



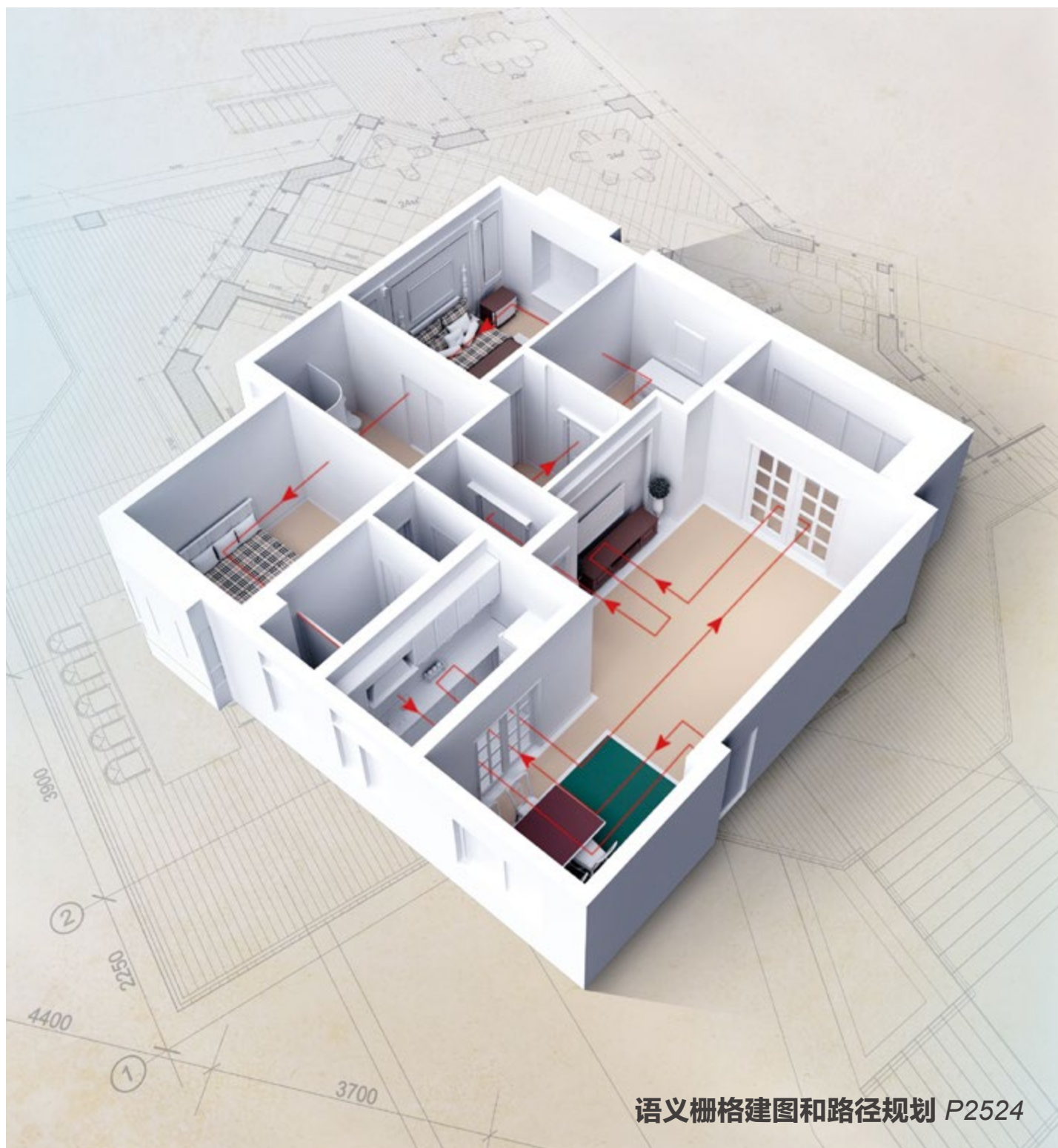
JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS

主办: 中国科学院空天信息创新研究院
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

2021
10
VOL.26

ISSN1006-8961
CN11-3758/TB



语义栅格建图和路径规划 P2524



第26卷第10期（总第306期）
2021年10月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊
中文核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院
主办单位 中国科学院空天信息创新研究院
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

主 编 吴一戎
编辑出版 《中国图象图形学报》编辑出版委员会
通信地址 北京市海淀区北四环西路19号
邮 编 100190
电子信箱 jig@aircas.ac.cn
电 话 010-58887035
网 址 www.cjig.cn

广告发布登记号 京朝工商广登字20170218号
总 发 行 北京报刊发行局
订 购 全国各地邮局
海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司
(邮政信箱: 北京399信箱 邮编: 100048)
印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian | Monthly, Started in 1996

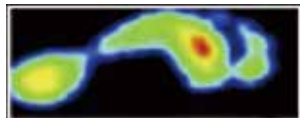
Superintended by Chinese Academy of Sciences
Sponsored by Aerospace Information Research Institute, CAS
China Society of Image and Graphics
Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

Editor-in-Chief Wu Yirong
Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of Image and Graphics
Address No. 19, North 4th Ring Road West, Haidian District, Beijing, P. R. China
Zip code 100190
E-mail jig@aircas.ac.cn
Telephone 010-58887035
Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals
Domestic All Local Post Offices in China
Overseas China International Book Trading Corporation
(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China)
Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

CN 11-3758/TB
ISSN 1006-8961
CODEN ZTTXFZ

国外发行代号 M1406
国内邮发代号 82-831
国内定价 60.00元



穿鞋足迹序列的足迹能量图组表达与识别(第2357页)



时空图卷积网络与注意机制的视频目标分割(第2376页)



双光流网络指导的视频目标检测(第2473页)

综述

图像分类的深度卷积神经网络模型综述

张珂, 冯晓晗, 郭玉荣, 苏昱坤, 赵凯, 赵振兵, 马占宇, 丁巧林 2305

中国图像工程25年

章毓晋 2326

数据集论文

FGSC-23: 面向深度学习精细识别的高分辨率光学遥感图像舰船目标数据集

姚力波, 张筱晗, 吕亚飞, 孙炜玮, 李孟洋 2337

图像处理和编码

并行生成网络的红外—可见光图像转换

余佩伦, 施佳, 王晗 2346

图像分析和识别

穿鞋足迹序列的足迹能量图组表达与识别

王新年, 于丹, 张涛 2357

时空图卷积网络与注意机制的视频目标分割

姚睿, 夏士雄, 周勇, 赵佳琦, 胡伏原 2376

多支路协同的RGB-T图像显著性目标检测

蒋亭亭, 刘昱, 马欣, 孙景林 2388

改进R-FCN模型的小尺度行人检测

刘万军, 董利兵, 曲海成 2400

边缘与区域不一致性引导下的图像拼接篡改检测网络

蒋小玉, 刘春晓 2411

图像理解和计算机视觉

各向异性导向滤波的红外与可见光图像融合

刘明威, 王任华, 李静, 焦映臻 2421

卷积稀疏与细节显著图解析的图像融合

杨培, 高雷阜, 訾玲玲 2433

计算机图形学

利用距离与内能极小平滑链接Bézier曲线

李军成, 刘成志, 刘珊君 2450

NCIG 2020

结合置信度加权融合与视觉注意机制的前景检测

成科扬, 孙爽, 王文杉, 师文喜, 李鹏, 詹永照 2462

双光流网络指导的视频目标检测

尉婉青, 禹晶, 史薪琪, 肖创柏 2473

生成对抗网络驱动的图像隐写与水印模型

郑钢, 胡东辉, 戈辉, 郑淑丽 2485

融合语义—表观特征的无监督前景分割

李熹, 马惠敏, 马洪兵, 王弈冬 2503

场景视点偏移的激光雷达点云分割

郑阳, 林春雨, 廖康, 赵耀, 薛松 2514

激光—相机系统语义栅格建图和路径规划

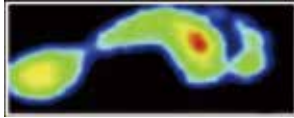
丁梦远, 郭迟, 黄凯 2524

融合词袋连通图的图像检索特征选择

李国祥, 王继军, 马文斌 2533

CONTENTS

JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Shoeprint sequence representation and recognition using shoeprint energy map set (P2357)



Spatial-temporal video object segmentation with graph convolutional network and attention mechanism(P2376)



Dual optical flow network-guided video object detection(P2473)

Review

Overview of deep convolutional neural networks for image classification

Zhang Ke, Feng Xiaohan, Guo Yurong, Su Yukun, Zhao Kai, Zhao Zhenbing, Ma Zhanyu, Ding Qiaolin 2305

Twenty-five years of image engineering in China

Zhang Yujin 2326

Dataset

FGSC-23: a large-scale dataset of high-resolution optical remote sensing image for deep learning-based fine-grained ship recognition

Yao Libo, Zhang Xiaohan, Lyu Yafei, Sun Weiwei, Li Mengyang 2337

Image Processing and Coding

Infrared-to-visible image translation based on parallel generator network

Yu Peilun, Shi Quan, Wang Han 2346

Image Analysis and Recognition

Shoeprint sequence representation and recognition using shoeprint energy map set

Wang Xinnian, Yu Dan, Zhang Tao 2357

Spatial-temporal video object segmentation with graph convolutional network and attention mechanism

