中图法分类号:TP391.41　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1006-8961(XXXX)XX-0001-26

论文引用格式:Yuan Xiaodie, Wan Jianxiong, Li Leixiao, Lin Hao. Survey of point cloud registration optimisation[J/OL]. Journal of Image and Graphics, XXXX:1-26. DOI: 10.11834/jig.260418.(袁箫蝶, 万剑雄, 李雷孝, 林浩. 点云配准优化综述[J/OL]. 中国图象图形学报,XXXX:1-26. DOI: 10.11834/jig.260418.)[DOI:10.11834/jig.260418]

点云配准优化综述

袁箫蝶[1],万剑雄[1,2],李雷孝[1,2,3],林浩[1*]

1. 内蒙古工业大学智能科学与技术学院,内蒙古自治区呼和浩特市　010080; 2. 内蒙古自治区北疆网络空间安全重点实验室,内蒙古自治区呼和浩特市　010080; 3. 内蒙古自治区基于大数据的软件服务工程技术研究中心,内蒙古自治区呼和浩特市　010080

摘　要:点云配准是三维计算机视觉与机器人感知中的核心问题,其本质是一个非凸优化问题,并旨在估计将不同坐标系下的点云对齐至统一参考系的最优刚体变换。该技术在自动驾驶、三维重建、机器人导航与数字孪生等领域具有广泛的应用。现有综述多从监督策略、中间变量或配准阶段等角度分类,尚缺乏从优化模型出发的系统性梳理。本文从优化视角出发,将现有点云配准方法划分为三类:基于几何距离最小化的方法以迭代最近点及其变体为代表,其直接最小化点云间的欧氏距离;基于鲁棒损失最小化的方法则在此基础上借助非线性核函数、截断机制或自适应加权策略抑制离群点的影响;基于概率分布差异最小化的方法将点云建模为概率分布,通过最小化分布间的差异完成配准,无需显式建立点对应关系。针对每类方法,本文系统梳理其优化目标的数学形式、核心设计思想及相应求解方式,并从收敛特性、求解方式及适用场景等方面进行横向对比。最后,本文对现有工作进行总结,并提出今后在该领域的研究建议与展望。

关键词:点云配准;非凸优化;几何距离;鲁棒损失;概率分布对齐

Survey of point cloud registration optimisation

Yuan Xiaodie[1], Wan Jianxiong[1,2], Li Leixiao[1,2,3], Lin Hao[1*]

1. College of Intelligent Science and Technology, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot, Inner Mongolia 010080, China; 2. Key Laboratory of Cyberspace Security in Northern Xinjiang, Inner Mongolia Autonomous Region, Hohhot, Inner Mongolia 010080, China; 3. Inner Mongolia Autonomous Region Software Service Engineering Technology Research Center Based on Big Data, Hohhot, Inner Mongolia 010080, China

Abstract: Point cloud registration is a core problem in 3D computer vision and robotic perception, aiming to estimate the optimal rigid-body transformation that aligns point clouds acquired in different coordinate systems into a unified reference frame. This problem is inherently non-convex, sensitive to initial pose, and prone to getting stuck in local optima. This technology has widespread applications in fields such as autonomous driving, 3D reconstruction, robotic navigation, industrial inspection and digital twins. In recent years, despite significant progress in deep learning methods, systematic surveys that categorise registration methods from an optimisation perspective remain scarce. Most existing surveys classify methods based on supervised strategies, intermediate representation types, or registration stages, failing to directly address the mathematical essence of the registration problem. The choice of optimisation objective fundamentally determines a method's convergence behaviour, sensitivity to noise and outliers, computational efficiency, and applicability across different sce-

收稿日期:2026-07-11;**修回日期**:2026-11-13

*通信作者:林浩 suzukaze_aoba@126.com

基金项目:鄂尔多斯市科技"突围"工程"揭榜挂帅"重大项目(项目编号:JB20251435)Supported by: Science and Technology "Breakthrough" Program - "Reveal the List" Major Project of Ordos City, China (项目编号:JB20251435)

© 中国图象图形学报版权所有

narios. From an optimization perspective, this paper classifies existing point cloud registration methods into three categories: methods based on minimizing geometric distance—represented by the iterative nearest-point method and its variants—which directly minimize the Euclidean distance between point clouds; methods based on minimizing robust loss, which, building on this foundation, utilize nonlinear kernel functions, truncation mechanisms, or adaptive weighting strategies to suppress the influence of outliers; and methods based on minimizing the difference between probability distributions, which model point clouds as probability distributions and achieve registration by minimizing the difference between these distributions without the need to explicitly establish point correspondences. The aim is to reveal the intrinsic connections between classical geometric methods, robust statistical methods, and probabilistic models. Methods based on minimising geometric distance directly minimise the Euclidean distance between corresponding points or the distance between a point and its projection onto a local geometric primitive within the target point cloud. This class of methods is represented by iterative nearest-point algorithms and their variants, and also includes deep learning methods that retain the same geometric objectives but replace explicit search with learnable matching and closed-form solutions with differentiable modules. This framework is intuitive, computationally efficient and widely applied; however, its reliance on explicit correspondences and quadratic penalisation of residuals renders it susceptible to the influence of outliers and initialisation errors. Methods based on minimising robust loss functions employ non-linear kernel functions, truncation mechanisms or adaptive weighting strategies to suppress the influence of outliers. Depending on the robust mechanism used, these can be further divided into three subclasses: M-estimator-based loss functions are solved via iterative weighted least squares, smoothly suppressing outliers; truncated loss functions discard correspondences with large residuals via hard truncation, maintaining robustness even when the proportion of outliers is extremely high, though this introduces non-convexity and computational complexity; adaptive robust loss dynamically adjusts the shape of the loss function during optimisation, reducing reliance on manual parameter tuning whilst ensuring convergence. Methods based on minimising the difference between probability distributions model point clouds as probability distributions—which may be either voxelised normal distributions or Gaussian mixture models—and achieve registration by minimising the statistical difference between the source and target distributions, without the need to explicitly establish point correspondences. This category of methods includes normal distribution transformation and coherent point drift, as well as deep probabilistic methods that have emerged in recent years, which use neural networks to parameterise point clouds as probability distributions and minimise divergence metrics in an end-to-end manner. Their lack of explicit point correspondence makes them particularly suitable for scenarios where reliable matching is difficult to establish. For the three categories of methods mentioned above, this paper systematically examines the mathematical formulation of their optimisation objectives, design principles and corresponding solution strategies, covering various technical approaches such as exact solutions, iterative weighted least squares, expectation-maximisation, Newtonian algorithms, semidefinite programming, asymptotic non-convex optimisation, branch-and-bound, and end-to-end deep learning. Finally, this paper summarises existing work and proposes research recommendations and future directions for the field.

Key words: point cloud registration; non-convex optimisation; minimisation of geometric distance; robust loss; probability distribution alignment

论文引用格式: Yuan X D, Wan J X, Li L X and L H. 2026. Survey of point cloud registration optimisation. Journal of Image and Graphics, XX(XX): XXX-XXX (袁箫蝶, 万剑雄, 李雷孝, 林浩. 2026. 点云配准优化综述. 中国图象图形学报, XX(XX): XXX-XXX) [DOI: 10.11834/jig.260418]

0 引 言

三维点云数据因其能够直接和精确地反映物理世界的空间拓扑与几何结构,已经成为自动驾驶、机器人同步定位与建图、以及高精度三维表面重建中的主要数据形式。近年来,激光雷达和RGB-D(red green blue-depth)相机等三维传感器技术日趋成熟,点云数据的获取也逐渐便捷,其数据规模随之迅速

© 中国图象图形学报版权所有

扩张。与传统的二维图像相比，点云不仅包含了物体的空间三维坐标，还直接提供了深度信息与表面法向量，这使得其在描述复杂非结构化环境时具有显著优势。然而，受传感器视场角限制、物体自遮挡以及采集过程中的物理约束影响，并且单次扫描通常仅能获取场景的局部信息。点云配准技术正是解决这一问题的关键，其旨在通过估计最优的旋转与平移参数，将不同坐标系下获取的点云对齐到统一参考系，从而消除多视角数据间的空间偏差。精确、高效的配准不仅是融合局部扫描以形成完整且连续的三维场景表示的前提，也是保障后续姿态估计、表面重建等任务精度的基础。

点云配准本质上是一个非凸优化问题，其核心是设计合适的目标函数以度量两片点云之间的对齐程度，并采用相应的优化策略求解最优刚体变换。根据被最小化的数学量，现有点云配准方法可划分为三大类：基于几何距离最小化的点云配准优化，其直接最小化变换后点云间的欧氏距离；基于鲁棒损失最小化的方法则在此基础上将几何残差代入非线性核函数或截断机制中，旨在降低大误差点对配准结果的影响；基于概率分布差异最小化的点云配准优化，其将点云建模为某种概率分布并通过最小化分布间的差异来估计位姿。每类优化目标在收敛特性与鲁棒性等方面各有不同，因此衍生出不同的求解方法。由于目标函数的特性不同，对应的优化算法也有区别。例如，标准几何距离由于具备闭式解，常直接使用奇异值分解（singular value decomposition，SVD）进行求解；鲁棒损失因为往往涉及非凸或非平滑函数，多采用迭代重加权最小二乘或半定松弛等方法；而概率模型则多依赖于期望最大化和牛顿法等迭代手段。尽管上述方法在各自适用场景中取得了显著进展，但配准优化仍面临三个核心挑战：其一是目标函数的非凸性导致对初始位姿敏感；其二是点云间缺乏显式点对对应关系，在低重叠或几何退化结构下尤为突出；其三是传感器噪声与遮挡带来的大量离群点干扰。

近年来，已有若干综述对点云配准方法进行了系统梳理，Zhang 等人（2024）按监督范式对有监督与无监督深度配准方法进行分类；Lyu 等人（2024）提出基于中间变量的分类法（intermediates based taxon，IBTaxon），从配准流程的中间模块角度进行梳理；武越等人（2023）从计算智能视角涵盖了深度学习、进化计算和模糊逻辑三大类方法；杨佳琪等人（2022）聚焦多视图点云配准，从粗配准与精配准两个阶段展开。然而，现有综述的分类维度多侧重于监督策略、中间变量或配准任务阶段，缺乏从优化模型出发进行系统性分类。本文从优化角度出发，按模型对现有方法进行分类。文中各类优化模型的决策变量均为刚体变换$(\boldsymbol{R},\boldsymbol{t})$，其中$\boldsymbol{R}\in\boldsymbol{SO}(3)$为旋转矩阵，$\boldsymbol{t}\in\mathbf{R}^3$为平移向量，差异主要体现在优化目标的构造方式和求解路径上。由于旋转矩阵可通过李代数等最小表示参数化，其正交性约束被隐式满足，故本文不单独讨论约束问题。基于此，本文将现有方法划分为几何距离最小化、鲁棒损失最小化和概率分布差异最小化三类，在每类中进一步梳理其优化目标与求解方式，并在第五章提出目前点云配准存在的问题以及进一步的发展趋势。其中，几何距离最小化确定目标函数中数据项的内部结构，即采用何种距离度量两片点云之间的不一致；鲁棒损失最小化则确定对点云间差异施加何种惩罚。从数学形式看，后者是前者在惩罚层面的推广，即当核函数取平方形式时，鲁棒损失最小化退化为几何距离最小化。此外，近年来深度学习方法的引入改变了配准目标函数的构建环节。传统方法通常将距离度量、惩罚函数或概率模型设定为固定的数学形式，优化过程主要求解刚体变换参数；深度学习方法则通过训练数据，将目标函数的部分要素转变为可学习的形式；一方面，部分网络通过学习特征空间，将其作为衡量点云相似度的新度量，进而替代了原始三维坐标下的欧氏距离；另一方面，部分网络直接预测鲁棒核的参数、权重或概率分布的均值与协方差，使得优化过程中的残差惩罚与分布对齐依赖于网络输出。图1梳理了点云配准优化的分类体系。

