{k+1}| \quad (29)$$

由 Lipovetsky 和 Dyn(2019) 引理 3.2, 得

$$|c_i^{k+1} q_{3i-1}^{k+1}| \leq \max \{ \Delta_i^{k,L}, \Delta_i^{k,R} \}$$

再由引理 5, 得

$$|p_{3i-1}^{k+1} c_i^{k+1}| \leq \chi_{\frac{1}{3}} |p_i^{k,L} p_i^{k,R}| \theta(n_i^{k,L}, n_i^{k,R}) \quad (30)$$

$$\Delta_i^{k,L} \leq \chi_{\frac{3}{2}\omega} |p_{i-1}^k p_i^k| \theta(n_{i-1}^k, n_i^k) \quad (31)$$

$$\Delta_i^{k,R} \leq \chi_{3\omega-1} |p_i^k p_{i+1}^k| \theta(n_i^k, n_{i+1}^k) \quad (32)$$

将式(26)和式(27)代入式(30), 得

$$|p_{3i-1}^{k+1} c_i^{k+1}| \leq \left(\frac{\sin \frac{3}{4}\omega\beta_{i-1}}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}} + \frac{\sin \frac{3\omega-1}{2}\beta_i}{\sin \frac{\beta_i}{2}} \right) \times \left(\frac{9}{2}\omega - 1 \right) \chi_{\frac{1}{3}} e^k \theta^k \quad (33)$$

由式(29)–(33), 有

$$|p_{3i-1}^{k+1} q_{3i-1}^{k+1}| \leq \left(\frac{\sin \frac{3}{4}\omega\beta_{i-1}}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}} + \frac{\sin \frac{3\omega-1}{2}\beta_i}{\sin \frac{\beta_i}{2}} \right) \times \left(\frac{9}{2}\omega - 1 \right) \chi_{\frac{1}{3}} e^k \theta^k + \max \{ \chi_{\frac{3}{2}\omega}, \chi_{3\omega-1} \} e^k \theta^k \quad (34)$$

由式(27)和式(28)可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\theta^{k+1}}{\theta^k} = \frac{3}{2}\omega - \frac{1}{3}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e^{k+1}}{e^k} = 3\omega - \frac{1}{3}$$

由于 $\frac{2}{9} < \omega < \frac{1}{3}$, 因此, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\theta^k \rightarrow 0$

的速度比 $e^k \rightarrow 0$ 快; 从而当 k 足够大时, 可得

$$\max_i |p_{3i-1}^{k+1} q_{3i-1}^{k+1}| \leq \left(\frac{\sin \frac{3}{4} \omega \beta_{i-1}}{\sin \frac{\beta_{i-1}}{2}} + \frac{\sin \frac{3\omega-1}{2} \beta_i}{\sin \frac{\beta_i}{2}} \right) \times \left(\frac{9}{2} \omega - 1 \right) \chi_{\frac{1}{3}}^1 (e^k)^2 + \max \{ \chi_{\frac{3}{2}\omega}^3, \chi_{3\omega-1}^3 \} (e^k)^2 \quad (35)$$

由于当形状参数 ω 满足 $2/9 < \omega < 1/3$ 时,线性单参数 3 点 ternary 细分 C^1 连续,故收敛。当 k 足够大时, $\delta^{k+1}(p) = \sup_i |p_{3i-1}^{k+1} q_{3i-1}^{k+1}|$ 足够小。同理可证,当 k 足够大时, $\delta^{k+1}(p) = \sup_i |p_{3i+1}^{k+1} q_{3i+1}^{k+1}|$, $\delta^{k+1}(p) = \sup_i |p_{3i}^{k+1} q_{3i}^{k+1}|$ 足够小。综上所述,本文提出的细分法是 C^1 连续的。证毕。

3.4 实验与比较

图 10 是基于圆平均的单参数 3 点 ternary 插值细分实例。如图 10 所示,当形状参数 ω 分别取 0.25, 0.275, 0.3, 0.32 时,基于圆平均的单参数 3 点 ternary 插值细分生成的极限曲线也不同。该细分法与初始控制顶点的法向量有关,如图 11 所示,初始控制顶点相同,改变其中一个控制顶点的法向量,会出现自交情况,所以选择合适的法向量可以避免产生极限曲线自交。

实验将线性双参数 4 点 binary 细分法与线性单

参数 3 点 ternary 插值细分法作为线性细分方案 1 和线性细分方案 2 与本文的两种细分法进行比较。结果表明,本文的细分法具有圆再生力,且生成的极限曲线与传统方法相比更光滑。

如图 12 所示,当初始控制顶点从圆采样,对应的法向量为从圆心到顶点指向圆外。方案 1 与方案 2 细分产生的极限曲线都不能重现圆,而基于圆平均的双参数 4 点 binary 细分法与基于圆平均的单参数 3 点 ternary 插值细分均能再生圆。