Yao Rui, Xia Shixiong, Zhou Yong, Zhao Jiaqi, Hu Fuyuan 2376

Multi-path collaborative salient object detection based on RGB-T images

Jiang Tingting, Liu Yu, Ma Xin, Sun Jinglin 2388

Small-scale pedestrian detection based on improved R-FCN model

Liu Wanjun, Dong Libing, Qu Haicheng 2400

Edge and region inconsistency-guided image splicing tamper detection network

Jiang Xiaoyu, Liu Chunxiao 2411

Image Understanding and Computer Vision

Infrared and visible image fusion with multi-scale anisotropic guided filtering

Liu Mingwei, Wang Renhua, Li Jing, Jiao Yingzhen 2421

Image fusion method of convolution sparsity and detail saliency map analysis

Yang Pei, Gao Leifu, Zi Lingling 2433

Computer Graphics

Smoothing linked Bézier curves by distance and internal energy minimization

Li Juncheng, Liu Chengzhi, Liu Shanjun 2450

NCIG 2020

Foreground detection via fusing confidence by weight and visual attention mechanism

Cheng Keyang, Sun Shuang, Wang Wenshan, Shi Wenxi, Li Peng, Zhan Yongzhao 2462

Dual optical flow network-guided video object detection

Yu Wanjing, Yu Jing, Shi Xinqi, Xiao Chuangbai 2473

End-to-end image steganography and watermarking driven by generative adversarial networks

Zheng Gang, Hu Donghui, Ge Hui, Zheng Shuli 2485

Semantic-apparent feature-fusion-based unsupervised foreground segmentation method

Li Xi, Ma Huimin, Ma Hongbing, Wang Yidong 2503

LiDAR point cloud segmentation through scene viewpoint offset

Zheng Yang, Lin Chunyu, Liao Kang, Zhao Yao, Xue Song 2514

Semantic grid mapping and path planning combined with laser-camera system

Ding Mengyuan, Guo Chi, Huang Kai 2524

Feature selection method for image retrieval based on connected graphs and bag of words

Li Guoxiang, Wang Jijun, Ma Wenbin 2533

中图法分类号: TP391.72 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2021)10-2450-12

论文引用格式: Li J C, Liu C Z and Liu S J. 2021. Smoothing linked Bézier curves by distance and internal energy minimization. Journal of Image and Graphics, 26(10): 2450-2461 (李军成, 刘成志, 刘珊君. 2021. 利用距离与内能极小平滑链接 Bézier 曲线. 中国图象图形学报, 26(10): 2450-2461) [DOI:10.11834/jig.200485]

利用距离与内能极小平滑链接 Bézier 曲线

李军成*, 刘成志, 刘珊君

湖南人文科技学院数学与金融学院, 娄底 417000

摘要: 目的 对于满足低阶连续的链接 Bézier 曲线, 提高曲线之间的连续性以达到平滑的目的, 需要对曲线的控制顶点进行相应调整。因此, 可根据具体的目标对需要调整的控制顶点进行优化选取, 使得平滑后的链接曲线满足相应的要求。针对这一问题, 给出了 3 种目标下优化调整控制顶点的方法。方法 首先对讨论的问题进行描述, 分别指出链接 Bézier 曲线从 C^0 连续平滑为 C^1 连续和从 C^1 连续平滑为 C^2 连续两种情形需调整的控制顶点; 然后分别给出两种情形下, 以新旧控制顶点距离极小为目标、曲线内能极小为目标、新旧控制顶点距离与曲线内能同时极小为目标, 对链接 Bézier 曲线进行平滑的方法, 最后对 3 种极小化方法进行对比, 并指出了不同方法的适用场合。结果 数值算例表明, 距离极小化方法调整后的控制顶点偏离原控制顶点的距离相对较小, 适合于控制顶点取自于实物时的应用场合; 内能极小化方法获得的链接曲线内能相对较小, 适合于要求曲线能量尽可能小的应用场合; 距离与内能同时极小化方法兼顾了新旧控制顶点的距离和链接曲线的内能, 适合于对两个目标都有要求的应用场合。结论 提出的方法为链接 Bézier 曲线的平滑提供了 3 种有效手段, 且易于实现, 对其他类型链接曲线的平滑具有参考价值。

关键词: Bézier 曲线; 链接; 平滑; 控制顶点优化; 距离极小; 内能极小

Smoothing linked Bézier curves by distance and internal energy minimization

Li Juncheng*, Liu Chengzhi, Liu Shanjuan

College of Mathematics and Finance, Hunan University of Humanities, Science and Technology, Loudi 417000, China

Abstract: **Objective** The Bézier curve is a widely used tool in the representation of parametric curves. At present, most computer aided design (CAD) systems take the Bézier curve as a basic module. When using the Bézier curve for geometric modeling, it is often necessary to link multiple curves to meet the needs of designing complex curves. In order to satisfy the continuity between the linked Bézier curves, the control points that satisfy the corresponding continuity conditions need to be selected in advance. For linked Bézier curves with low order continuity, the control points of the curves can be adjusted to improve the continuity so as to smooth the linked curves. In theory, the continuity between linked Bézier curves can be improved by arbitrarily adjusting the control points of the curves to make the corresponding continuity conditions hold. How-

收稿日期: 2020-08-24; 修回日期: 2020-09-29; 预印本日期: 2020-10-06

* 通信作者: 李军成 lijuncheng82@126.com

基金项目: 湖南省自然科学基金项目(2021JJ30373); 湖南省教育厅科研项目(18A415)

Supported by: Natural Science Foundation of Hunan Province, China(2021JJ30373); Scientific Research Fund of Hunan Provincial Education Department(18A415)

ever, this kind of adjustment of control points without specific objectives is often unable to meet the needs of practical applications. Given that the continuity can be improved by adjusting the control points of the linked Bézier curves, the control points that need to be adjusted can be optimized according to some specific targets, so that the smooth linked curves meet the corresponding requirements. In practical applications, if the control points of the curves are taken from the real objects, it is often hoped that the distance between the new control points and the original control points is as small as possible. Hence, the minimum distance between the new control points and the original control points can be used as the target to optimize the control points that need to be adjusted. In addition, energy minimization has become a common method for constructing curves and surfaces in CAD and related fields. Thus, the minimum energy can be used as a target to optimize the control points that need to be adjusted. In this study, three methods for smoothing the linked Bézier curves from C^0 to C^1 and from C^1 to C^2 by distance and internal energy minimization are given. **Method** First, the problems to be discussed are described, and the control points to be adjusted are pointed out when smoothing the linked Bézier curves from C^0 to C^1 and from C^1 to C^2 . Two control points need to be adjusted when smoothing the linked Bézier curves from C^0 to C^1 or from C^1 to C^2 . However, only one of them needs to be optimized due to the relationship between the two control points that need to be adjusted. Then, the distance minimizations for smoothing the linked Bézier curves from C^0 to C^1 and from C^1 to C^2 are presented. Next, the internal energy minimizations for smoothing the linked Bézier curves from C^0 to C^1 and from C^1 to C^2 are given. Then, the simultaneous minimization of the distance and the internal energy for smoothing the linked Bézier curves from C^0 to C^1 and from C^1 to C^2 are provided. The optimal solutions of the control points that need to be adjusted can be easily obtained by solving the corresponding unconstrained optimization problems. Finally, the comparison of the three minimization methods is given, and the applicable occasions of different methods are pointed out. The distance between the new control points and the original control points by the distance minimization is relatively small, which is suitable for the application when the control points are taken from the real object; the internal energy of the linked curves obtained by the internal energy minimization is relatively small, which is suitable for the application where the energy of the curve is required to be as small as possible; the distance and internal energy minimization simultaneously takes into account the distance between the new control points and the original control points and the internal energy of the linked curves, which is suitable for applications where both targets are required. Some numerical examples are presented to illustrate the effectiveness of the proposed methods. **Result** By using the distance minimization, the total distance between the new control points and the original control points is obviously smaller than that of the other two methods. When the control points of Bézier curves are all taken from the real object, the distance between the new control points and the original control points should not be too large, so the distance minimization method is more suitable. By using the internal energy minimization, the total internal energy of the curves is obviously smaller than that of the other two methods. When the energy of the curve is required to be as small as possible, the internal energy minimization is more suitable. In addition, given that the stretch energy, strain energy, and curvature variation energy correspond to the arc length, curvature, and curvature variation of the curve, the corresponding minimization method can be selected according to the specific requirements. By using the simultaneous minimization of distance and internal energy, the total distance between the new control points and the original control points and the total internal energy of the curves are between the other two methods. When the distance between the new control points and the original control points should not be too large and the energy of the curve should be as small as possible, the method of simultaneous minimization of distance and internal energy is a better choice. **Conclusion** The proposed methods provide three effective means for smoothing the linked Bézier curves and are easy to implement. The linked Bézier curves can be effectively smoothed from C^0 to C^1 and from C^1 to C^2 by using the proposed methods according to the demand of minimum distance or internal energy. When smoothing other types of link curves, the distance minimization, internal energy minimization, and simultaneous minimization of distance and internal energy proposed in this study maybe useful.