1 点云配准优化问题

1.1 配准问题的数学表示

点云配准是三维计算机视觉中的核心任务，其目标是估计一个将源点云$\boldsymbol{P}=\{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m\}$与目标点云$\boldsymbol{Q}=\{\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_n\}$在空间中对齐的刚体变换，其中$m,n\in\mathbf{N}$分别为源点云和目标点云的点数，$\boldsymbol{p}_i$，$\boldsymbol{q}_j\in\mathbf{R}^3$为三维空间中的点向量。设刚体变换为$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{R},\boldsymbol{t})\in\boldsymbol{SE}(3)$，其中$\boldsymbol{R}\in\boldsymbol{SO}(3)$为旋转矩阵，$\boldsymbol{t}\in\mathbf{R}^3$为平移向量，使得变换后的源点云和目标点云达到

© 中国图象图形学报版权所有

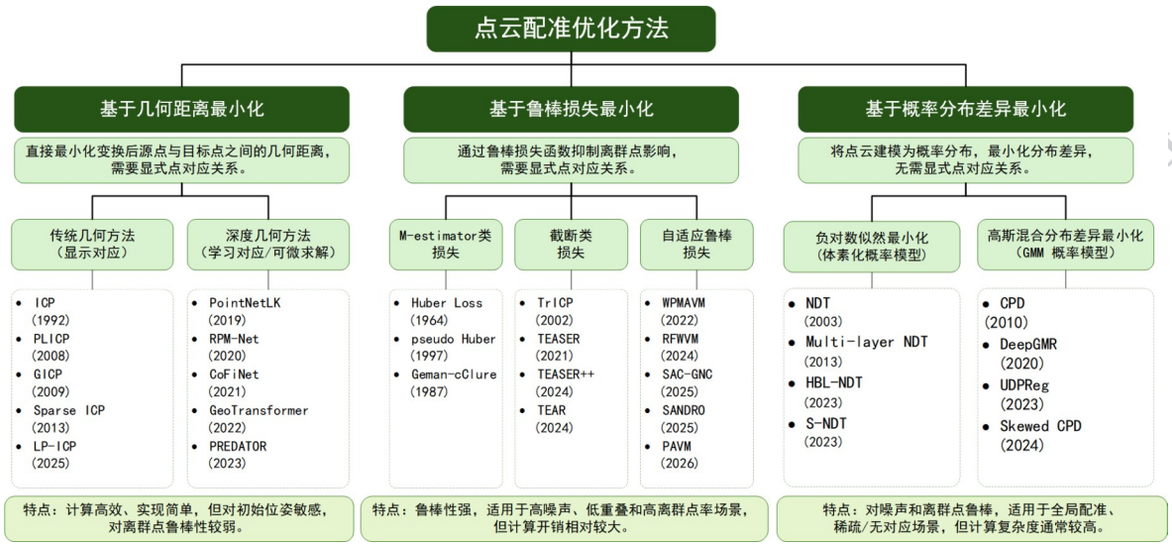


图1　点云配准优化方法分类框架

Fig. 1　Taxonomy of point cloud registration optimization methods

最优对齐，则该问题可形式化为如下优化问题：

$$\boldsymbol{T}^{*}=\underset{R,t}{arg\ min}\ \mathcal{L}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{P}),\boldsymbol{Q}) \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{T}^{*}$ 表示最优刚体变换，$\mathcal{L}$ 是指用于度量变换后源点云与目标点云之间的不一致程度的损失函数，损失函数通常可分解为数据项与正则项之和：

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\text{data}}\left(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{P}),\boldsymbol{Q}\right)+\lambda\mathcal{L}_{\text{reg}}(\boldsymbol{T}),\ \lambda>0 \tag{2}$$

式中数据项 $\mathcal{L}_{\text{data}}$ 是优化目标的核心，用于衡量变换后的源点云与目标点云之间的不一致程度；正则项 $\mathcal{L}_{\text{reg}}$ 用于约束变换的平滑性（如非刚性配准）或加入额外的约束条件；λ 为平衡系数；在刚性配准中，正则项通常可以省略，$\mathcal{L}$ 的不同形式决定了不同的优化目标（Myronenko 和 Song，2010）。

在构建上述优化问题时，决策变量的构成随配准策略的不同而有所差异。在传统方法中，除了基础的刚体变换参数外，为应对复杂的非凸性或离群点干扰，往往需要将对应关系、点对权重或概率分布的均值与协方差等作为辅助变量引入优化过程。而对于深度学习方法，则需进一步区分网络训练与配准推断两个阶段，训练阶段的核心是优化网络参数，推断阶段则利用网络输出建立软对应、构造自适应权重或直接回归变换参数。这种变量构成与优化阶段的差异，也从另一个侧面反映了不同配准目标函数的设计逻辑。

1.2　配准优化的核心挑战

从优化角度看，点云配准本质上是一个非凸优化问题，Lian 等人（2026）指出该问题的目标函数具有非凸耦合特性，启发式方法易陷入局部极小值，现有全局求解器因下界过松而收敛缓慢。综合近年的文献，配准优化面临以下三方面主要困难。

其一，目标函数的非凸性导致对初始位姿比较敏感。由于点云配准的目标函数通常是非凸的，因此传统方法易陷入局部最优解。这个问题在低重叠率和存在大量离群点的情况下尤为突出。采样共识渐进非凸性（sample consensus for adaptive graduated non-convexity，SAC-GNC）方法（Piedade 等，2025）的研究表明传统的渐进非凸性（graduated non-convexity，GNC）方法虽能改善这一问题，但仍需针对不同问题手动调整形状参数和退火计划，其缺乏自适应性，该工作提出通过采样多个退火选项并评分模型来动态调整形状参数，在三维配准和定位与地图构建（simultaneous localization and mapping，SLAM）等任务上显著优于现有方法。

其二，点云间缺乏显式的点对点对应关系。在配准过程中的源点云与目标点云之间的对应关系是未知的，因此需要同时估计变换参数和对应关系。这一耦合特性增加了优化的复杂性。万航和吴晓群（2025）指出其对应关系的求解是刚性点云配准流程中的核心步骤，也是影响配准精度的关键因素。现有的特征提取与匹配方法在弱纹理和重复结构场景中仍面临挑战。

其三，环境干扰及物体遮挡等因素产生大量离群点，测量噪声会引起点坐标偏差，非重叠区域和错误匹配则可能形成不符合当前刚体变换的对应点。

© 中国图象图形学报版权所有

真实工业场景中普遍存在结构偏差、局部缺失、噪声漂移与密度不均等问题，这些测量固有缺陷使得点云中包含大量异常点，因此严重制约优化稳定性。Wu等人(2026)提出的PAVM(progressive and adaptive variance minimization)算法明确指出这些缺陷的存在导致现有方法难以稳定地适用，该算法通过渐进式去伪权重策略，在配准初期确保所有点对参与优化以避免误判，以及自适应地抑制异常点的影响，其可以在复杂工业场景中实现了超过30%的配准精度提升和约40%的收敛速度加快。

此外，平面和圆柱等几何退化结构的存在进一步加剧了约束不足的问题。另一方面，在基于深度学习的方法中，当面临跨尺度、跨传感器的场景时，网络特征提取与匹配的零样本泛化能力同样面临严峻考验。无论是场景中的几何退化，还是数据分布偏移带来的泛化瓶颈，要有效提升算法的鲁棒性，最终仍取决于优化目标的选择与设计。因为优化目标直接决定了方法的性能上限、对噪声的敏感程度及收敛特性，也决定了后续预处理、特征增强或匹配修正等求解策略能够发挥作用的空间。

2 基于几何距离最小化的点云配准优化

基于几何距离最小化的点云配准优化的核心思想是将配准问题转化为源点云与目标点云之间空间几何差异的极小化问题，通过迭代优化逐步求解最优刚体变换。该类方法的目标函数通常具有非凸性，迭代求解又依赖最近邻搜索建立的对应关系，非凸性与对应关系不确定性是该类方法在建模与求解中面临的两个主要问题。本章从优化目标和求解方式两个维度，系统梳理从传统传统迭代最近点(iterative closest point，ICP)到深度学习方法的几何距离最小化技术脉络。几何距离最小化的通用形式可表示为：

$$\min_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}} \sum_{i=1}^{N} d(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}_i) \tag{3}$$

式中$\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{SO}(3)$为旋转矩阵，$\boldsymbol{t} \in \mathbf{R}^3$为平移向量，$d(\cdot,\cdot)$为某种几何距离度量，通常取欧氏距离或点到面距离的平方等形式。根据距离定义的不同，优化目标可划分为多种形式。

2.1 优化目标

基于几何距离最小化的方法以最小化源点云与目标点云之间的几何误差为优化目标，根据几何误差定义方式的不同，可进一步分为点到点、点到面和点到线距离等典型模型。

点到点距离是最基础的几何距离度量，即给定源点云中的一点$\boldsymbol{p}_i$经变换后为$\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{t}$，其在目标点云中的对应点为$\boldsymbol{q}_i$，优化目标为对应点之间欧氏距离的平方和：

$$E(\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}) = \sum_{i=1}^{N} /\!/ \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{t} - \boldsymbol{q}_i /\!/ ^2 \tag{4}$$

该目标由Besl和McKay(1992)提出的ICP算法采用，其每次迭代中先通过最近邻搜索建立点对应，再最小化上述目标获得刚体变换，交替进行直至收敛。该算法的简洁性和有效性使其成为精配准领域的奠基性工作。然而，点到点距离对离群点高度敏感，平方项会放大异常误差且收敛速度为线性，因此其受初始位姿影响较大。

点到面距离由Chen和Medioni(1992)提出，该方法不再将源点匹配到目标点云中的离散点，而是该度量利用目标点的法向量构建误差函数，将源点到目标局部切平面的投影距离作为优化目标：

$$E(\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}) = \sum_{i=1}^{N} \left[(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{t} - \boldsymbol{q}_i) \cdot \boldsymbol{n}_i \right]^2 \tag{5}$$