本文提出的基于圆平均的 4 点细分与 3 点细分的造型能力均比对应的线性细分方法好。实验选取 3 个曲线模型实例进行不同细分法的曲线重建比较。3 个实例均是从连续曲线上采样获得的初始控制点及其法向量,生成的曲线均是细分 8 次所得。图 13 是例 1 凹形曲线模型的重建,其中,图 13(a) 是初始采样点及其法向量,图 13(b)—(e) 分别是线性双参数 4 点 binary 细分法、本文的 4 点细分法、线性单参数 3 点 ternary 插值细分法与本文的 3 点插值细分法。图 14 是例 2 的曲线模型重建比较,图 15 是例 3 手型曲线模型的重建比较,各子图含义同图 12。从图 13—图 15 可以看出,方案 1、方案 2 和本文方法均能重建曲线,但方案 1 和方案 2 生成的曲线都有尖锐点,而本文的 4 点细分和 3 点细分法

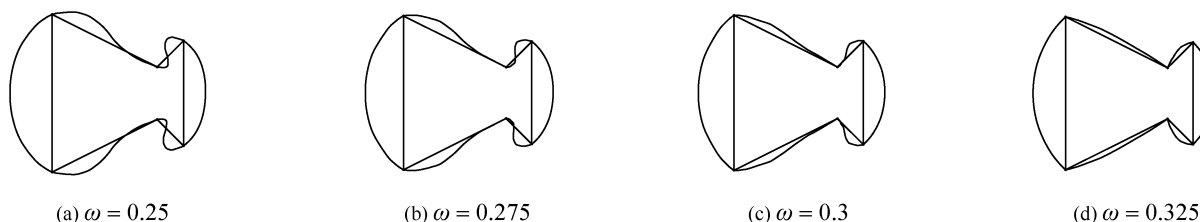


图 10 不同参数 ω 下的基于圆平均的单参数 3 点 ternary 插值细分极限曲线

Fig. 10 Limit curves of the single-parameter 3-point ternary subdivision scheme based on circle average under different parameters ((a) $\omega = 0.25$; (b) $\omega = 0.275$; (c) $\omega = 0.3$; (d) $\omega = 0.325$)

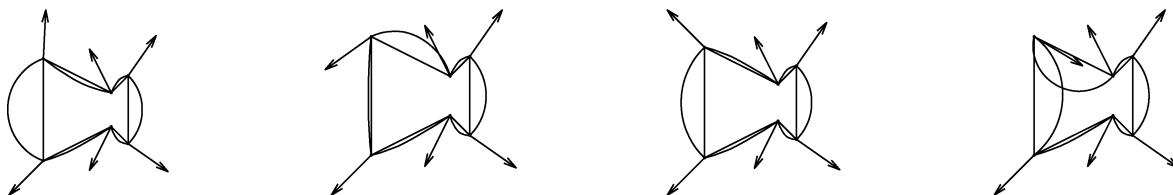


图 11 初始点的法向量对基于圆平均的单参数 3 点 ternary 插值细分极限曲线的影响 ($\omega = 0.325$)

Fig. 11 Influence of normal vector of initial point on the limit curve of the single-parameter 3-point ternary subdivision scheme based on circle average ($\omega = 0.325$)

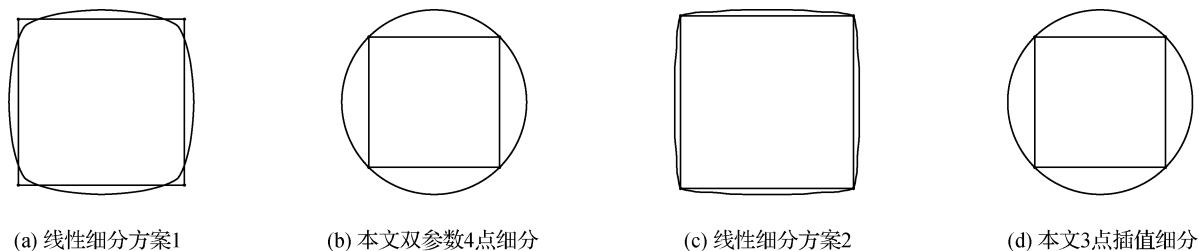


图 12 不同细分方法的圆的再生力比较

Fig. 12 Comparison of regenerative force of circle with different subdivision schemes((a) linear subdivision scheme 1;
(b) two-parameter 4-point subdivision scheme proposed in this paper;(c) linear subdivision scheme 2;
(d) 3-point interpolation subdivision scheme proposed in this paper)