Key words: Bézier curve; link; smoothing; control points optimization; distance minimization; internal energy minimization

0 引言

在参数曲线的表示中,Bézier 曲线(Farin,2002)是应用广泛的一种工具。目前,大多数 CAD(computer aided design)系统都将 Bézier 曲线作为一个基础模块。在使用 Bézier 曲线进行几何造型时,为满足复杂曲线的设计需要,往往要对多条 Bézier 曲线进行链接。若使链接 Bézier 曲线之间满足一定的连续性,需要事先选定满足相应连续性条件的控制顶点。然而,即使对于满足低阶连续的链接 Bézier 曲线,也存在如何通过调整控制顶点提高曲线间连续性平滑链接曲线的问题。在理论上,只需使曲线连续性条件成立即可通过调整控制顶点提高链接 Bézier 曲线之间的连续性,但这种没有具体目标的调整往往无法适应实际应用的需求。

通过调整控制顶点可以提高链接 Bézier 曲线之间的连续性,那么可根据具体目标对相应的控制顶点进行优化,使平滑后的链接曲线满足相应需求。在实际应用中,通过调整控制顶点对链接 Bézier 曲线进行平滑时,若曲线的控制顶点均取自实物,则希望平滑后曲线的新控制顶点与原控制顶点的距离尽可能小,故将新控制顶点与原控制顶点的距离极小作为目标来平滑链接 Bézier 曲线。另外,利用能量极小化方法构造曲线曲面已成为 CAD 及其相关领域的常用手段。例如,能量极小的 Bézier 曲线(Xu 等,2011;Ahn 等,2014;Erişkin 和 Yücesan,2016;韩志红和朱春钢,2020)、B 样条曲线(Vassilev,1996;Xu 等,2019)、Hermite 插值(Yong 和 Cheng,2004;Jaklič 和 Žagar,2011a, b;Lu,2015a, b;Lu 等,2018;Li 和 Zhang,2020)以及利用能量极小化方法构造插值曲线曲面(Goodman 等,1998;Zhang 等,2001;Li 等,2020)和曲面网格(Bock 和 Stiller,2014,2018)等。因此,也可将能量极小作为目标来平滑链接 Bézier 曲线。

本文分别给出了基于控制顶点距离极小、曲线内能极小和控制顶点距离与曲线内能同时极小的链接 Bézier 曲线平滑方法,为链接曲线的平滑提供了 3 种有效手段。

1 问题的描述

给定两条 Bézier 曲线 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$,表达式

分别为

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t)p_i \\ C_2(t) &= \sum_{j=0}^n B_{j,n}(t)q_j \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $0 \leq t \leq 1$, $B_{i,m}(t) = \frac{m!}{i!(m-i)!}(1-t)^{m-i}t^i$, $B_{j,n}(t) = \frac{n!}{j!(n-j)!}(1-t)^{n-j}t^j$, $p_i (i=0,1,\dots,m)$ 与 $q_j (j=0,1,\dots,n)$ 分别为两曲线的控制顶点。

讨论的问题是:若 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 在链接时满足低阶连续性,在链接点固定时,如何通过调整两曲线的控制顶点提高它们之间的连续性,从而达到平滑两链接曲线的目的。

由于 C^1 或 C^2 连续可满足大多数实际工程问题的需要,故仅考虑 C^0 链接平滑为 C^1 链接和 C^1 链接平滑为 C^2 链接两种情形。

1) C^0 链接平滑为 C^1 链接。由式(1)可得

$$\begin{cases} C_1(1) = p_m, & C'_1(1) = m(p_m - p_{m-1}) \\ C_2(0) = q_0, & C'_2(0) = n(q_1 - q_0) \end{cases} \quad (2)$$

要使 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 满足 C^1 链接,则必有 $C_1(1) = C_2(0)$ 与 $C'_1(1) = C'_2(0)$,即由式(2)可得

$$\begin{cases} p_m = q_0 \\ m(p_m - p_{m-1}) = n(q_1 - q_0) \end{cases} \quad (3)$$

记 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 的链接点 $d = p_m = q_0$ 。由式(3)不难发现,当 d 固定时,要使两链接曲线从 C^0 平滑为 C^1 ,只需调整曲线 $C_1(t)$ 的控制顶点 p_{m-1} 和曲线 $C_2(t)$ 的控制顶点 q_1 即可。如图 1 所示,三次 Bézier 曲线与四次 Bézier 曲线满足 C^0 链接,调整控制顶点 p_2 与 q_1 后将曲线平滑为 C^1 链接。

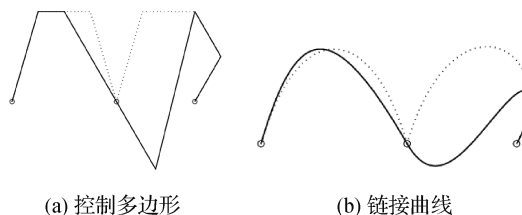


图 1 C^0 链接(虚线)平滑为 C^1 链接(实线)

Fig. 1 Smoothing the linked curves from

C^0 (dotted lines) to C^1 (solid lines)

((a) control polygon; (b) linked curves)

2) C^1 链接平滑为 C^2 链接。由式(1)可得

$$\begin{cases} C_1''(1) = m(m-1)(p_{m-2} - 2p_{m-1} + p_m) \\ C_2''(0) = n(n-1)(q_0 - 2q_1 + q_2) \end{cases} \quad (4)$$

要使 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 满足 C^2 链接, 除满足式(3), 还需满足 $C_1''(1) = C_2''(0)$, 即由式(4)可得

$$\begin{aligned} m(m-1)(p_{m-2} - 2p_{m-1} + p_m) = \\ n(n-1)(q_0 - 2q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (5)$$

从式(5)可以看出, 当 d 固定且式(3)成立时, 要使两链接曲线从 C^1 平滑为 C^2 , 只需调整曲线 $C_1(t)$ 的控制顶点 p_{m-2} 和曲线 $C_2(t)$ 的控制顶点 q_2 即可。如图 2 所示, 三次 Bézier 曲线与四次 Bézier 曲线满足 C^1 链接, 调整控制顶点 p_1 与 q_2 后将曲线平滑为 C^2 链接。

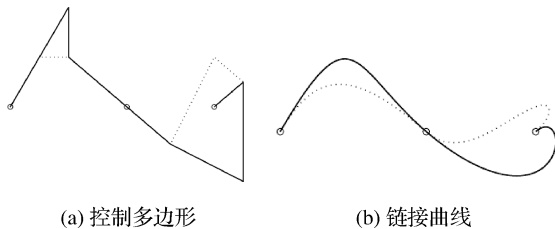


图 2 C^1 链接(虚线)平滑为 C^2 链接(实线)

Fig. 2 Smoothing the linked curves from C^1 (dotted lines) to C^2 (solid lines) ((a) control polygon; (b) linked curves)

对于上述两种情形, 当 d 固定时, 理论上可任意调整相应控制顶点的位置, 只需使连续性条件成立即可对链接 Bézier 曲线进行平滑。当然, 也可根据特定目标对控制顶点的位置进行优化调整, 以使链接 Bézier 曲线平滑后满足相应需求。

2 链接 Bézier 曲线平滑方法

2.1 基于距离极小的链接曲线平滑

若 Bézier 曲线的控制顶点取自于实物, 通过调整控制顶点对链接 Bézier 曲线进行平滑时, 往往希望平滑后曲线的新控制顶点与原控制顶点的距离尽可能小, 此时可将新控制顶点与原控制顶点的总距离极小作为目标来优化相应控制顶点的位置。

2.1.1 C^0 平滑为 C^1

为使两链接曲线从 C^0 平滑为 C^1 , 假设将控制顶点 p_{m-1} 调整为 $p_{m-1}^{[1]}$, q_1 调整为 $q_1^{[1]}$, 则新控制顶点与原控制顶点的总距离可表示为

$$D_1 = \sqrt{\|p_{m-1}^{[1]} - p_{m-1}\|^2} + \sqrt{\|q_1^{[1]} - q_1\|^2} \quad (6)$$

为方便计算, 式(6)可近似表示 (Juhász 和

Róth, 2019) 为

$$\hat{D}_1 = \|p_{m-1}^{[1]} - p_{m-1}\|^2 + \|q_1^{[1]} - q_1\|^2 \quad (7)$$

由于平滑后两链接曲线之间满足 C^1 连续, 故依据式(3)有

$$q_1^{[1]} = -\frac{m}{n}p_{m-1}^{[1]} + e_1 \quad (8)$$

式中, $e_1 = \left(1 + \frac{m}{n}\right)d$ 。

将式(8)代入式(7)有

$$\hat{D}_1 = \|p_{m-1}^{[1]} - p_{m-1}\|^2 + \left\| -\frac{m}{n}p_{m-1}^{[1]} + e_1 - q_1 \right\|^2 \quad (9)$$

显然, 式(9)中仅有 $p_{m-1}^{[1]}$ 为自由量。因此, 要使调整后的控制顶点与原控制顶点的总距离极小, 可得无约束优化问题

$$\min \hat{D}_1(p_{m-1}^{[1]}) \quad (10)$$

定理 1 将链接 Bézier 曲线 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 从 C^0 平滑为 C^1 时, 要使调整后的控制顶点与原控制顶点的总距离极小, 只需将调整后的控制顶点 $p_{m-1}^{[1]}$ 与 $q_1^{[1]}$ 取为

$$\begin{cases} p_{m-1}^{[1]} = \frac{n(np_{m-1} + m(e_1 - q_1))}{m^2 + n^2} \\ q_1^{[1]} = -\frac{m}{n}p_{m-1}^{[1]} + e_1 \end{cases} \quad (11)$$

式中, $e_1 = \left(1 + \frac{m}{n}\right)d$ 。

证明: 由式(9)可得

$$\frac{\partial \hat{D}_1}{\partial p_{m-1}^{[1]}} = 2(p_{m-1}^{[1]} - p_{m-1}) - \frac{2m}{n} \left(-\frac{m}{n}p_{m-1}^{[1]} + e_1 - q_1 \right) \quad (12)$$