式中$\boldsymbol{n}_i$为目标点对应位置的单位法向量。Rusinkiewicz和Levoy(2001)对其做了进一步研究，将点到面距离作为提升收敛速度的有效手段。相较于点到点距离，点到面距离可达到二次收敛，收敛速度更快，且对平面区域的约束更强。然而，点到面距离对法线估计误差敏感，在高曲率区域优化过程易出现切线方向的定位偏差。

点到线距离是ICP的另一种重要变体，Censi(2008)正式提出点到线迭代最近点(point-to-line iterative closest point，PLICP)，使用点到线度量并给出了精确闭式求解方法，即给定源点云中的一点$\boldsymbol{p}_i$经变换后为$\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{t}$，其在目标点云中的对应直线由直线上一点$\boldsymbol{q}_i$和单位方向向量$\boldsymbol{n}_i$定义，优化目标可表示为：

$$E(\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}) = \sum_{i=1}^{N} /\!/ (\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{t} - \boldsymbol{q}_i) \times \boldsymbol{n}_i /\!/ ^2 \tag{6}$$

式中×表示向量叉积。点到线距离同样具有二次收敛特性，且对较大的初始位移误差不敏感。然而，点到线距离仅约束点在与直线垂直方向上的偏移，沿直线方向的平移不受约束，因此在以直线结构为主

© 中国图象图形学报版权所有

的环境中易产生退化，PLICP在室内结构化场景的SLAM任务中得到了广泛应用。

对称点对面距离是对点到面距离的重要改进，Rusinkiewicz(2019)提出对称化目标函数，同时利用源点云和目标点云的联合法向信息构造误差方向。其误差函数可表示为：

$$E(\boldsymbol{R},\boldsymbol{t})=\sum_{i=1}^{N}\left[(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{t}-\boldsymbol{q}_i)\cdot(\boldsymbol{R}\boldsymbol{n}_{p_i}+\boldsymbol{n}_{q_i})\right]^2 \tag{7}$$

式中$\boldsymbol{n}_{p_i}$和$\boldsymbol{n}_{q_i}$分别为对应点的法向量。传统点到面距离仅将目标点云的法向量进行优化，而对称形式将源点云法向量也变换到同一坐标系后与目标法向量相加，使优化过程更加符合真实曲面之间的对称关系。在保持点对面计算效率的同时，提升了收敛速度并扩大了收敛域。

Wang等(2019)提出的深度最近点(deep closest point，DCP)和Aoki等(2019)提出的PointNetLK(pointnet-lucas-kanade)等早期的深度方法仍直接最小化几何误差，区别在于对应关系由最近邻搜索变为可学习的软匹配。而在近期的研究中，被最小化的数学量进一步从显式的三维坐标欧氏距离，转变为特征空间中的匹配损失或几何一致性损失，Hao等(2023)提出的旋转不变Transformer(rotation-invariant transformer，RoITr)、Xiong等(2024)提出的骨架先验嵌入注意力学习(skeletal prior embedded attention learning，SPEAL)、Yu等(2023)提出的先验嵌入显式注意力学习(prior-embedded explicit attention learning，PEAL)以及Liu等(2023)提出的RegFormer等方法，分别通过旋转不变Transformer、骨架先验注入、重叠先验引导以及投影感知全局特征提取，在特征空间内建立更可靠的对应关系，其优化目标均为特征匹配损失。

为进一步提升目标函数在复杂场景下的泛化性，近期方法开始引入大规模预训练视觉模型与生成式建模。RoMa(Edstedt等，2024)与ZeroMatch(Jiang等，2025)等方法利用预训练视觉表征或Stable Diffusion零样本特征，以最小化特征匹配歧义为目标，为低重叠或重复结构提供更可靠的软对应支撑。此外，生成式模型也被用于重构优化目标本身。Zheng等(2025)提出的RARE(refine any registration of pairwise point clouds via zero-shot learning)则利用预训练扩散网络提取的特征与现有几何特征融合，以最小化融合后的匹配损失。上述方法虽然本质上仍是寻找正确的点对对应与变换，但被最小化的数学量已转变为特征相似度或概率去噪目标。

2.2 求解方式

优化目标的实现依赖于具体的求解策略，几何距离最小化方法的求解方式经历了从传统迭代求解到深度可微求解的演进。

传统几何距离方法通过交替执行对应关系建立与变换参数求解来完成配准，直至满足收敛条件。在对应关系建立阶段，每次迭代中通过最近邻搜索为源点云中的每个点寻找目标点云中距离最近的点，并建立点对点对应关系。对于点到面距离和点到线距离，还需计算目标点云的法向量或方向向量。在变换参数求解阶段，求解策略随着优化目标的不同而有所区别，其中点到点距离通过SVD最小化对应点之间的欧氏距离平方和获得闭式解；点到面距离通过线性最小二乘求解，每次迭代求解一个6×6线性系统；点到线距离由PLICP给出了精确闭式求解方法；对称点对面距离同样采用线性最小二乘，但雅可比矩阵包含联合法向信息。

在收敛特性上，点到点ICP收敛速度为线性，点到面ICP和点到线ICP可达二次收敛，其中Besl和McKay(1992)证明了ICP算法保证收敛到局部最小值。然而，传统方法依赖良好初始位姿，在高曲率或重复结构区域存在定位偏差或误匹配风险。面向特定场景的ICP变体不断出现，Yue等(2025)提出的LP-ICP(localizability-aware ICP)将点到线和点到面距离度量相结合，其通过可定位性检测与处理模块在非结构化环境下沿病态方向施加额外约束；Lee等(2024)提出的GenZ-ICP(generalizable and degeneracy-robust ICP)通过自适应整合点到点和点到面误差度量，增强了激光雷达位姿估计在退化环境中的鲁棒性；Dynamic-ICP(Wang等，2026)将多普勒速度信息融入配准框架，并通过稳健回归估计自运动；Li等(2016)则采用Majorization-Minimization算法(Fischer等，2025)解耦束调整中的扫描位姿，实现了大规模点云束调整的高效求解。

深度学习方法从对应关系建立和变换求解两个环节改变了几何距离的求解路径。传统方法依赖硬最近邻，即为每个源点仅匹配一个目标点；深度方法则通过特征空间中的相似度计算建立软对应关系，每个源点可与多个目标点以不同概率匹配。DCP(Wang等，2019)采用Transformer建立软对应，并将

© 中国图象图形学报版权所有

SVD分解构建为可微层，使梯度能从配准误差回传至特征提取网络；Yew和Lee(2020)提出的鲁棒点匹配网络(robust point matching network，RPM-Net)使用可微Sinkhorn层和退火算法获得点对应关系的软分配。在变换求解环节，深度方法将求解过程设计为可微操作以支持端到端训练；PointNetLK(Aoki等，2019)将PointNet与Lucas-Kanade算法展开为可训练循环网络；GeoTransformer(Qin等，2022)在降采样超点上建立对应后传播至密集点云，无需随机采样一致性(random sample consensus，RANSAC)即可估计变换；Yu等(2021)提出的CoFiNet(coarse-to-fine network)提取从粗到细的层次化对应，逐级缩小搜索空间；Bai等(2021)提出的PointDSC(deep spatial consistency)利用空间一致性网络筛选匹配点对并剔除离群点。

由于端到端模型高度依赖训练数据的分布，在面临其他传感器或场景时，其求解能力往往受限。为此，近期研究开始探索不依赖重新训练，而是从预处理和特征提取等流程前端入手的求解策略。BUFFER-X(Seo等，2025)指出现有深度配准方法的泛化瓶颈主要受限于固定的体素尺寸与搜索半径、学习型关键点检测器的域外鲁棒性不足以及绝对坐标放大的尺度差异。其对应的求解策略是自适应确定体素与搜索半径、以最远点采样替代学习型检测器，并对局部块进行尺度归一化，从而在无需重新训练网络的前提下实现多场景的零样本配准。研究者进一步提出了多种免训练或弱依赖的求解增强机制，RARE(Zheng等，2025)利用预训练扩散模型提取的深度特征来精化对应关系，以提升匹配的判别力；DepthI2P(Huang等，2026)则将跨模态配准转化为深度分布对齐任务，实现免训练的求解流程；Haitman等提出的C-GenReg(consistent generative registration)(2026)将匹配问题生成式地转换到图像域，借助预训练视觉基础模型完成对应关系的求解。这些工作共同表明对于几何距离最小化类方法，泛化能力的改善和求解精度的提升，不仅可以通过设计更复杂的网络架构来实现，也可以通过引入生成式先验、预训练模型或显式的几何预处理，建立起更可靠的对应关系。

总体而言，传统求解与深度可微求解的本质差异在于传统方法采用硬最近邻建立显式对应，并通过SVD闭式解或线性最小二乘求解变换，依赖外层迭代交替进行和无需训练数据，因此其计算开销主要集中在最近邻搜索。深度方法则采用软对应，通过可微SVD、可微迭代或前端预处理策略来求解，尽管推理效率取决于网络复杂度或前处理模块，但其高度依赖标注数据进行训练。因此传统方法无需训练、可解释性强、计算高效，其在工程中仍广泛使用；深度方法在低重叠率、复杂场景下精度更高，但受限于数据依赖，其跨场景泛化能力仍有待提升。

3 基于鲁棒损失最小化的点云配准优化

基于鲁棒损失最小化的点云配准优化重点处理真实场景中离群点等对配准稳定性的干扰。第二章所述的几何距离最小化在理想条件下表现良好，但传感器噪声、环境干扰以及非重叠区域的存在会产生大量离群点，当出现误差较大的离群点时，其单个点对最小化结果的影响可能超过所有内点总和。第二章的残差惩罚仍为平方形式，平方项会放大离群点的影响，仅靠更换距离度量难以从根本上解决。本章讨论在保留距离残差的前提下，通过核函数、截断或自适应加权改变惩罚形式。鲁棒损失的基本思想是对残差进行非线性变换，抑制离群点对优化过程的贡献。根据鲁棒机制的不同，该类方法可划分为M-估计器(M-estimator)损失、截断类损失和自适应鲁棒损失三类。图2展示了鲁棒损失度量方法从M-estimator到自适应鲁棒损失的主要发展历程。

3.1 M-estimator类损失

由Huber(1992)提出的M-estimator是一类通过鲁棒核函数改造残差度量的估计方法。在点云配准中，在点云配准中，M-estimator类损失的核心思想是将最小二乘中的平方项替换为非线性核函数$\rho(r)$，使大残差对优化目标的影响被有效抑制，从而削弱离群点对配准结果的影响。

3.1.1 优化目标

M-estimator给定对应点对集合$\{(\boldsymbol{p}_i,\boldsymbol{q}_i)\}_{i=1}^{N}$，并定义残差$r_i=\#\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{t}-\boldsymbol{q}_i\#$，其通用形式为：

$$\min_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}}\sum_{i=1}^{N}\rho(r_i) \tag{8}$$