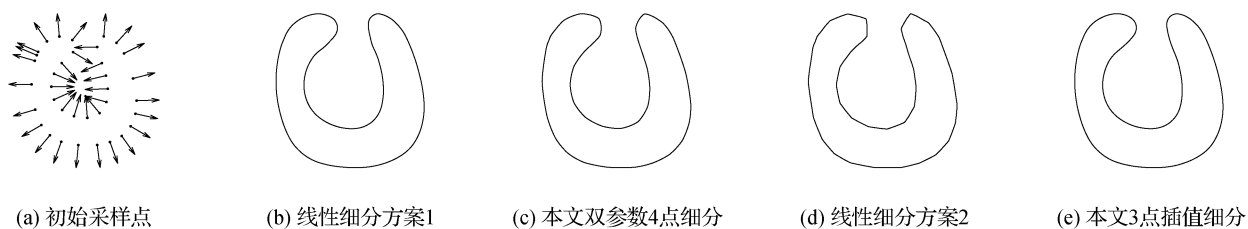


图 13 例 1 曲线模型

Fig. 13 Curve model of example 1((a) initial sampling point;(b) linear subdivision scheme 1;
(c) two-parameter 4-point subdivision scheme proposed in this paper;(d) linear subdivision scheme 2;
(e) 3-point interpolation subdivision scheme proposed in this paper)



图 14 例 2 曲线模型

Fig. 14 Curve model of example 2((a) initial sampling point;(b) linear subdivision scheme 1;
(c) two-parameter 4-point subdivision scheme proposed in this paper;(d) linear subdivision scheme 2;
(e) 3-point interpolation subdivision scheme proposed in this paper)



图 15 例 3 曲线模型

Fig. 15 Curve model of example 3((a) initial sampling point;(b) linear subdivision scheme 1;
(c) two-parameter 4-point subdivision scheme proposed in this paper;(d) linear subdivision scheme 2;
(e) 3-point interpolation subdivision scheme proposed in this paper)

生成的曲线都比较光滑,特别是例3,初始控制点与法向量杂乱无章,但用本文方法生成的曲线可更好地重现一张光滑手的形状。

4 结 论

本文针对带法向约束的离散点集重建问题,提出基于圆平均的双参数4点 binary 细分和单参数3点 ternary 插值细分两种非线性细分法,利用引理1与引理2证明了本文两种细分法的收敛性与 C^1 连续性。对基于圆平均的双参数4点 binary 细分,当偏移参数 $\mu = 0$ 时,可以实现插值。这也是李彩云等人(2019)提出的基于圆平均的带参数4点插值细分的推广。对基于圆平均的3点 ternary 插值细分,在实现插值的同时,每次细分获得的控制顶点是上一次控制顶点的3倍,这使得细分过程中控制顶点的增加速度更快。本文的两种方法与对应的线性细分法相比,本文方法可以得到更加光滑的曲线,图像编辑能力强,且具有圆的再生力,克服了线性细分法容易产生尖锐点、难生成圆的问题。对从3个封闭连续曲线实例上采样获得的初始控制点及其法向量的数据集,均可以很好地重建。理论证明与数值实验表明,本文方法可以较好地解决带法向约束的离散点集的曲线重建问题。

但是,本文方法仍存在不足之处。当离散点集的法向量发生突变时,生成的曲线往往会自交,因此需要选择合适的法向量避免极限曲线自交。此外,本文方法的参数满足什么样的范围可达到 C^2 连续与 C^3 连续以及将本文方法推广到曲面,值得进一步探究。

参考文献 (References)