由于无约束优化问题(10)的最优解可由 $\partial \hat{D}_1 / \partial p_{m-1}^{[1]} = 0$ 获得, 故由式(12)求解方程及式(8)即可得式(11)。

例 1 给定控制顶点 $p_0 = (-4, 0)$, $p_1 = (-3, 2)$, $p_2 = (-1, 2)$, $p_3 = (0, 0)$; $q_0 = (0, 0)$, $q_1 = (1, 2)$, $q_2 = (3, 2)$, $q_3 = (4, 1)$, $q_4 = (3, 0)$ 。由控制顶点 $p_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 确定的三次 Bézier 曲线 $C_1(t)$ 与由控制顶点 $q_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ 确定的四次 Bézier 曲线 $C_2(t)$ 仅满足 C^0 链接, 现将链接的 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 从 C^0 平滑为 C^1 。若使调整后的控制顶点与原控制顶点的总距离极小, 由式(11)可得调整后的控制顶点为 $p_2^{[1]} = (-1.120, 0.320)$, $q_1^{[1]} = (0.840, -0.240)$ 。原 C^0 链

接曲线与平滑后的 C^1 链接曲线如图 3 所示。

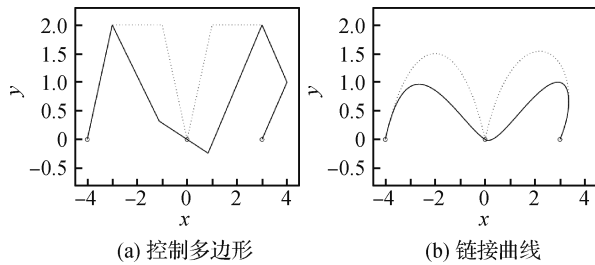


图 3 距离极小的 C^0 链接(虚线)平滑为 C^1 链接(实线)

Fig. 3 Smoothing the linked curves from C^0 (dotted lines) to C^1 (solid lines) by distance minimization
((a) control polygon; (b) linked curves)

2.1.2 C^1 平滑为 C^2

为使两链接曲线从 C^1 平滑为 C^2 , 假设将控制顶点 p_{m-2} 调整为 $p_{m-2}^{[1]}$ 、 q_2 调整为 $q_2^{[1]}$, 则新控制顶点与原控制顶点的总距离可近似表示为

$$\hat{D}_2 = \|p_{m-2}^{[1]} - p_{m-2}\|^2 + \|q_2^{[1]} - q_2\|^2 \quad (13)$$

由于平滑后两链接曲线之间满足 C^2 连续, 故依据式(3)与式(5), 有

$$q_2^{[1]} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)} p_{m-2}^{[1]} + e_2 \quad (14)$$

式中, $e_2 = -\left(\frac{2m(m-1)}{n(n-1)} + \frac{2m}{n}\right)p_{m-1} + \left(\frac{m(m-1)}{n(n-1)} + \frac{2m}{n} + 1\right)d$ 。

将式(14)代入式(13)有

$$\hat{D}_2 = \|p_{m-2}^{[1]} - p_{m-2}\|^2 + \left\| \frac{m(m-1)}{n(n-1)} p_{m-2}^{[1]} + e_2 - q_2 \right\|^2 \quad (15)$$

显然, 在式(15)中仅有 $p_{m-2}^{[1]}$ 为自由量。因此, 要使调整后的控制顶点与原控制顶点的总距离极小, 可得无约束优化问题

$$\min \hat{D}_2(p_{m-2}^{[1]}) \quad (16)$$

定理 2 将链接 Bézier 曲线 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 从 C^1 平滑为 C^2 时, 要使调整后的控制顶点与原控制顶点的总距离极小, 只需将调整后的控制顶点 $p_{m-2}^{[1]}$ 与 $q_2^{[1]}$ 取为

$$\begin{cases} p_{m-2}^{[1]} = \frac{n(n-1)(n(n-1)p_{m-2} - m(m-1)(e_2 - q_2))}{m^2(m-1)^2 + n^2(n-1)^2} \\ q_2^{[1]} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)} p_{m-2}^{[1]} + e_2 \end{cases} \quad (17)$$

式中, $e_2 = -\left(\frac{2m(m-1)}{n(n-1)} + \frac{2m}{n}\right)p_{m-1} + \left(\frac{m(m-1)}{n(n-1)} + \frac{2m}{n} + 1\right)d$ 。

定理 2 的证明与定理 1 的证明过程类似。

例 2 给定控制顶点 $p_0 = (-4, 0)$, $p_1 = (-3, 2)$, $p_2 = (-2, 2)$, $p_3 = (0, 0)$; $q_0 = (0, 0)$, $q_1 = (1.5, -1.5)$, $q_2 = (3, 2)$, $q_3 = (4, 1)$, $q_4 = (3, 0)$ 。由控制顶点 $p_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 确定的三次 Bézier 曲线 $C_1(t)$ 与由控制顶点 $q_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ 确定的四次 Bézier 曲线 $C_2(t)$ 满足 C^1 链接, 现将链接的 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 从 C^1 平滑为 C^2 。若使调整后的控制顶点与原控制顶点的总距离极小, 由式(17)可得调整后的控制顶点为 $p_1^{[1]} = (-3.2000, 4.4000)$, $q_2^{[1]} = (3.4000, -2.8000)$ 。原 C^1 链接曲线与平滑后的 C^2 链接曲线如图 4 所示。

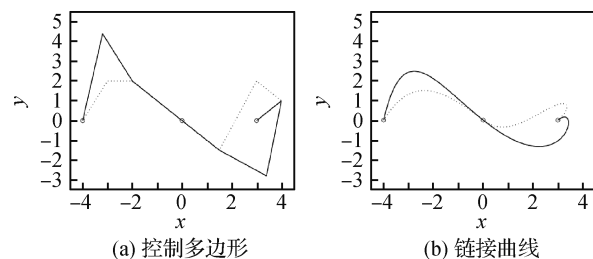


图 4 距离极小的 C^1 链接(虚线)平滑为 C^2 链接(实线)

Fig. 4 Smoothing the linked curves from C^1 dotted lines) to C^2 (solid lines) by distance minimization
((a) control polygon; (b) linked curves)

2.2 基于内能极小的链接曲线平滑

通过曲线内能极小化构造曲线是一种常见的手段。拉伸能、应变能与曲率变化能是曲线内能的 3 种常见形式, 分别对应曲线的弧长、曲率和曲率变化率 (Xu 等, 2011)。通过调整控制顶点对链接 Bézier 曲线进行平滑时, 若希望平滑后两条曲线的内能尽可能小, 此时则可将曲线的总内能极小作为目标来优化相应控制顶点的位置。

给定参数曲线 $r(t)$, 其拉伸能、应变能与曲率变化能可分别定义 (Xu 等, 2011) 为

$$\begin{cases} E_1 = \int_0^1 \|r'(t)\| dt \\ E_2 = \int_0^1 \kappa^2(t) \|r'(t)\| dt \\ E_3 = \int_0^1 [\kappa'(t)]^2 dt \end{cases} \quad (18)$$

式中, $\kappa(t)$ 为曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的曲率。

为简化计算, 式(19)可近似表示 (Velkamp 和 Wesselink, 1995) 为

$$\begin{cases} \hat{E}_1 = \int_0^1 \|\mathbf{r}'(t)\|^2 dt \\ \hat{E}_2 = \int_0^1 \|\mathbf{r}''(t)\|^2 dt \\ \hat{E}_3 = \int_0^1 \|\mathbf{r}'(t)\|^2 dt \end{cases} \quad (20)$$

2.2.1 C^0 平滑为 C^1

为使两链接曲线从 C^0 平滑为 C^1 , 假设将控制顶点 $\mathbf{p}_{m-1}$ 调整为 $\mathbf{p}_{m-1}^{[2]}$ 、 $\mathbf{q}_1$ 调整为 $\mathbf{q}_1^{[2]}$ 。依据式(20), 可将平滑后两曲线的总内能近似表示为

$$\begin{aligned} \hat{E}_{1r} = & \int_0^1 \|\mathbf{C}_1^{(r)}(t)\|^2 dt + \int_0^1 \|\mathbf{C}_2^{(r)}(t)\|^2 dt = \\ & \int_0^1 \|\mathbf{f}_1^{(r)}(t) + B_{m-1,m}^{(r)}(t)\mathbf{p}_{m-1}^{[2]}\|^2 dt + \\ & \int_0^1 \|\mathbf{f}_2^{(r)}(t) + B_{1,n}^{(r)}(t)\mathbf{q}_1^{[2]}\|^2 dt \end{aligned} \quad (21)$$

式中, $\mathbf{f}_1(t) = \sum_{i=0}^{m-2} B_{i,m}(t)\mathbf{p}_i + B_{m,m}(t)\mathbf{p}_m$, $\mathbf{f}_2(t) = B_{0,n}(t)\mathbf{q}_0 + \sum_{j=2}^n B_{j,n}(t)\mathbf{q}_j$ 。

由于平滑后两链接曲线之间满足 C^1 连续, 故依据式(8), 有

$$\mathbf{q}_1^{[2]} = -\frac{m}{n}\mathbf{p}_{m-1}^{[2]} + \mathbf{e}_1 \quad (22)$$