式中$\rho(\cdot)$为鲁棒核函数，r_i为第i个对应点的标量残差。对于一般的残差变量r，当$\rho(r)=r^2$时退化为标准最小二乘，对大残差敏感；当$\rho(r)$的增长慢于二次

© 中国图象图形学报版权所有

函数时，离群点的影响被抑制。而单个大残差点对目标函数的影响就可能超过全体内点，因此采用鲁棒核函数是必要的。Babin等人(2019)系统比较了多种鲁棒函数在ICP算法中的表现，在超过两百万次配准测试中考察了不同环境类型下的效果。其中大多数鲁棒函数在正确调参后性能相近，但Cauchy等函数在不同环境类型下表现更为稳定；常用的鲁棒核函数包括以下几种：

Huber损失(Huber, 1992)是最常用的M-estimator核函数之一，其定义为：

$$\rho_{\mathrm{Huber}}(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}r^2, & |r|\leqslant\delta\\ \delta|r|-\dfrac{1}{2}\delta^2, & |r|>\delta\end{cases},\ \delta>0 \tag{9}$$

式中δ为阈值参数。Huber损失在小残差时保持二次特性以维持快速收敛，在大残差时转为线性惩罚以抑制离群点影响，这种分段设计使其在鲁棒性和收敛性之间取得平衡。基于Huber损失的ICP变体(Zhao等，2015；Tan等，2023)已被用于多帧点云的配准任务中。

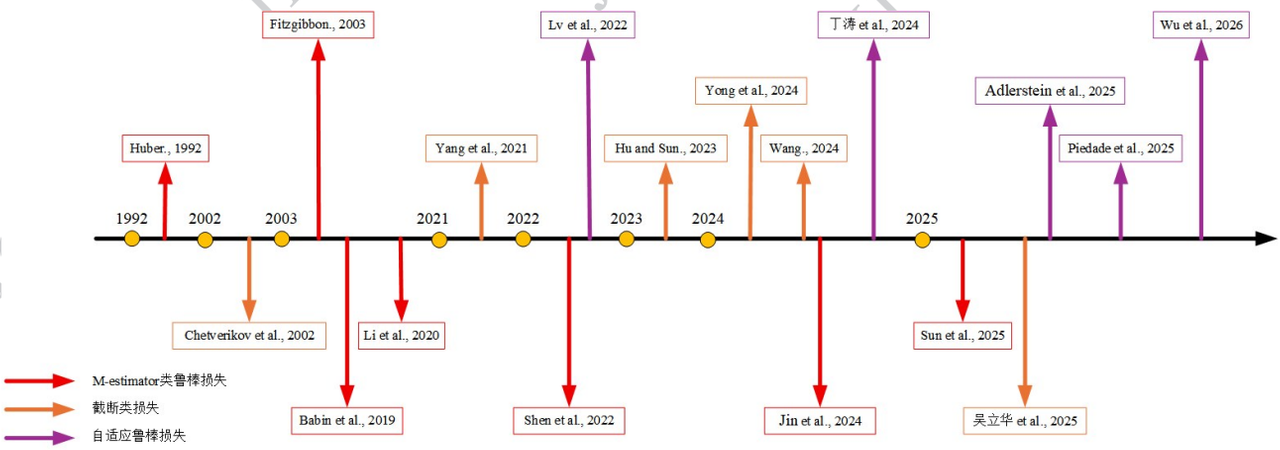


图2　鲁棒损失度量方法发展时间线

Fig. 2　Development timeline of robust loss metrics

伪Huber损失(pseudo Huber loss)(Bube和Langan，1997)是Huber损失的一种可微平滑近似，在保持Huber损失鲁棒特性的同时具备更好的可微性。针对含大量噪声和离群点的三维点云相似性配准问题，研究者(Guo等，2024)通过引入伪Huber损失函数建立了相似性配准优化模型。

Cauchy损失定义为：

$$\rho_{\mathrm{Cauchy}}(r)=\frac{\sigma^2}{2}\ln\left[1+\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\right],\ \sigma>0 \tag{10}$$

式中σ是尺度参数，决定残差多大时开始被抑制；σ越大，损失函数对中残差的惩罚越温和；σ越小，抑制行为发生得越早。并且其具有更长的尾部和对极端离群点的抑制更强。在多源地形点云配准中，Cauchy M-estimator被用于缓解异常对应关系的影响；Cauchy-AdaV2方法(Sun等，2025)将Cauchy M-estimator与区域自适应加权策略相结合，通过坡度和粗糙度将地形划分为区域并构建空间异质性加权函数，同时采用Cauchy残差抑制机制；此外，基于Cauchy和Welsch函数的加权ICP算法(Xin等，2021)也被用于部分点云的快速精配准。

Geman-McClure损失定义为：

$$\rho_{\mathrm{GM}}(r)=\frac{r^2}{r^2+\sigma^2},\ \sigma>0 \tag{11}$$

其饱和特性使得大残差处的梯度趋近于零，几乎完全剔除异常对应点的影响。该损失函数已被用于无监督点云配准的端到端模型训练。即研究者(Jiang等，2021)将点云配准任务建模为马尔可夫决策过程，并提出了嵌入交叉熵方法的端到端深度模型和构建了基于Geman-McClure估计器的损失函数来训练配准模型。该损失函数的亚线性收敛速度可以有效削弱离群点对配准精度的负面影响；在刚性配准的具体实现中，也有工作(Yang等，2025；刘蕴萱等，2026)直接最小化源点云与目标点云之间的Geman-McClure损失。

在深度鲁棒配准中，M-estimator核函数常被直接用作网络训练阶段的损失项或输出端的回归目

© 中国图象图形学报版权所有

标。Jiang等(2021)将Geman-McClure估计器用作无监督端到端模型的训练损失，把配准建模为马尔可夫决策过程，优化变量由单次配准的$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{t}$变为网络参数并利用其亚线性收敛削弱离群点影响。在部分有监督深度配准网络中，Huber损失也常被直接用作变换回归阶段的训练目标，用于约束预测变换与真实变换之间的偏差。此时，鲁棒性由训练数据分布与损失形态共同决定，推理时不再逐次调整权重。

除了将经典核函数直接迁移至网络或求解框架外，近期研究也开始从核函数本身的构造来调整优化目标。Tang和Peng(2026)提出的Cauchy-均方误差(mean squared error，MSE)复合核将Cauchy分布对重尾噪声的抑制特性与MSE对局部细节的敏感性结合为单一损失函数，用于端到端配准网络的训练。该复合核的优化目标在于避免单一核函数在抑制离群点与保持内点精度之间的过度取舍，使网络在显著噪声下降低对损失超参数调优的依赖。在核函数的选择上，Zhao和Xu(2025)提出的边缘-三角形相容性配准方法(edge-triangle compatibility for point cloud registration，ETC-PCR)在由粗到细的相容性筛选后，将位姿估计环节的鲁棒函数设定为Welsch损失，利用其在大残差处梯度迅速衰减的特性抑制极端误匹配。此外，Hu等(2025)提出的粒球迭代最近点(granular-ball iterative closest point，GRICP)将多核相关熵用作ICP的损失函数，通过多个核宽度的组合来刻画配准误差的分布，使优化目标在粗尺度的噪声抑制与细尺度的精度保持之间取得平衡。这些工作表明M-estimator类损失在配准中的演进不仅体现为向学习框架的迁移，也体现为对残差惩罚函数形式的进一步调整。

3.1.2 求解方式

M-estimator类损失的求解通常采用迭代重加权最小二乘(iteratively reweighted least squares，IRLS)框架。在IRLS的每次迭代中，根据当前的残差重新计算每个对应点的权重$w_i=\rho'(r_i)/r_i$，然后将原问题转化为加权最小二乘问题进行求解。

对于Huber损失，权重函数为：

$$w_i=\begin{cases}1, & |r_i|\leqslant\delta\\ \dfrac{\delta}{|r_i|}, & |r_i|>\delta\end{cases} \tag{12}$$

这种权重动态更新的机制与ICP的最近邻迭代有相似之处，但IRLS的权重不仅依赖于对应关系，还依赖于残差的统计分布，从而能够更精准地识别和抑制离群点。研究(Aftab 和 Hartley，2015)表明IRLS方法可用于最小化Huber函数和Cauchy函数等大多数常见的鲁棒M-estimator。

Fitzgibbon(2003)首次将M-estimator思想系统性地引入点云配准领域，通过IRLS框架和Levenberg Marquardt算法直接最小化配准误差。此后，M-estimator与ICP的结合成为鲁棒配准的经典框架。Ding等人(2019)基于自适应距离函数(adaptive distance function，ADF)和M-估计方法，提出了基于IRLS的IRLS-ADF非线性优化模型，用于自由曲面检测中的点云配准，并且该方法的收敛性也得到了分析；Bergström和Edlund(2014)使用鲁棒M-估计技术限制离群点的影响，其具体采用IRLS将鲁棒性融入改进的ICP算法中。然而，M-estimator也存在一定的局限性，由IRLS求解的M-估计通常仅适用于离群点率较低的情形(Li 等，2021)。当离群点比例超过该阈值时，M-estimator的性能会显著下降；此外，M-estimator本质上是一种非线性加权迭代方法，因此增加了ICP算法的计算复杂度。

3.2 截断类损失

M-estimator通过鲁棒核函数对残差进行非线性变换，离群点的影响受到抑制但并未被完全消除。截断类损失采取了不同的思路，即直接剔除大误差的对应点，使其完全不参与优化。其核心思想来源于稳健统计中的最小截断二乘(least trimmed squares，LTS)方法，其将残差排序后只保留最小的部分进行优化，从而有效抑制离群点的影响。

3.2.1 优化目标

固定保留数量的最小修剪平方目标可表示为：

$$\min_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}}\sum_{i\in\mathcal{I}}\left\|\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{t}-\boldsymbol{q}_i\right\|^2 \tag{13}$$

式中$\mathcal{I}$为保留的对应点索引集合，通常由残差排序后最小的K个点构成。与固定保留点数的修剪策略不同，另一种截断方式是基于残差阈值，其优化目标为：

$$\min_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}}\sum_{i=1}^{N}\min\left(r_i^2,\bar{c}^2\right) \tag{14}$$

式中$r_i=\left\|\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{t}-\boldsymbol{q}_i\right\|$为第$i$个对应点的残差，$\bar{c}$为截断阈值。该代价函数对残差小于阈值的点按平方惩罚，超过阈值后单项代价恒定为$\bar{c}^2$。截断操作

© 中国图象图形学报版权所有

的引入虽然显著提升了鲁棒性，但也使优化问题变为非凸且不连续，难以直接用梯度下降类方法求解。根据具体截断策略的不同，截断类损失可进一步分为以下几种形式。

由Chetverikov等人（2002）提出的修剪迭代最近点（trimmed iterative closest point，TrICP）是截断类损失在点云配准中的奠基性工作，TrICP的优化目标为最小化截断后的距离平方和：

$$\min_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}} \sum_{i=1}^{K} r_{(i)}^2 \tag{15}$$