- Bellaihou M and Ikemakhen A. 2020. Spherical interpolatory geometric subdivision schemes. *Computer Aided Geometric Design*, 80: #101871 [DOI: 10.1016/j.cagd.2020.101871]
- Chaikin G M. 1974. An algorithm for high-speed curve generation. *Computer Graphics and Image Processing*, 3(4): 346-349 [DOI: 10.1016/0146-664X(74)90028-8]
- Deng C Y and Ma W Y. 2012. Matching admissible Hermite data by a biarc-based subdivision scheme. *Computer Aided Geometric Design*, 29(6): 363-378 [DOI: 10.1016/j.cagd.2012.03.010]
- Deng C Y and Ma W Y. 2014. A biarc based subdivision scheme for space curve interpolation. *Computer Aided Geometric Design*, 31(9): 656-673 [DOI: 10.1016/j.cagd.2014.07.003]
- Deng C Y and Wang G Z. 2010. Incenter subdivision scheme for curve interpolation. *Computer Aided Geometric Design*, 27(1): 48-59 [DOI: 10.1016/j.cagd.2009.08.007]
- Ding Y D and Hua X J. 2000. A type of convexity-preserving interpolatory subdivision scheme for smooth curve generation and its properties. *Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, 12(7): 492-496 (丁友东, 华宣积. 2000. 光滑曲线生成的一类保凸插值细分方法及其性质. *计算机辅助设计与图形学学报*, 12(7): 492-496) [DOI: 10.3321/j.issn:1003-9775.2000.07.004]
- Dyn N and Hormann K. 2012. Geometric conditions for tangent continuity of interpolatory planar subdivision curves. *Computer Aided Geometric Design*, 29(6): 332-347 [DOI: 10.1016/j.cagd.2012.02.004]
- Dyn N, Levin D and Gregory J A. 1987. A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design. *Computer Aided Geometric Design*, 4(4): 257-268 [DOI: 10.1016/0167-8396(87)90001-X]
- Dyn N and Sharon N. 2017. Manifold-valued subdivision schemes based on geodesic inductive averaging. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 311: 54-67 [DOI: 10.1016/j.cam.2016.07.008]
- Hassan M F, Ivriissimitzis I P, Dodgson N A and Sabin M A. 2002. An interpolating 4-point C^2 ternary stationary subdivision scheme. *Computer Aided Geometric Design*, 19(1): 1-18 [DOI: 10.1016/S0167-8396(01)00084-X]
- Li C Y, Zheng H C and Lin Z Y. 2019. Nonlinear subdivision schemes with free parameters based on circle average. *Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, 31(8): 1330-1340 (李彩云, 郑红婵, 林增耀. 2019. 基于圆平均的带参数非线性细分法. *计算机辅助设计与图形学学报*, 31(8): 1330-1340) [DOI: 10.3724/SP.J.1089.2019.17574]
- Lipovetsky E. 2022. Subdivision of point-normal pairs with application to smoothing feasible robot path. *The Visual Computer*, 38(7): 2271-2284 [DOI: 10.1007/s00371-021-02110-9]
- Lipovetsky E and Dyn N. 2016. A weighted binary average of point-normal pairs with application to subdivision schemes. *Computer Aided Geometric Design*, 48: 36-48 [DOI: 10.1016/j.cagd.2016.07.004]
- Lipovetsky E and Dyn N. 2019. C^1 analysis of some 2D subdivision schemes refining point-normal pairs with the circle average. *Computer Aided Geometric Design*, 69: 45-54 [DOI: 10.1016/j.cagd.2019.01.001]
- Mao A H, Luo J, Chen J and Li G Q. 2016. A new fast normal-based interpolating subdivision scheme by cubic Bézier curves. *The Visual Computer*, 32(9): 1085-1095 [DOI: 10.1007/s00371-015-1175-y]
- Ren H J, Shou H H, Mo J H, Zhang H. 2022. Implicit T-spline curve reconstruction with normal constraint. *Journal of Image and Graphics*, 27(4): 1314-1321. (任浩杰, 寿华好, 莫佳慧, 张航.

2022. 带法向约束的隐式 T 样条曲线重构. 中国图象图形学报, 27(4): 1314-1321.) [DOI: 10.11834/jig.200596]
- Yang X N. 2006. Normal based subdivision scheme for curve design. Computer Aided Geometric Design, 23(3): 243-260 [DOI: 10.1016/j.cagd.2005.10.001]
- Zhang A W and Zhang C M. 2010. Tangent direction controlled subdivision scheme for curve//Proceedings of the 2nd Conference on Environmental Science and Information Application Technology. Wuhan, China; IEEE; 36-39 [DOI: 10.1109/ESIAT.2010.5567272]
- Zhang Z Z, Zheng H C, Zhou J and Pan L L. 2020. A nonlinear generalized subdivision scheme of arbitrary degree with a tension parameter. Advances in Difference Equations, 2020(1): #655 [DOI: 10.1186/s13662-020-03118-6]
- Zheng H C. 2003. Modeling and Application of p-nary Subdivision curves. Xi'an: Northwestern Polytechnical University (郑红婵. 2003. p-nary 细分曲线造型及其应用. 西安: 西北工业大学)
- Zheng H C, Ye Z L and Zhao H X. 2004. A class of four-point subdivision schemes with two parameters and its properties. Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics, 16(8): 1140-1145 (郑红婵, 叶正麟, 赵红星. 2004. 双参数四点细分法及其性质. 计算机辅助设计与图形学学报, 16(8): 1140-1145) [DOI: 10.3321/j.issn:1003-9775.2004.08.019]

作者简介

刘艳,女,硕士研究生,主要研究方向为计算机辅助几何设计与图形学。E-mail: 1976362791@qq.com

寿华好,通信作者,男,教授,主要研究方向为计算机辅助几何设计与图形学。E-mail: shh@zjut.edu.cn

季康松,男,硕士研究生,主要研究方向为计算机辅助几何设计与图形学。E-mail: 675462664@qq.com