由式(22)可知, 式(21)中仅有 $\mathbf{p}_{m-1}^{[2]}$ 为自由量。因此, 要使平滑后两条曲线的总内能极小, 可得无约束优化问题

$$\min \hat{E}_{1r}(\mathbf{p}_{m-1}^{[2]}) \quad (23)$$

定理3 将链接 Bézier 曲线 $\mathbf{C}_1(t)$ 与 $\mathbf{C}_2(t)$ 从 C^0 平滑为 C^1 时, 要使平滑后两条曲线的总内能极小, 只需将调整后的控制顶点 $\mathbf{p}_{m-1}^{[2]}$ 与 $\mathbf{q}_1^{[2]}$ 取为

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{m-1}^{[2]} = \frac{n(mb_{1r}\mathbf{e}_1 - n\mathbf{v}_{1r} + m\mathbf{w}_{1r})}{m^2b_{1r} + n^2a_{1r}} \\ \mathbf{q}_1^{[2]} = -\frac{m}{n}\mathbf{p}_{m-1}^{[2]} + \mathbf{e}_1 \end{cases} \quad (24)$$

式中, 常数 a_{1r} , b_{1r} 分别为 $a_{1r} = \int_0^1 (B_{m-1,m}^{(r)}(t))^2 dt$, $b_{1r} = \int_0^1 (B_{1,n}^{(r)}(t))^2 dt$ 。常向量 $\mathbf{v}_{1r}$, $\mathbf{w}_{1r}$, $\mathbf{e}_1$ 分别为 $\mathbf{v}_{1r} = \int_0^1 B_{m-1,m}^{(r)}(t)\mathbf{f}_1^{(r)}(t) dt$, $\mathbf{w}_{1r} = \int_0^1 B_{1,n}^{(r)}(t)\mathbf{f}_2^{(r)}(t) dt$, $\mathbf{e}_1 = \left(1 + \frac{m}{n}\right)\mathbf{d}$ 。其中, $\mathbf{f}_1(t) = \sum_{i=0}^{m-2} B_{i,m}(t)\mathbf{p}_i +$

$$B_{m,m}(t)\mathbf{p}_m, \mathbf{f}_2(t) = B_{0,n}(t)\mathbf{q}_0 + \sum_{j=2}^n B_{j,n}(t)\mathbf{q}_j。$$

证明: 将式(22)代入式(21), 可得

$$\begin{aligned} \hat{E}_{1r} = & a_{1r}\|\mathbf{p}_{m-1}^{[2]}\|^2 + b_{1r}\left\|-\frac{m}{n}\mathbf{p}_{m-1}^{[2]} + \mathbf{e}_1\right\|^2 + \\ & 2\mathbf{v}_{1r} \cdot \mathbf{p}_{m-1}^{[2]} + 2\mathbf{w}_{1r} \cdot \left(-\frac{m}{n}\mathbf{p}_{m-1}^{[2]} + \mathbf{e}_1\right) + c_{1r} \end{aligned} \quad (25)$$

式中, $c_{1r} = \int_0^1 \|\mathbf{f}_1^{(r)}(t)\|^2 dt + \int_0^1 \|\mathbf{f}_2^{(r)}(t)\|^2 dt$ 。

由式(25)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{E}_{1r}}{\partial \mathbf{p}_{m-1}^{[2]}} = & 2a_{1r}\mathbf{p}_{m-1}^{[2]} - \frac{2m}{n}b_{1r}\left(-\frac{m}{n}\mathbf{p}_{m-1}^{[2]} + \mathbf{e}_1\right) + \\ & 2\mathbf{v}_{1r} - \frac{2m}{n}\mathbf{w}_{1r} \end{aligned} \quad (26)$$

由于无约束优化问题(23)的最优解可由 $\partial \hat{E}_{1r} / \partial \mathbf{p}_{m-1}^{[2]} = \mathbf{0}$ 获得, 故由式(26)求解方程及式(22)即可得式(24)。

例3 对例1给定的 Bézier 曲线 $\mathbf{C}_1(t)$ 与 $\mathbf{C}_2(t)$, 现将链接的两曲线从 C^0 平滑为 C^1 。若使平滑后两条曲线的总内能极小, 由式(24)可得调整后的控制顶点如下:

1) 拉伸能极小。即 $\mathbf{p}_2^{[2]} = (-1.108\ 7, -0.130\ 4)$, $\mathbf{q}_1^{[2]} = (0.831\ 5, 0.097\ 8)$ 。

2) 应变能极小。 $\mathbf{p}_2^{[2]} = (-1.818\ 2, -0.090\ 9)$, $\mathbf{q}_1^{[2]} = (1.363\ 6, 0.068\ 2)$ 。

3) 曲率变化能极小。 $\mathbf{p}_2^{[2]} = (-2.166\ 7, -0.866\ 7)$, $\mathbf{q}_1^{[2]} = (1.625\ 0, 0.650\ 0)$ 。

原 C^0 链接曲线与平滑后的 C^1 链接曲线如图5所示。

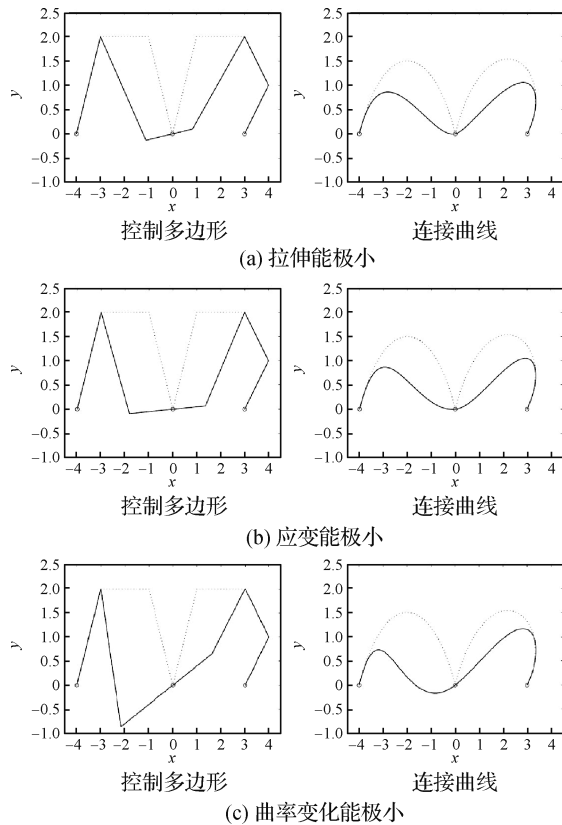
2.2.2 C^1 平滑为 C^2

为使两链接曲线从 C^1 平滑为 C^2 , 假设将控制顶点 $\mathbf{p}_{m-2}$ 调整为 $\mathbf{p}_{m-2}^{[2]}$, $\mathbf{q}_2$ 调整为 $\mathbf{q}_2^{[2]}$ 。依据式(20), 可将平滑后两曲线的总内能近似表示为

$$\begin{aligned} \hat{E}_{2r} = & \int_0^1 \|\mathbf{g}_1^{(r)}(t) + B_{m-2,m}^{(r)}(t)\mathbf{p}_{m-2}^{[2]}\|^2 dt + \\ & \int_0^1 \|\mathbf{g}_2^{(r)}(t) + B_{2,n}^{(r)}(t)\mathbf{q}_2^{[2]}\|^2 dt \end{aligned} \quad (27)$$

式中, $\mathbf{g}_1(t) = \sum_{i=0}^{m-3} B_{i,m}(t)\mathbf{p}_i + B_{m-1,m}(t)\mathbf{p}_{m-1} + B_{m,m}(t)\mathbf{p}_m$, $\mathbf{g}_2(t) = B_{0,n}(t)\mathbf{q}_0 + B_{1,n}(t)\mathbf{q}_1 + \sum_{j=3}^n B_{j,n}(t)\mathbf{q}_j$ 。

由于平滑后两链接曲线之间满足 C^2 连续, 依据式(14), 有

图5 内能极小的 C^0 链接(虚线)平滑为 C^1 链接(实线)Fig. 5 Smoothing the linked curves from C^0 (dotted lines) to C^1 (solid lines) by internal energy minimization

((a) stretch energy minimization; (b) strain energy minimization;

(c) curvature variation energy minimization)

$$q_2^{[2]} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)} p_{m-2}^{[2]} + e_2 \quad (28)$$

式中, $e_2 = -\left(\frac{2m(m-1)}{n(n-1)} + \frac{2m}{n}\right)p_{m-1} + \left(\frac{m(m-1)}{n(n-1)} + \frac{2m}{n} + 1\right)d$ 。

由式(28)可知,式(27)中仅有 $p_{m-2}^{[2]}$ 为自由量。因此,要使平滑后两条曲线的总内能极小,可得无约束优化问题

$$\min \hat{E}_{2r}(p_{m-2}^{[2]}) \quad (29)$$

定理4 将链接 Bézier 曲线 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 从 C^1 平滑为 C^2 时,要使平滑后两条曲线的总内能极小,只需将调整后的控制顶点 $p_{m-2}^{[2]}$ 与 $q_2^{[2]}$ 取为