式中$r_{(1)} \leqslant r_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant r_{(N)}$为排序后的残差，由预设的重叠率参数决定。该优化目标要求预先确定重叠率参数。吴立华等（2025）提出的双向修剪迭代最近点（bidirectional trimmed iterative closest point，Bi-TrICP）进一步将单向截断扩展为双向截断，其优化目标为同时最小化正向和反向两个方向的截断残差和。

由Yang等人（2021）提出的TEASER采用截断最小二乘（truncated least squares，TLS）代价函数，其中截断阈值c作为超参数预设。与TrICP需预设保留点数K不同，TEASER的阈值直接作用于残差数值，配合半定松弛和渐进非凸性实现全局求解。Huang等人（2024）提出的截断逐项绝对残差（truncated entry-wise absolute residuals，TEAR）是采用与TLS不同的截断损失形式：

$$\min_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}} \sum_{i=1}^{N} \min\left(\left|r_i\right|, \bar{c}\right) \tag{16}$$

式中残差定义为$r_i = /\!/ \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{t} - \boldsymbol{q}_i /\!/$，与TLS采用$l_2$损失的平方和不同，TEAR最小化的是截断逐项绝对残差，即采用l_1损失形式。该优化目标对沿平移方向的退化问题具有更强的鲁棒性，且对于具有不同噪声方差的对应点具有更好的处理能力。

另一类截断类方法将配准问题表述为寻找最大一致对应集合的形式：

$$\max_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}} \left|\left\{i \,\middle|\, /\!/ \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{t} - \boldsymbol{q}_i /\!/ \leqslant \epsilon\right\}\right| \tag{17}$$

该目标最大化满足内点阈值ϵ的对应点数量，即等价于最小化被截断剔除的离群点数量。Laserna等（2025）提出的基于团的鲁棒点云配准（clique-based robust point cloud registration，CliReg）方法和Zhang等（2023）提出的最大团（maximal cliques，MAC）方法基于该优化目标，通过寻找最大的一致对应集合来剔除离群点；CLIPPER+算法（Fathian和Summers，2024）同样基于此目标，通过图上的最大团搜索实现内点选择。

上述优化目标的一个共同特点是其目标函数中均包含取最小值截断、排序后截断或阈值判断等截断操作，这使得优化目标本身具有非凸性和组合特性。即截断操作带来的不可微性和离散选择使优化目标不是连续可微的，也无法用常规的梯度下降或最小二乘方法直接求解。截断类损失的非凸性和离散性决定了其求解必须借助半定松弛、分支定界或图搜索等专门策略，具体内容将在3.2.2节中详述。与M-estimator对离群点赋予连续权重不同，截断类损失通过取舍决策将其彻底排除。

3.2.2　求解方式

截断类损失的求解难度主要来自两个方面：其代价函数是非凸的，同时截断操作涉及哪些点保留、哪些点剔除的离散决策。这两点叠加使得问题无法直接通过常规优化方法求解，现有方法从不同角度切入这一问题，形成了不同的求解方法。

TrICP（Chetverikov等，2002）采用与经典ICP类似的迭代框架，但在每次迭代中嵌入截断操作。即在每次迭代中，首先建立点对应关系，计算所有对应点的残差并排序；然后根据预设的重叠率参数K，仅保留残差最小的K对对应点；最后基于保留的点对通过单位四元数或SVD求解最优刚体变换；该过程交替进行直至收敛。TrICP在每次迭代中需要排序操作，计算复杂度为$O(N\log N)$。TrICP已被证实收敛速度较快且适用于重叠率低于50%的场景。

TEASER（Yang等，2021）的求解策略有所不同，它将配准问题解耦为尺度、旋转和平移三个独立的子问题依次求解。对于旋转估计，TEASER采用半定松弛将非凸的TLS问题松弛为凸的半定规划（semi-definite programming，SDP），并证明该松弛是紧的，即松弛后的凸问题与原非凸问题具有相同的最优解；对于平移估计，则采用自适应投票方案在多项式时间内完成求解；TEASER++（Yang等，2021）在此基础上做了改进，以渐进非凸性替代半定松弛来求解旋转子问题，避免了大规模SDP的计算开销，并且利用Douglas-Rachford分裂验证全局的最优性；其可在毫秒级时间内完成求解，并且TEASER提出的图论框架允许通过寻找最大团来大幅剪枝离群点。TEAR（Huang等，2024）将原始的六维配准问题分解为三维旋转子问题和二维平移子问题，两个子问题

© 中国图象图形学报版权所有

均通过分支定界方法求解至全局最优，且针对该问题设计了专用的求解策略。传统分支定界方法通常面临较高的计算开销且扩展性有限，TEAR（Huang等，2024）则通过设计紧致且高效的界函数，其将求解规模扩展至10^7量级的点对，在保证全局最优性的同时实现了良好的可扩展性。

基于最大团的截断类方法将配准问题转化为对应图上的最大团搜索问题，其将每个候选对应点对作为图的顶点，将满足几何一致性约束的对应点对之间建立边连接，然后通过搜索图中的最大团来寻找最大的一致对应集合。TEASER（Yang等，2021）提出的图论框架本质上也可归入这一思路，即允许通过寻找最大团来大幅剪枝离群点。这类方法通过图论中的组合优化实现离群点的硬截断剔除。

四种求解策略在实现思路和适用条件上各有侧重。TrICP采用局部迭代截断，依赖初始位姿且仅保证局部最优，但实现最简单直接，其适用于重叠率已知的快速精配准；TEASER/TEASER++采用半定松弛与GNC，并通过凸松弛和渐进非凸性在理论上保证了全局最优性，它是目前适用性最广的截断类求解方案；TEAR采用分支定界，通过紧致界函数在保持全局最优性的同时实现了可扩展性，其适用于对精度要求极高且点云规模适中的场景；最大团方法采用组合图搜索，通过严格的几何一致性实现离群点剔除，其适用于候选对应点数量可控的高精度配准任务。

截断类损失在求解上的离散性也促使了可微鲁棒估计流程的研究。Wei等（2023）提出的广义可微随机采样一致性（generalized differentiable RANSAC，∇-RANSAC）方法将RANSAC的随机采样与模型估计过程整体松弛为可微形式，使采样分布、内点判定和位姿求解可以联合训练。该方法在三维点云配准任务上与手工特征及学习特征均进行了验证，这表明截断类方法中原本不可微的保留与剔除决策，并不必然与端到端学习互斥，通过松弛和梯度传播，截断策略本身也可以成为训练流程的一部分。

截断损失的非凸性主要来自截断操作与内点/外点离散判定之间的耦合。Qian等（2026）提出的SIME（simultaneous inlier identification and model estimation）方法将内点识别与模型估计统一为一个截断损失框架，通过交替最小化求解，并进一步引入半定松弛来缓解二元内点变量带来的困难。近期工作进一步针对TLS的求解效率进行了优化，Ivanov和Markgraf（2025）针对固定旋转轴的TLS配准问题，提出了一种线性时间的凸松弛以及contractor方法来加速分支定界过程，使得100个点的两片点云可以在不到半秒内求得可证明的全局最优解，比基于SDP的STRIDE求解器快约两个数量级。虽然该方法目前限定于单轴旋转，但其表明截断损失的全局求解在特定条件下可以达到接近实时的水平。Lee等（2026）提出的截断L_p函数（truncated L_p functions，TLP）方法则通过统一的参数化形式概括了截断损失的多个作用阶段，该方法使用不同p值的截断L_p损失来统一处理对应关系排序、假设选择和模型精化，避免了为不同阶段分别设计求解器。不同离散化方式与松弛策略的选择，直接决定了相应算法在离群点率、点云规模和全局最优性保证等方面的表现。

3.3 自适应鲁棒类损失

前两节所述方法虽各具优势，但M-estimator需预先设定核函数的尺度参数，如Huber损失的阈值δ或Cauchy损失中的尺度因子σ；截断类损失同样面临阈值或重叠率的选取问题。这些超参数的取值对配准精度和收敛行为影响较大，而最优值在不同场景下往往差异较大，难以事先确定。自适应鲁棒损失对此做了调整，其基本思路是让损失函数的形态在优化过程中动态变化，包括核函数参数、截断程度或加权策略的渐进调整，使优化从初始阶段的全局探索逐步过渡到后期的精确收敛。这类方法试图在鲁棒性与收敛精度之间寻求更优的平衡，降低对人工超参数设置的依赖。

3.3.1 优化目标

自适应鲁棒损失的思想可追溯至方差最小化框架的早期探索，Lv等人（2022）提出的WPMAVM（weighted plus-and-minus allowance variance minimization）将点云细分为正余量点和负余量点并分别进行加权方差最小化：

$$E=\sum_{i=1}^{N}w_i^{+}(r_i^{+}-\bar{r}^{+})^2+\sum_{j=1}^{M}w_j^{-}(r_j^{-}-\bar{r}^{-})^2 \quad (18)$$

式中r_i^{+}和r_j^{-}分别为正负余量，$\bar{r}^{+}$和$\bar{r}^{-}$为对应的均值，w_i^{+}和w_j^{-}为距离函数导出的权重。该方法在ICP和VMM（variance-minimization matching）（Xie等，2018）基础上引入了加权机制，初步解决了未知且不均匀余量带来的匹配失真问题，但对大量异常点的处理

© 中国图象图形学报版权所有

能力仍然有限。丁涛等(2024)提出的RFWVM(robust function weighted variance minimization)的优化目标为加权方差最小化形式:

$$\min_{R,t} E = \sum_{i=1}^{N} w_i^{(k)} \cdot (r_i - \bar{r})^2 \tag{19}$$

式中r_i为第i个对应点的残差,$\bar{r}$为当前迭代下所有残差的均值,$w_i^{(k)}$为第k次迭代中随残差分布动态调整的权重函数。该权重随迭代次数可变,用于抑制异常点云对目标函数的贡献。RFWVM在WPMAVM的基础上进一步引入动态加权机制,在高斯-牛顿法迭代框架下完成刚性变换矩阵的求解。

由Wu等人(2026)提出的PAVM是自适应鲁棒损失方向的代表性工作,该工作针对真实工业场景中普遍存在的结构偏差、局部缺失、噪声漂移与密度不均等测量固有缺陷,提出了一种兼具全局鲁棒性与二次收敛性的配准框架。其优化目标可写为:

$$\min_{R,t} \left(\sum_{i=1}^{m} (w_i d_{iV} - \bar{d})^2 + \sum_{l=1}^{n} (w_l d_{lV} - \bar{d})^2 \right) \tag{20}$$