式中,常数 a_{2r} 和 b_{2r} 分别为 $a_{2r} = \int_0^1 (B_{m-2,m}^{(r)}(t))^2 dt$,

$b_{2r} = \int_0^1 (B_{2,n}^{(r)}(t))^2 dt$ 。常向量 v_{2r} , w_{2r} , e_2 分别为

$$v_{2r} = \int_0^1 B_{m-2,m}^{(r)}(t) g_1^{(r)}(t) dt, \quad w_{2r} = \int_0^1 B_{2,n}^{(r)}(t) g_2^{(r)}(t) dt, \quad e_2 = -\left(\frac{2m(m-1)}{n(n-1)} + \frac{2m}{n}\right) \times$$

$$p_{m-1} + \left(\frac{m(m-1)}{n(n-1)} + \frac{2m}{n} + 1\right)d, \quad \text{其中, } g_1(t) =$$

$$\sum_{i=0}^{m-3} B_{i,m}(t)p_i + B_{m-1,m}(t)p_{m-1} + B_{m,m}(t)p_m, \quad g_2(t) =$$

$$B_{0,n}(t)q_0 + B_{1,n}(t)q_1 + \sum_{j=3}^n B_{j,n}(t)q_j。$$

$$\begin{cases} p_{m-2}^{[2]} = -\frac{n(n-1)(m(m-1)b_{2r}e_2 + n(n-1)v_{2r} + m(m-1)w_{2r})}{m^2(m-1)^2b_{2r} + n^2(n-1)^2a_{2r}} \\ q_2^{[2]} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)} p_{m-2}^{[2]} + e_2 \end{cases} \quad (30)$$

定理4的证明与定理3的证明过程类似。

例4 对例2给定的 Bézier 曲线 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$,将链接的两曲线从 C^1 平滑为 C^2 。若使平滑后两条曲线的总内能极小,由式(30)可得调整后的控制顶点为

1)拉伸能极小。即 $p_1^{[2]} = (-3.375, 0, 0.875)$, $q_2^{[2]} = (3.3125, -4.5625)$ 。

2)应变能极小。即 $p_1^{[2]} = (-3.1111, 2.3889)$, $q_2^{[2]} = (3.4444, -3.8056)$ 。

3)曲率变化能极小。即 $p_1^{[2]} = (-3.5238, 6.1905)$, $q_2^{[2]} = (3.2381, -1.9048)$ 。

原 C^1 链接曲线与平滑后的 C^2 链接曲线如图6所示。

2.3 基于距离与内能极小的链接曲线平滑

通过调整控制顶点对链接 Bézier 曲线平滑时,若同时希望平滑后曲线的新控制顶点与原控制顶点的距离以及两条曲线的内能尽可能小,此时可将新控制顶点与原控制顶点的总距离和曲线的总内能作为双目标来优化相应控制顶点的位置。

2.3.1 C^0 平滑为 C^1

为了使两链接曲线从 C^0 平滑为 C^1 ,假设将控制顶点 p_{m-1} 调整为 $p_{m-1}^{[3]}$, q_1 调整为 $q_1^{[3]}$ 。若同时以总距离函数 $\hat{D}_1$ 与总内能函数 $\hat{E}_{1r}$ 为极小目标,则依据式(9)与式(21)可得双目标优化问题

$$\min (\hat{D}_1(p_{m-1}^{[3]}), \hat{E}_{1r}(p_{m-1}^{[3]}))^T \quad (31)$$

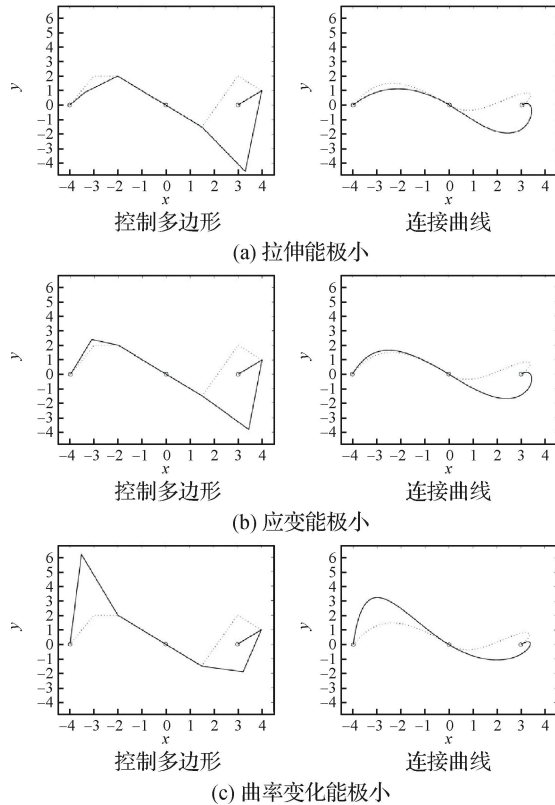


图6 内能极小的 C^1 链接(虚线)平滑为 C^2 链接(实线)
 Fig. 6 Smoothing the linked curves from C^1 (dotted lines) to C^2 (solid lines) by internal energy minimization
 ((a) stretch energy minimization; (b) strain energy minimization; (c) curvature variation energy minimization)

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{m-1}^{[3]} = \frac{n(\omega(n\mathbf{p}_{m-1} + m(\mathbf{e}_1 - \mathbf{q}_1)) + (1-\omega)(mb_{1r}\mathbf{e}_1 - n\mathbf{v}_{1r} + m\mathbf{w}_{1r}))}{\omega(m^2 + n^2) + (1-\omega)(m^2b_{1r} + n^2a_{1r})} \\ \mathbf{q}_1^{[3]} = -\frac{m}{n}\mathbf{p}_{m-1}^{[3]} + \mathbf{e}_1 \end{cases} \quad (33)$$

式中,常数 a_{1r} , b_{1r} 以及常向量 $\mathbf{v}_{1r}$, $\mathbf{w}_{1r}$, $\mathbf{e}_1$ 为定理3 中所示,权重 ω 由算法1 确定。

证明:确定权重 ω 后,由式(12)(26),可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1(\mathbf{p}_{m-1}^{[3]})}{\partial \mathbf{p}_{m-1}^{[3]}} &= 2\omega(\mathbf{p}_{m-1}^{[3]} - \mathbf{p}_{m-1}) - \\ &\quad \frac{2\omega m}{n} \left(-\frac{m}{n}\mathbf{p}_{m-1}^{[3]} + \mathbf{e}_1 - \mathbf{q}_1 \right) + \\ &\quad 2(1-\omega)a_{1r}\mathbf{p}_{m-1}^{[3]} - \frac{2(1-\omega)m}{n}b_{1r} \left(-\frac{m}{n}\mathbf{p}_{m-1}^{[3]} + \mathbf{e}_1 \right) + \\ &\quad 2(1-\omega)\mathbf{v}_{1r} - \frac{2(1-\omega)m}{n}\mathbf{w}_{1r} \end{aligned} \quad (34)$$

由于无约束优化问题(32)的最优解可由 $\partial \hat{G}_1 / \partial \mathbf{p}_{m-1}^{[3]} = \mathbf{0}$ 获得,故由式(34)求解方程以及依据式(22)即可得式(33)。

例5 对例1 给定的 Bézier 曲线 $\mathbf{C}_1(t)$ 与

一般地,问题(31)可近似转化为单目标优化问题

$$\min G_1(\mathbf{p}_{m-1}^{[3]}) = \omega \hat{D}_1(\mathbf{p}_{m-1}^{[3]}) + (1-\omega) \hat{E}_{1r}(\mathbf{p}_{m-1}^{[3]}) \quad (32)$$

式中, ω ($0 \leq \omega \leq 1$) 为权重。

由式(32)可知,若想获得近似最优解,需事先确定权重 ω 。本文采用双目标优化中的排序法确定权重 ω (林铨云和董加礼,1992)。

算法1 利用排序法确定权重 ω 。具体步骤如下:

1) 分别计算2 个单目标关于最优解 $\mathbf{p}_{m-1}^{[1]}$ 与 $\mathbf{p}_{m-1}^{[2]}$ 的偏差。

$$\delta_1 = |\hat{D}_1(\mathbf{p}_{m-1}^{[2]}) - \hat{D}_1(\mathbf{p}_{m-1}^{[1]})|$$

$$\delta_2 = |\hat{E}_{1r}(\mathbf{p}_{m-1}^{[1]}) - \hat{E}_{1r}(\mathbf{p}_{m-1}^{[2]})|$$

2) 计算权重的初始值。

$$\omega_1 = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}, \omega_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2}$$

3) 若 $\omega_1 \geq \omega_2$, 权重取为 $\omega = \min\{\omega_1, \omega_2\}$; 否则,权重取为 $\omega = \max\{\omega_1, \omega_2\}$ 。

定理5 将链接 Bézier 曲线 $\mathbf{C}_1(t)$ 与 $\mathbf{C}_2(t)$ 从 C^0 平滑为 C^1 时,要使调整后的控制顶点与原控制顶点的总距离以及两条曲线的内能同时极小,只需将调整后的控制顶点 $\mathbf{p}_{m-1}^{[3]}$ 与 $\mathbf{q}_1^{[3]}$ 取为

$\mathbf{C}_2(t)$, 现将链接的两曲线从 C^0 平滑为 C^1 。若使平滑后曲线的新控制顶点与原控制顶点的总距离以及两曲线的总内能同时极小,由式(33)可得调整后的控制顶点为

1) 距离与拉伸能同时极小。即 $\mathbf{p}_2^{[3]} = (-1.114\ 3, 0.094\ 8)$, $\mathbf{q}_1^{[3]} = (0.835\ 8, -0.071\ 1)$ 。

2) 距离与应变能同时极小。即 $\mathbf{p}_2^{[3]} = (-1.469\ 1, 0.114\ 5)$, $\mathbf{q}_1^{[3]} = (1.101\ 8, -0.085\ 9)$ 。

3) 距离与曲率变化能同时极小。即 $\mathbf{p}_2^{[3]} = (-1.643\ 3, -0.273\ 3)$, $\mathbf{q}_1^{[3]} = (1.232\ 5, 0.205\ 0)$ 。