式中d_{iV}和d_{lV}为自适应协调距离,w_i和w_l为渐进式去伪权重,$\bar{d}$和$\bar{d}$分别为正、负余量加权距离的均值。PAVM的核心创新是渐进式去伪权重策略,该策略通过动态调控点对参与度实现异常点的渐进抑制,即在配准初期,自适应缩放因子$k = 0.1$和对抗因子$s = 1000$,此时权重函数对所有点对近似赋值为1,以确保所有点参与优化并避免误判;随着迭代进行,步长$\tau = \alpha \cdot \bar{d}_0 / \bar{d}_i$逐步增大$k$值至上限8,同时$s$降为0.1,使得异常点的权重自动趋近于0,最终在优化后期自动形成近似截断机制,这一设计实现了异常点抑制与收敛精化的动态平衡。此外,PAVM设计了自适应协调距离函数d_i,其融合了改进的对称点到面距离以用于快速收敛和一阶泰勒近似点到点距离以用于稳定收敛,通过二元变量在配准初期和后期动态切换,兼顾了收敛稳定性与快速性。研究表明,PAVM在典型工业场景中实现了超过30%的配准精度提升、约40%的收敛速度加快以及约50%的异常鲁棒性增强。

Li等人(2022)提出的鲁棒对称ICP(robust symmetric iterative closest point,RSICP)引入了一种自适应鲁棒损失,该损失通过一个鲁棒性控制参数α和尺度因子β构建,其优化目标可表示为:

$$\min_{R,t} E = \sum_{i=1}^{N} \rho_{(\alpha\beta)}(r_i) \tag{21}$$

式中r_i为第i个对应点的对称距离残差,$\rho_{(\alpha\beta)}(r)$为广义鲁棒核函数,其具体形式为:

$$\rho_{(\alpha\beta)}(r) = \begin{cases} \dfrac{\beta^2}{2} \ln\left(1 + \left(\dfrac{r}{\beta}\right)^2\right), & \alpha = 0 \\ \dfrac{\beta^2}{\alpha}\left(\left(1 + \left(\dfrac{r}{\beta}\right)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} - 1\right), & \alpha \neq 0 \end{cases} \tag{22}$$

式中α为鲁棒性控制参数,$\beta > 0$为尺度因子。当$\alpha = 2$时,它退化为标准的l_2损失;当$\alpha = 0$时,退化为Cauchy损失;当$\alpha = -2$时,退化为Geman-McClure损失。在配准优化过程中,α从一个较大的初始值逐渐衰减至较小值,这种渐进衰减策略使得配准初期能够赋予所有对应点均匀的权重以获取全局最优,而在优化后期则大幅降低大残差点的权重,因此其能够应对更高比例的离群点且在部分重叠场景下仍然有效。SANDRO(Adlerstein等,2025)将Geman-McClure鲁棒损失与GNC策略相结合:

$$\rho_{\mathrm{GM}}(r) = \frac{r^2}{r^2 + \sigma^2} \tag{23}$$

该损失函数具有饱和特性,大残差对应的梯度趋近于零。SANDRO在IRLS框架下采用GNC策略,其通过逐步改变优化问题的凸性来迭代滤除更多离群点,最终收敛到非凸全局最小值。

近年来,研究者(Jung等,2024)将自适应鲁棒损失与GNC框架相结合,发展出GNC-α^*和GNC-AMB等自适应损失函数。这类方法通过将GNC应用于自适应损失函数,在保持对离群点鲁棒性的同时增强了对初始化误差的鲁棒性。实验表明,GNC-α损失函数能够在收敛时获得比GNC-TLS更低的旋转和平移误差;当GNC与Adaptive Maxwell-Boltzmann损失结合时,其鲁棒性优于传统GNC-GM方法。

在参数自适应与动态调节方面,近期方法也呈现出不同的更新策略。Hitchcox和Forbes(2022)提出的Norm-Aware则将鲁棒函数的形状与残差的范数相关联,而非仅依赖残差幅度本身,在点云对齐任务中取得了与Welsch损失相当的配准精度。Sharifipour等(2026)提出的自适应概率匹配损失(adaptive probabilistic matching loss,APML)使用温度缩放的相似度矩阵构造匹配损失,通过温度参数调节匹配的软化程度,避免了非可微匹配操作,将自适应策略进一步拓展到了匹配损失层面。

© 中国图象图形学报版权所有

这些工作表明自适应鲁棒损失的设计空间不仅包括核函数参数随迭代衰减，也涵盖凸性状态的实时监测以及损失形状与残差范数或温度参数的动态关联。不同自适应方式在收敛速度、参数调节复杂度和适用场景上存在差异，为后续针对特定数据缺陷设计鲁棒目标提供了多种参考。

3.3.2　求解方式

自适应鲁棒损失的求解方式因方法而异，但普遍采用迭代优化框架，并在迭代过程中动态调整损失函数的参数或优化问题的凸性。

RFWVM算法（丁涛 等，2024）通过施加随迭代次数可变的动态权重来抑制异常点云的影响，并由高斯 牛顿法迭代完成刚性转换矩阵的求解。该方法将鲁棒函数加权与方差最小化相结合，在存在测量缺陷的点云精配准中表现出较好的稳定性和鲁棒性。PAVM（Wu 等，2026）的求解采用迭代加权最小二乘框架，但权重计算中包含步长依赖的渐进因子。在每次迭代中，根据当前的残差和迭代步数动态计算每个对应点的权重，然后求解加权最小二乘问题更新变换参数。其渐进式去伪权重策略通过步长τ控制权重变化的速度，即配准初期步长较小，权重函数随残差变化的幅度很小，所有点对平等参与；随迭代深入，步长逐步增大，权重函数逐渐从均匀加权过渡到近似截断。并且收敛性分析表明PAVM具有二次收敛特性。

自适应性不仅体现在损失函数本身，也体现在权重更新策略与计算流程的优化上。针对传统IRLS框架中权重仅由当前残差决定的问题，Pan 和 Li（2025）在多视图点云配准中提出了一种历史感知的IRLS变体，通过时序残差融合将初始置信度与迭代细化结果动态混合，使得权重能够在迭代过程中进行持续调整。针对鲁棒核尺度参数需人工预设的问题，Das 和 Gross（2023）提出从数据中学习该尺度参数以拟合残差分布，避免了额外的人工调参。在计算效率方面，Sexton 等（2025）提出了一种基于李代数的IRLS算法，该方法将最优更新的计算重构为紧凑形式，在不改变渐近复杂度的前提下提升了实际硬件上的运行速度。

在GNC框架的求解策略上，SAC-GNC（Piedade 等，2025）针对传统GNC固定退火因子的局限，提出了自适应退火方法。该方法从最小二乘解开始，利用残差统计量初始化形状参数，每次迭代从预设范围内采样多个退火因子生成候选模型，并使用MSAC（M-estimator sample consensus）、RANSAC 或 LmedS（least median of squares）等鲁棒评分函数进行评估。SAC-GNC维护一个优先级队列实现基于搜索树的假设探索，优先进行广度优先遍历以避免陷入局部最优，其停止条件由收敛状态和队列优先级共同决定。该方法包含优先保证运行效率但搜索范围较窄的SAC-GNC和采用深度树搜索以追求更高精度的SAC-GNC++两个变体。

将GNC与IRLS深度结合的代表性工作是SANDRO（Adlerstein 等，2025），该方法将Geman-McClure鲁棒损失与GNC策略结合，在IRLS框架下通过逐步改变优化问题的凸性来迭代滤除更多离群点。它结合了GNC、Black Rangarajan对偶性和非最小求解器，无需预先给定初始变换即可完成鲁棒估计。由于Geman-McClure函数能够自动验证和修剪对应关系，优化过程中无需重新计算对应关系。此外，SANDRO通过空间分割策略应对高离群点率和分布不均的问题，在点云存在对称性等复杂场景下仍能有效完成配准。

4　基于概率分布差异最小化的点云配准优化

基于概率分布差异最小化的点云配准方法，不再依赖显式的点对点对应。与第二、三章依赖对应关系的几何方法不同，该类方法将点云整体建模为某种概率分布，通过最小化源点云与目标点云之间的分布差异来直接估计变换参数。对应关系的不确定性由此转化为分布对齐问题，方法对噪声和离群点也具有一定的鲁棒性。根据概率模型和优化目标的不同，该类方法可划分为负对数似然最小化与高斯混合模型分布差异最小化两类，图3梳理了概率分布差异度量方法的关键发展节点。

4.1　负对数似然

负对数似然最小化将点云配准看作一个概率密度估计问题，即目标点云被建模为空间中的概率密度分布，然后通过最大化变换后的源点云在该分布上的似然值来求解最优变换。

4.1.1　优化目标

由 Biber 和 Straßer（2003）提出的正态分布变换（normal distributions transform，NDT）是负对数似然

© 中国图象图形学报版权所有

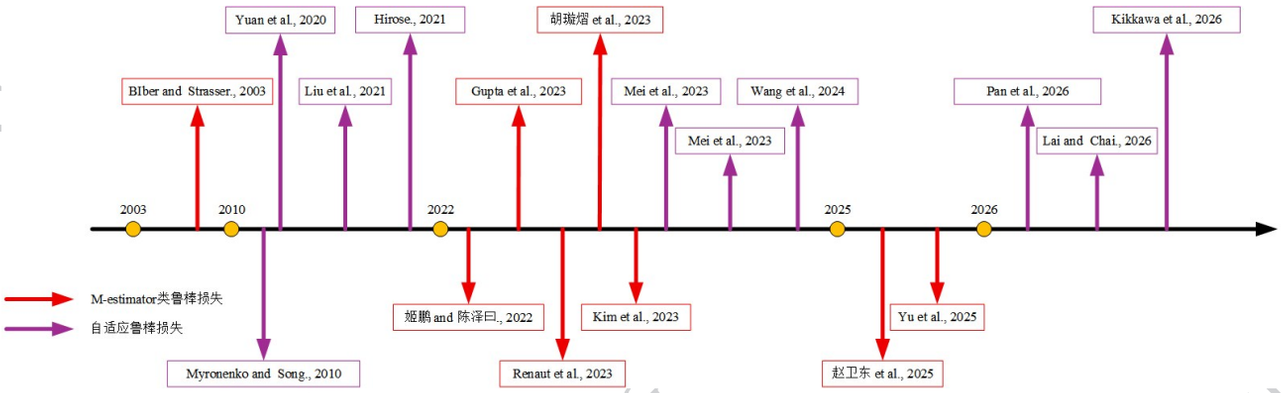


图3　概率分布差异度量方法发展时间线

Fig. 3　Development timeline of probability distribution difference metrics

最小化用于点云配准的一种具体实现形式，NDT的基本思想是将目标点云$\boldsymbol{Q}$所在空间划分为固定尺寸的体素网格，在每个体素内用多元正态分布描述点的分布。即对于每个体素，计算其中所有点的均值$\boldsymbol{\mu}$和协方差矩阵$\boldsymbol{\Sigma}$：

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{q}_k \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}=\frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{q}_k-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{q}_k-\boldsymbol{\mu})^{\top} \tag{25}$$

则该体素内的概率密度函数可表示为：

$$f(x)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{3/2}\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}}exp\left(-\frac{1}{2}(x-\boldsymbol{\mu})^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(x-\boldsymbol{\mu})\right) \tag{26}$$