原 C^0 链接曲线与平滑后的 C^1 链接曲线如图7 所示。

2.3.2 C^1 平滑为 C^2

为了使两链接曲线从 C^0 平滑为 C^1 ,假设将控

制顶点 p_{m-2} 调整为 $p_{m-2}^{[3]}$ 、 q_2 调整为 $q_2^{[3]}$ 。与 C^0 平滑为 C^1 的过程类似,给出下列定理。

定理6 将链接 Bézier 曲线 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 从

$$\begin{cases} p_{m-2}^{[3]} = \frac{n(n-1)(\lambda(n(n-1)p_{m-2} - m(m-1)(e_2 - q_2)) - (1-\lambda)(m(m-1)b_{2r}e_2 + n(n-1)v_{2r} + m(m-1)w_{2r}))}{\lambda(m^2(m-1)^2 + n^2(n-1)^2) + (1-\lambda)(m^2(m-1)^2b_{2r} + n^2(n-1)^2a_{2r})} \\ q_2^{[3]} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}p_{m-2}^{[3]} + e_2 \end{cases} \quad (35)$$

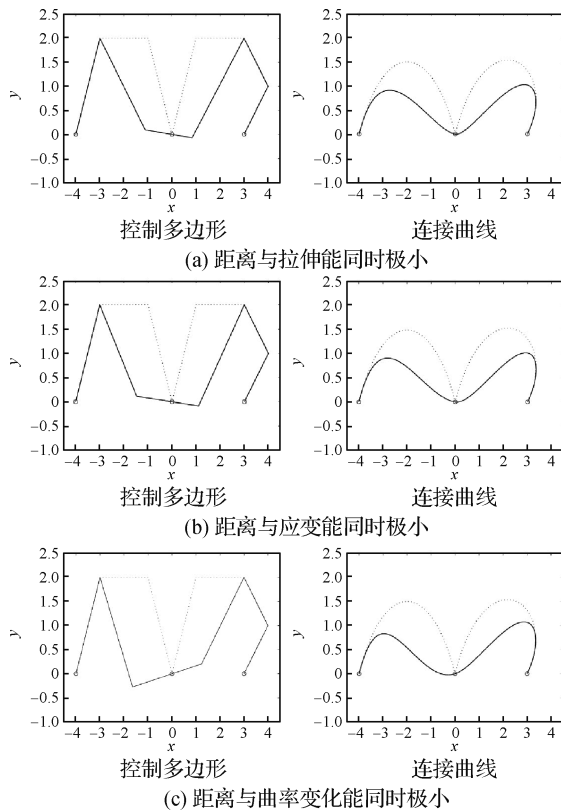


图7 距离与内能极小的 C^0 链接(虚线)
平滑为 C^1 链接(实线)

Fig. 7 Smoothing the linked curves from C^0 (dotted lines) to C^1 (solid lines) by distance and internal energy minimization ((a) distance and stretch energy minimization; (b) distance and strain energy minimization; (c) distance and curvature variation energy minimization)

式中,常数 a_{2r} , b_{2r} 以及常向量 v_{2r} , w_{2r} , e_2 与定理4中一样,权重 λ 参照算法1确定。

例6 对例2给定的 Bézier 曲线 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$,现将链接的两曲线从 C^1 平滑为 C^2 。若使平滑后曲线的新控制顶点与原控制顶点的总距离以及两曲线的总内能同时极小,由式(35)可得调整后的控制顶点为

1) 距离与拉伸能同时极小。即 $p_1^{[3]} =$

C^1 平滑为 C^2 时,要使调整后的控制顶点与原控制顶点的总距离以及两条曲线的内能同时极小,只需将调整后的控制顶点 $p_{m-2}^{[3]}$ 与 $q_2^{[3]}$ 取为

$(-3.2875, 2.6375)$, $q_2^{[3]} = (3.3563, -3.6812)$ 。

2) 距离与应变能同时极小。即 $p_1^{[3]} = (-3.1556, 3.3944)$, $q_2^{[3]} = (3.4222, -3.3028)$ 。

3) 距离与曲率变化能同时极小。即 $p_1^{[3]} = (-3.3619, 5.2952)$, $q_2^{[3]} = (3.3190, -2.3524)$ 。

原 C^1 链接曲线与平滑后的 C^2 链接曲线如图8所示。

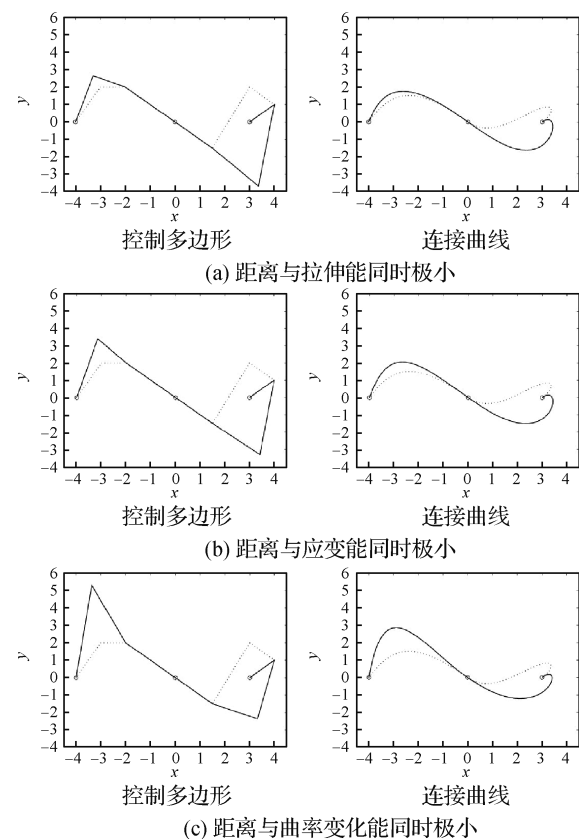


图8 距离与内能极小的 C^1 链接(虚线)
平滑为 C^2 链接(实线)

Fig. 8 Smoothing the linked curves from C^1 (dotted lines) to C^2 (solid lines) by distance and internal energy minimization ((a) distance and stretch energy minimization; (b) distance and strain energy minimization; (c) distance and curvature variation energy minimization)

3 不同极小化方法的对比

图9为例1、例3与例5中分别利用距离极小化、内能极小化、距离与内能同时极小化方法将 C^0

链接 Bézier 曲线平滑为 C^1 链接的结果对比。其中,短虚线为 C^0 链接曲线,长虚线为距离极小的 C^1 链接曲线,点划线为内能极小的 C^1 链接曲线,实线为距离与内能同时极小的 C^1 链接曲线。3种极小化方法的计算结果如表1所示。

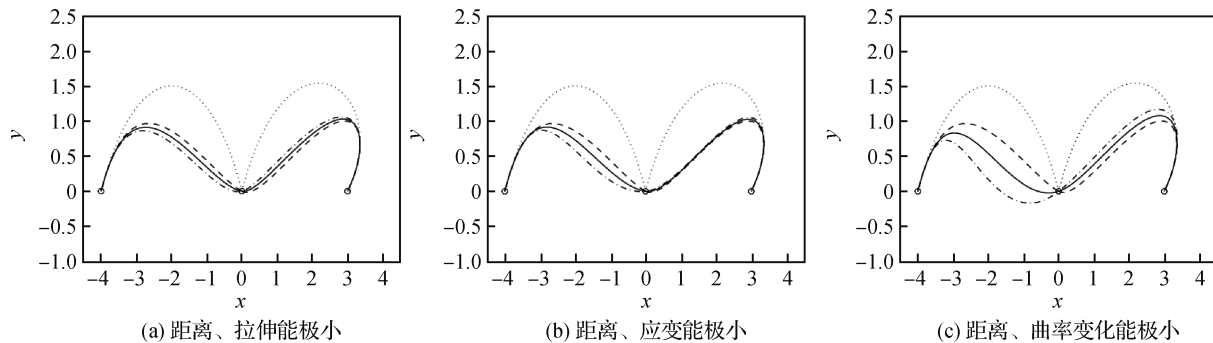


图9 不同极小化方法的 C^0 链接平滑为 C^1 链接

Fig. 9 Smoothing the linked curves from C^0 to C^1 by different minimization methods((a) distance and stretch energy minimization;(b) distance and strain energy minimization;(c) distance and curvature variation energy minimization)

表1 不同极小化方法的 C^0 链接平滑为 C^1 链接计算结果

Table 1 Calculation results of linked curves from C^0 to C^1 by different minimization methods

图形	距离极小		内能极小		距离与内能极小	
	距离	内能值	距离	内能值	距离	内能值
图9(a)	7.880 0	43.372 0	8.197 2	42.971 7	7.959 3	43.071 8
图9(b)	7.880 0	468.706 6	8.905 5	416.727 3	8.136 4	429.722 1
图9(c)	7.880 0	7.466 8E+3	11.792 0	4.762 8E+3	8.858 0	5.438 8E+3

图10为例2、例4与例6中分别利用距离极小化、内能极小化、距离与内能同时极小化方法将 C^1 链接 Bézier 曲线平滑为 C^2 链接的结果对比。其中,短虚线为 C^1 链接曲线,长虚线为距