对于变换后的源点云中的一点$\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{t}$，其落在目标点云某个体素内，该点的概率密度值由该体素的正态分布给出。NDT的优化目标是最大化所有变换后源点在目标概率场中的联合似然：

$$\max_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}}\prod_{i=1}^{\mathrm{N}}f(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{t}) \tag{27}$$

等价地，最小化负对数似然：

$$\min_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}}\left[-\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\ln f(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{t})\right] \tag{28}$$

式中在实际计算中，高斯分布中的常数项和指数前因子可省略。NDT不依赖于显式的点对点对应关系，它通过体素化将离散点云转换为连续的概率密度场，对单点噪声不敏感且将配准问题从成千上万个点的匹配简化为有限数量分布单元之间的对齐。NDT的配准精度受体素尺寸影响较大，若体素过大会降低精度，体素过小则增加计算量。同时它和ICP一样需要较好的初始位姿估计，并且代价函数中存在不连续性，因此可能给优化过程带来困难。

针对标准NDT的局限性，研究者从优化目标层面提出了改进。Magnusson等人(2009)提出用高斯分布与均匀分布的混合模型替代单一高斯模型，以增强对离群点的鲁棒性：

$$p_v(x)=(1-\omega)f_v(x)+\omega u_{\Omega}(x),\ 0\leqslant\omega<1 \tag{29}$$

式中的$f_v(x)$为该体素内原有的多元高斯分布，$u_{\Omega}(x)$为定义在单个体素区域Ω上的连续均匀分布，其表达式为：

$$u_{\Omega}(x)=\frac{1_{\Omega}(x)}{V_{\Omega}},\ V_{\Omega}=\mathrm{Vol}(\Omega)>0 \tag{30}$$

式中，$1_{\Omega}(x)$为指示函数(当$x\in\Omega$时取值为1，否则为0)，V_{Ω}为体素Ω的体积。ω为期望的离群点比例(即混合权重)。该设计将均匀模型严格限制在有限体素区域Ω内，避免了在整个$\mathbf{R}^3$空间上使用非零常数作为均匀概率密度导致的积分发散问题。对应的优化目标为最小化负对数似然$-\sum\ln p_v\left(Rp_i+t\right)$，该混合模型显著扩大了算法的收敛域。Gupta等人(2023)评估了以下三种改进策略：(1)学生-t似然函数作为高斯似然的替代方案，可改善小样本量下分布匹配的似然估计，其概率密度：

$$f_{\mathrm{student-t}}(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)(\nu\pi)^{3/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}\times\left[1+\frac{1}{\nu}(\mathrm{x}-\boldsymbol{\mu})^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathrm{x}-\boldsymbol{\mu})\right]^{-\frac{\nu+3}{2}} \tag{31}$$

式中ν为自由度参数，学生-t分布具有更重的尾部，对小样本下的分布匹配更为鲁棒；(2)协方差膨胀的宽似然曲线(heavily broadened likelihood NDT，HBL-NDT)通过协方差膨胀拓宽似然尾部，以减轻离散化

© 中国图象图形学报版权所有

带来的影响；(3)重叠网格单元NDT(overlapping grid cells ndt，OGC-NDT)通过重叠体素表示实现连续性。HBL-NDT和OGC-NDT虽未改变概率模型本身，但通过调整似然函数的形状和体素表示方式来缓解离散化伪影对优化目标的影响。此外，概率NDT将体素内分布的参数(均值$\boldsymbol{\mu}$和协方差$\boldsymbol{\Sigma}$)视为待估计的随机变量，而非直接由体素内点云统计得到。概率NDT对优化目标的改进主要体现在两个层面：其一，均值和协方差的计算引入了点概率的加权，不再是最初的等权平均形式；其二，目标函数中新加入的参数先验项，使体素内分布估计在样本量不足时仍能保持稳定。这些改动并未偏离NDT最小化负对数似然的基本框架，只是从概率建模的角度对体素内分布的估计方式做了调整。

在负对数似然框架下，近期也有工作尝试将NDT的统计建模与可学习组件结合。MEDPNet(Du等，2024)在粗配准阶段使用Efficient-DCP获得初始位姿后，将其输入一个由多层感知机(multi-layer perceptron，MLP)、NDT和ICP组成的多尺度特征融合双通道模块，通过可学习的自适应融合策略完成精配准。与标准NDT中体素正态分布参数由点云统计直接确定不同，该框架中NDT负责提供局部统计表示，MLP则学习如何在NDT与ICP的残差之间分配权重，使优化目标在负对数似然与几何距离之间取得自适应平衡，在复杂压铸件点云上表现出对噪声和尺度变化的鲁棒性。这一做法并未改变NDT负对数似然的基本形式，但将其嵌入了一个可端到端调优的混合优化流程中。

4.1.2　求解方式

负对数似然最小化问题的求解通常采用牛顿法进行参数优化，由于负对数似然函数关于变换参数是非线性的，因此需迭代求解(Ulaş C 和 Temeltaş，2013)。设变换参数向量为$\boldsymbol{p}=[\boldsymbol{\phi}^{\top},\boldsymbol{t}^{\top}]^{\top}$，其中$\boldsymbol{\phi}$为旋转的李代数表示。负对数似然函数$s(p)=-\sum log f(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{t})$关于$\boldsymbol{p}$的梯度$\boldsymbol{g}$和Hessian矩阵$\boldsymbol{H}$可通过链式法则计算，牛顿法的迭代更新式为：

$$\boldsymbol{p}_{k+1}=\boldsymbol{p}_k-\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{g} \tag{32}$$

在每次迭代中，根据当前梯度方向和Hessian矩阵提供的信息计算变换参数的更新量，重复直至收敛(如更新量小于预设阈值)。NDT的评分函数是连续可微的，因此牛顿法等基于梯度的优化方法可以用于求解。为了保证收敛稳定性，通常采用Gauss-Newton法或Levenberg-Marquardt法。对于高斯分布，负对数似然函数在参数空间中呈二次型，使得牛顿法具有较快的收敛速度。然而，随着待配准点云数据量的增加，牛顿迭代法需要大量时间计算Hessian矩阵，因此增加了算法整体的时间复杂度。针对这一问题，有研究(Wang 等，2017)提出用拟牛顿法替代牛顿法求解Hessian矩阵，以改善大型场景点云数据配准的效率。

求解算法确定后，还需确定源点云以何种形式参与配准，这决定了目标函数的具体写法以及梯度与Hessian的计算方式。根据源点云被表示为离散点还是概率分布(Hong 和 Lee，2017)，NDT的配准模式可分为点对分布NDT(point-to-distribution NDT，P2D-NDT)和分布对分布NDT(distribution-to-distribution NDT，D2D-NDT)两种。P2D-NDT(Magnusson 等，2009)将源点云中的每个点与目标NDT地图中的分布进行匹配，其将源点云视为由目标点云的概率模型生成的样本，并通过最大似然估计求解变换；D2D-NDT(Stoyanov 等，2011)将源点云也表示为NDT分布，并通过最小化两个分布之间的差异来求解变换，其距离度量包括KL散度或Wasserstein距离等。D2D-NDT比P2D-NDT速度更快，且对较差的初始估计具有更强的鲁棒性。从求解性能来看，NDT通常只需少量迭代即可收敛，对初始位姿的容忍度高于ICP(Magnusson 等，2015)；在计算时间方面，NDT优于大多数基于点对应的ICP变体，但NDT代价函数在体素边界处存在不连续点，因此可能影响牛顿法的稳定性。

深度学习也被用于为NDT提供更可靠的初值。Wang和Wang(2024)先由基于点云的深度学习模型输出粗位姿，再将其作为NDT的初始化输入进行精配准；由于NDT的负对数似然优化从更接近真值的位姿出发，牛顿迭代的收敛速度明显加快。这一思路并未改变NDT的求解算法本身，而是通过深度学习缓解了NDT需要较好初始位姿估计的这一局限。此外，Shen 等(2024)提出的多尺度迭代NDT(multi-scale iterative NDT，MI-NDT)方法从另一角度改善求解的鲁棒性，它依据最优平面度准则将参考扫描体素化为多尺度体素，在每一尺度上执行经典NDT优化，粗尺度位姿作为细尺度优化的初值，逐级迭代至最细体素层，其多尺度迭代策略直接针对NDT在大

© 中国图象图形学报版权所有

规模室外扫描中受体素分辨率和初始位姿偏差制约的问题。

4.2 高斯混合模型差异

与4.1节NDT将点云空间离散化为固定体素并拟合正态分布不同，高斯混合模型（gaussian mixture model，GMM）方法将点云整体建模为多个高斯分量的加权组合，并通过最小化两个GMM之间的分布差异来求解最优变换。该类方法无需显式的点对应关系，对噪声和离群点具有较强的鲁棒性，且适用于非刚性配准。GMM方法分为传统方法和深度方法两类，其中传统方法以相干点漂移（coherent point drift，CPD）（Myronenko 和 Song，2010）为代表，其将源点云建模为GMM质心，并通过最大化目标点云的似然函数来求解变换；深度方法以Yuan等（2020）提出的深度高斯混合模型配准（deep gaussian mixture registration，DeepGMR）为代表，其将点云端到端参数化为GMM和通过最小化两个GMM之间的KL散度来实现配准。两者均以GMM为概率模型，区别在于优化目标的形式不同。这与NDT通过体素化构建概率密度场的做法也有所不同，NDT与CPD虽然都采用负对数似然作为优化目标，但概率模型的选取并不相同。深度GMM方法则将优化目标从似然最大化转向了分布差异最小化，在GMM框架内提供了概率配准的另一种实现方式。

4.2.1 优化目标

由Myronenko和Song（2010）提出的CPD是GMM配准中的常用方法，CPD将源点云$\boldsymbol{P}=\{\boldsymbol{p}_i\}_{i=1}^{M}$建模为高斯混合模型的质心，目标点云$\boldsymbol{Q}=\{\boldsymbol{q}_j\}_{j=1}^{N}$视为从该GMM中采样的数据点，GMM的概率密度函数为：

$$f(q)=(1-\omega)\sum_{i=1}^{M}\pi_i\mathcal{N}\left(q|T|(p_i)\sigma^2 I\right)+\omega u_{\Omega}(q) \tag{33}$$

式中$T(p_i)$为变换后的源点位置，$\mathcal{N}(\cdot)$表示各向同性高斯分量。混合权重π_i满足$\pi_i\geqslant 0$且$\sum_{i=1}^{M}\pi_i=1$（标准等权分量取$\pi_i=1/M$），方差$\sigma^2>0$。ω为离群点比例权重，$u_{\Omega}(q)$与式（29）一致，为定义在有效空间区域Ω上的连续均匀分布。配准任务转化为目标点云在该混合模型上的似然函数：

$$\max_{R,t,\sigma^2}\prod_{j=1}^{N}f(\boldsymbol{q}_j) \tag{34}$$

等价于最小化负对数似然，CPD的核心创新在于引入运动相干性约束，即相邻点在变换后仍保持相邻关系。这一约束通过对位移场施加正则化实现，使得点云作为一个整体发生连贯变形，而非各点独立运动。相干性约束是CPD区别于其他GMM配准方法的关键，也是其在非刚性配准任务中表现优异的原因。CPD支持刚性、仿射和非刚性三种配准模式，在刚性配准中，其变换参数为$\boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{t}$，并且所有高斯分量共享同一变换；在非刚性配准中，每个高斯分量具有独立的位移但受相干性约束限制。