离极小的 C^2 链接曲线,点划线为内能极小的 C^2 链接曲线,实线为距离与内能同时极小的 C^2 链接曲线。3种极小化方法的计算结果如表2所示。

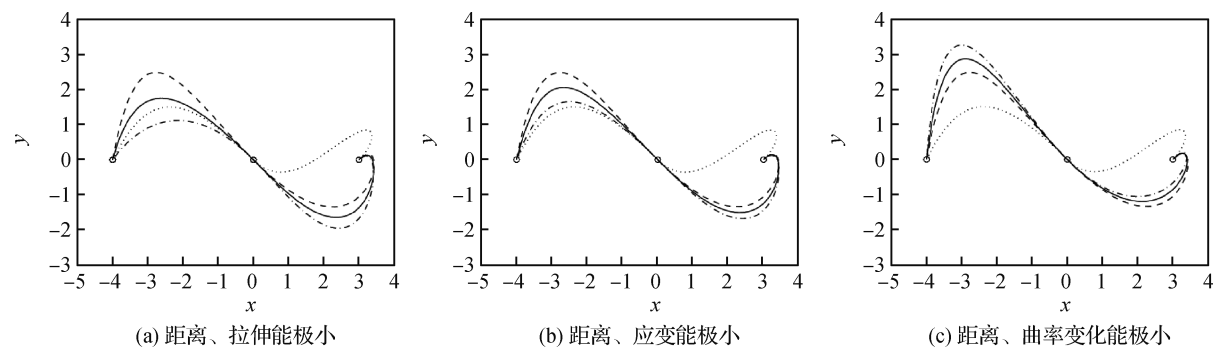


图10 不同极小化方法的 C^1 链接平滑为 C^2 链接

Fig. 10 Smoothing the linked curves from C^1 to C^2 by different minimization methods((a) distance and stretch energy minimization;(b) distance and strain energy minimization;(c) distance and curvature variation energy minimization)

表 2 不同极小化方法的 C^1 链接平滑为 C^2 链接计算结果
Table 2 Calculation results of linked curves from C^1 to C^2 by different minimization methods

图形	距离极小		内能极小		距离与内能同时极小	
	距离值	内能值	距离值	内能值	距离值	内能值
图 10(a)	29.000 0	80.982 9	44.570 3	63.900 0	32.892 6	68.170 7
图 10(b)	29.000 0	1.166 4E+3	34.065 6	991.333 3	30.266 4	1.035 1E+3
图 10(c)	29.000 0	1.665 6E+4	33.138 3	1.415 3E+04	30.034 6	1.477 9E+4

从表 1 和表 2 可以看出,1)采用距离极小化方法平滑链接 Bézier 曲线后,曲线的新控制顶点与原控制顶点的总距离明显小于另外两种方法。在实际工程应用中,当 Bézier 曲线的控制顶点均取自于实物时,若需要调整控制顶点的位置,往往也要求新控制顶点偏离原控制顶点的距离不宜太大,此时距离极小化方法较为适用。2)采用内能极小化方法平滑链接 Bézier 曲线后,曲线的总内能明显小于另外两种方法。在实际工程应用中,若要求曲线的能量尽可能小,此时内能极小化方法较为适用。另外,由于拉伸能、应变能与曲率变化能分别对应曲线的弧长、曲率和曲率变化率,故在实际应用中可根据具体需求选取相应的极小化方法。3)采用距离与内能同时极小化方法平滑链接 Bézier 曲线后,曲线的新控制顶点与原控制顶点的总距离以及曲线的总内能都介于另外两种方法之间。在实际工程应用中,若既要求新控制顶点偏离原控制的距离不宜太大,也希望曲线的能量尽可能小,此时距离与内能同时极小化方法是较好的选择。

4 结 论

为了通过调整控制顶点实现链接 Bézier 曲线的平滑,本文给出了利用控制顶点距离极小、曲线内能极小以及控制顶点距离与曲线内能同时极小等 3 种平滑 Bézier 链接曲线的方法。结果表明,利用距离极小化方法平滑链接曲线后,新控制顶点偏离原控制顶点的距离相对较小,适合于控制顶点取自于实物时的应用场合;利用内能极小化方法平滑链接曲线后,链接曲线的内能相对较小,适合于要求曲线能量尽可能小的应用场合;控制顶点距离与曲线内能同时极小化方法则同时兼顾了新旧控制顶点的距离和链接曲线的内能,适合于对两个目标都有要求的应用场合。

参考文献 (References)

Ahn Y J, Hoffmann C and Rosen P. 2014. Geometric constraints on quadratic Bézier curves using minimal length and energy. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 255: 887-897 [DOI: 10.1016/j.cam.2013.07.005]

Bock K and Stiller J. 2014. Energy-minimizing curve fitting for high-order surface mesh generation. *Applied Mathematics*, 5 (21): 3318-3327 [DOI: 10.4236/am.2014.521309]

Bock K and Stiller J. 2018. Optimizing triangular high-order surface meshes by energy-minimization. *Engineering with Computers*, 34(4): 659-670 [DOI: 10.1007/s00366-017-0565-3]

Erişkin H and Yücesan A. 2016. Bézier curve with a minimal Jerk energy. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 4 (2): 139-148 [DOI: 10.36753/mathenot.421467]

Farin G. 2002. *Curves and surfaces for CAD: a practical guide*. Amsterdam: Elsevier

Goodman T N T, Ong B H and Sampoli M L. 1998. Automatic interpolation by fair, shape-preserving, G^2 space curves. *Computer-Aided Design*, 30 (10): 813-822 [DOI: 10.1016/S0010-4485(98)00039-6]

Han Z H and Zhu C G. 2020. Construction of Bézier curves by energy constraints. *Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, 32(2): 213-221 (韩志红, 朱春钢. 2020. 能量约束下的 Bézier 曲线构造. *计算机辅助设计与图形学学报*, 32(2): 213-221) [DOI: 10.3724/SP.J.1089.2020.17917]

Jaklič G and Žagar E. 2011a. Planar cubic G^1 interpolatory splines with small strain energy. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235 (8): 2758-2765 [DOI: 10.1016/j.cam.2010.11.025]

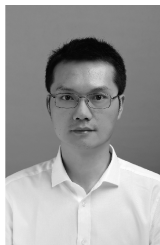
Jaklič G and Žagar E. 2011b. Curvature variation minimizing cubic Hermite interpolants. *Applied Mathematics and Computation*, 218(7): 3918-3924 [DOI: 10.1016/j.amc.2011.09.039]

Juhász I and Róth Á. 2019. Adjusting the energies of curves defined by control points. *Computer-Aided Design*, 107: 77-88 [DOI: 10.1016/j.cad.2018.09.003]

Li J C, Liu C Z and Zhang L. 2020. Shape-preserving planar quadratic Bézier interpolation spline with minimal stretch energy. *Journal of*

- Testing and Evaluation, 48 (3): 2432-2440 [DOI: 10.1520/JTE20190809]
- Li J C and Zhang L. 2020. Length and curvature variation energy minimizing planar cubic G^1 Hermite interpolation curve. Journal of Taibah University for Science, 14 (1): 60-64 [DOI: 10.1080/16583655.2019.1703248]
- Lin C Y and Dong J L. 1992. The Methods and Theories of Multi-Objective Optimizations. Changchun: Jilin Education Press (林铨云, 董加礼. 1992. 多目标优化的方法与理论. 长春: 吉林教育出版社)
- Lu L Z. 2015a. Planar quintic G^2 Hermite interpolation with minimum strain energy. Journal of Computational and Applied Mathematics, 274: 109-117 [DOI: 10.1016/j.cam.2014.07.015]
- Lu L Z. 2015b. A note on curvature variation minimizing cubic Hermite interpolants. Applied Mathematics and Computation, 259: 596-599 [DOI: 10.1016/j.amc.2014.11.113]
- Lu L Z, Jiang C K and Hu Q Q. 2018. Planar cubic G^1 and quintic G^2 Hermite interpolations via curvature variation minimization. Computers and Graphics, 70: 92-98 [DOI: 10.1016/j.cag.2017.07.007]
- Vassilev T I. 1996. Fair interpolation and approximation of B-splines by energy minimization and points insertion. Computer-Aided Design, 28(9): 753-760 [DOI: 10.1016/0010-4485(95)00087-9]
- Veltkamp R C and Wesselink W. 1995. Modeling 3D curves of minimal energy. Computer Graphics Forum, 14 (3): 97-110 [DOI: 10.1111/j.1467-8659.1995.cg143_0097.x]
- Xu G, Wang G Z and Chen W Y. 2011. Geometric construction of energy-minimizing Bézier curves. Science China Information Sciences, 54(7): 1395-1406 [DOI: 10.1007/s11432-011-4294-8]
- Xu G, Zhu Y F, Deng L S, Wang G Z, Li B J and Hui K C. 2019. Efficient construction of B-Spline curves with minimal internal energy. Computers, Materials and Continua, 58 (3): 879-892 [DOI: 10.32604/cmc.2019.03752]
- Yong J H and Cheng F. 2004. Geometric Hermite curves with minimum strain energy. Computer Aided Geometric Design, 21(3): 281-301 [DOI: 10.1016/j.cagd.2003.08.003]
- Zhang C M, Zhang P F and Cheng F. 2001. Fairing spline curves and surfaces by minimizing energy. Computer-Aided Design, 33 (13): 913-923 [DOI: 10.1016/S0010-4485(00)00114-7]

作者简介



李军成, 1982年生, 男, 教授, 主要研究方向为几何设计与计算。
E-mail: lijuncheng82@126.com

刘成志, 男, 副教授, 主要研究方向为几何设计与计算。
E-mail: it-rocket@163.com

刘珊君, 女, 助教, 主要研究方向为几何设计与计算。
E-mail: 444707390@qq.com