Hirose（2021）提出的贝叶斯相干点漂移（bayesian coherent point drift，BCPD）是CPD的重要改进，Hirose将位移向量的先验分布引入贝叶斯推断框架，实现了对变形场的概率建模。与经典的期望最大化（expectation-maximization，EM）算法给出参数的点估计不同，BCPD采用变分贝叶斯推断，通过优化变分分布来逼近真实后验，从而提供不确定性量化。设z统称模型中的隐变量与待推断未知量，$q(z)$为其变分近似分布，变分推断通过最小化近似分布与真实后验之间的KL（kullback-leibler）散度来逼近后验：

$$\mathcal{E}(q)=E_q\left[\ln p(Q|z)\right]-E_q\left[\ln q(z)\right] \tag{35}$$

式中Q为目标点云，$p(Q|z)$为联合分布。变分推断即在选定的分布族$\mathcal{F}$中求解最优的近似分布：

$$q^{*}\in\arg\max_{q\in\mathcal{F}}\mathcal{E}(q) \tag{36}$$

基于该变分框架，BCPD能够统一处理刚性配准和非刚性配准。位移向量的先验分布明确了运动相干性参数的作用，并在理论上保证了算法的收敛性。此外，标准CPD使用各向同性协方差$\sigma^2\boldsymbol{I}$，相当于仅施加点对点距离惩罚和未利用点云的几何结构信息，由Liu等人（2021）提出的LSG-CPD（CPD with local surface geometry）结合点云的法线和曲率等局部表面几何信息，通过引入各向异性精度矩阵修改了概率分布：

$$(\Sigma_m)^{-1}=\frac{1}{\sigma^2}\left(I+\alpha_m n_m(n_m)^{\mathrm{T}}\right) \tag{37}$$

式中n_m为源点p_m处的单位法向量，$\alpha_m\geqslant 0$为控制局部表面几何惩罚强度的参数，I为单位矩阵。对应的GMM概率密度函数为：

$$f(\mathrm{q})=\sum_{m=1}^{M}w_m\mathcal{N}(\mathrm{q};\boldsymbol{p}_m,\boldsymbol{\Sigma}_m)+w_{\mathrm{out}}\frac{1}{N} \tag{38}$$

优化目标变为最小化负对数似然：

© 中国图象图形学报版权所有

$$\min_{R,t,\sigma^2}\left[-\sum_{j=1}^{N}\ln\sum_{m=1}^{M}w_m\mathcal{N}(\mathrm{q}_j;T(\boldsymbol{p}_m),\boldsymbol{\Sigma}_m)\right] \tag{39}$$

式(37)通过减小法线方向上的方差，使匹配过程根据局部表面的平坦程度自适应地调整权重。在平坦区域，较强的法向约束增加了点到面惩罚；在曲率较大区域，则减弱该约束。这一改进在保持CPD全局配准能力的同时，显著提升了刚性配准的精度；由Wang等人(2024)提出的偏斜相干点漂移方法针对标准GMM中高斯分布的对称性无法精确拟合点云非对称局部表面的问题，其利用局部表面法线和曲率半径构造非对称分布，并且用非对称分布替换GMM中的对称高斯分量，该偏斜分布$S(\mathrm{q};\ \mathrm{p},\Sigma,\beta)$定义为：

$$S(\mathrm{q};\mathrm{p},\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\beta})\propto\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathrm{q}-\mathrm{p})^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathrm{q}-\mathrm{p})\right)\cdot\boldsymbol{\Phi}\left(\beta^{\top}(q-p)\right) \tag{40}$$

式中$\boldsymbol{\Phi}(\cdot)$为标准正态分布的累积分布函数；β为偏斜参数，用于控制分布的非对称方向。将上式代入GMM框架，优化目标为最小化负对数似然：

$$\min_{R,t,\sigma^2}\left[-\sum_{j=1}^{N}\ln\sum_{m=1}^{M}w_m S(\boldsymbol{q}_j;T(\boldsymbol{p}_m),\boldsymbol{\Sigma}_m,\beta_m)\right] \tag{41}$$

该方法通过引入偏斜参数控制分布的非对称方向，使得概率模型能够更精确地拟合局部非对称表面，在配准精度和鲁棒性上优于现有对称分布方法。

Sinkhorn-CPD(Zhang 等，2026)通过双侧KL惩罚放松软对应的边缘约束，将配准表述为非平衡熵正则化最优传输问题，其优化目标为：

$$\min_{R,t,\sigma^2,\gamma\geqslant 0}\sum_{i,j}\gamma_{ij}\left[C_{ij}+\ln\gamma_{ij}-1\right]+\tau_P D_{\mathrm{KL}}\left(\gamma 1_N\ /\!/\ a\right)+\tau_Q D_{\mathrm{KL}}\left(\gamma^{\mathrm{T}}1_M\ /\!/\ b\right) \tag{42}$$

式中，$\gamma\in\mathbf{R}_{+}^{M\times N}$为传输计划，$M,N$分别为源、目标点数；$a=1_M/M$与$b=1_N/N$为参考质量分布；$\tau_P,\tau_Q>0$用于控制两侧边缘约束的强度。该方法保留了CPD中变换参数的闭式求解和方差更新过程，其中σ^2同时起到熵正则化参数的作用，退火过程也不用单独设定温度参数。

深度学习技术的引入为GMM配准带来了新的优化目标设计思路。与传统方法最大化似然函数不同，深度概率方法将配准形式化为两个GMM之间的分布差异最小化。由Yuan等人(2020)提出的DeepGMR是第一个明确利用概率配准框架的学习方法，该方法通过神经网络将点云端到端地参数化为GMM，配准目标为最小化两个GMM之间的KL散度：

$$\min_{R,t}\ D_{\mathrm{KL}}(\mathrm{GMM}(\boldsymbol{P})\ /\!/\ \mathrm{GMM}(T(\boldsymbol{Q}))) \tag{43}$$

式中$\boldsymbol{P}$为源点云，$\boldsymbol{Q}$为目标点云。其网络结构中包含一个提取位姿不变对应的模块，以用于建立原始点云与GMM参数之间的关联，并设计了两个可微计算模块，从匹配的GMM参数中解析恢复最优变换。DeepGMR(Yuan 等，2020)在潜在GMM空间中进行配准，对输入点云的密度变化不敏感，是一个实时、可泛化且对噪声鲁棒的全局配准方法。由Huang等人(2022)提出的统一高斯混合模型将配准问题转化为聚类问题，其核心思想是将两片点云视为同一个统一GMM的两个样本，通过最大化在统一目标坐标系下的联合似然来求解变换。其优化目标可表示为：

$$\max_{\Theta,R,t}\left[\sum_{i=1}^{M}\ln g_{\Theta}\left(T\left(p_i\right)\right)+\sum_{j=1}^{N}\ln g_{\Theta}\left(q_j\right)\right] \tag{44}$$

式中θ为统一GMM的参数，$T\left(p_i\right)=Rp_i+t$为变换后的源点坐标，$g_{\Theta}(\ \cdot\ )$为参数化的GMM概率密度函数。该模型通过估计每个点归属于统一GMM各分量的后验概率来完成配准。网络利用统计模型克服噪声和密度变化，并引入对齐分数作为无监督训练的信号，在对齐分数的监督下完成训练。由Mei等人(2023)提出的UDPReg(unsupervised deep probabilistic registration)是面向部分重叠点云的无监督配准场景，其优化目标由三种损失构成：

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\mathrm{sc}}+\mathcal{L}_{\mathrm{cc}}+\mathcal{L}_{\mathrm{lc}} \tag{45}$$

式中$\mathcal{L}_{\mathrm{sc}}$、$\mathcal{L}_{\mathrm{cc}}$和$\mathcal{L}_{\mathrm{lc}}$分别为自一致性损失、交叉一致性损失和局部对比损失。实验表明UDPReg在3DMatch/3DLoMatch和ModelNet/ModelLoNet等基准上表现良好。OGMM(overlap-guided Gaussian mixture models)(Mei 等，2023)利用预测重叠得分引导两侧高斯混合模型的参数估计，并通过分量特征建立匹配关系。在分量匹配权重固定后，采用加权SVD估计刚体变换，该位姿估计问题可形式化为：

$$\min_{R,t}\sum_{i=1}^{K_P}\sum_{j=1}^{K_Q}\Gamma_{ij}\left(R\mu_i^P+t-\mu_j^Q\right)^2 \tag{46}$$

式中K_P、K_Q为两侧高斯分量数量，μ_i^P、μ_j^Q为分量均值，Γ_{ij}为分量匹配权重。重叠得分通过影响GMM参数构建参与配准过程，重叠监督损失用于网络训练。Zhang 等人(2024)提出的GTGMM(geometry transformer and gaussian mixture models)是将几何Transformer与高斯混合模型结合，以经刚体变换后的源

© 中国图象图形学报版权所有

点云混合分布与目标点云混合分布的对齐为配准目标。该方法利用局部特征、全局关系及几何结构信息构建点云表示，并结合重叠得分与坐标估计GMM参数。因此，学习模块不仅用于特征提取，还通过影响分布参数改变参与配准的统计表示。其配准效果同时受到重叠区域估计、混合分布表示及变换求解的影响。

PointGMM（Hertz 等，2020）提出了一种层次化高斯混合模型（hierarchical gaussian mixture model，hGMM）表示，将点云转换为紧凑、自适应且轻量级的概率形式，其训练过程分为表示学习和配准两个阶段。在表示学习阶段，最小化重建损失 $\mathcal{L}_{\text{recon}}$ 使hGMM紧凑地表示输入形状；在配准阶段，该方法通过最大化源点云和目标点云变换后的一致性来实现对齐。其变换分支的优化目标函数定义为：

$$\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_{\text{hGMM}}\left(X_t|\Theta_t\right) + \mathcal{L}\left(\bar{T}|T\right) \tag{47}$$

式中，$\mathcal{L}_{\text{hGMM}}$ 为网络输出形状与输入点云的表示损失，$\mathcal{L}\left(\bar{T}|T\right)$ 为预测变换 T 与真实变换 $\bar{T}$ 之间的监督损失，其具体形式为：

$$\mathcal{L}\left(\bar{T}|T\right) = \gamma_1\mathcal{L}_1(\bar{v}|v) + \gamma_2\mathcal{L}_{\cos}\left(\bar{\phi}|\phi\right) \tag{48}$$

式中，v 和 ϕ 分别为网络预测的平移向量与旋转参数，$\bar{v}$ 和 $\bar{\phi}$ 为真实值；$\mathcal{L}_1$ 为平移的 L_1 损失，$\mathcal{L}_{\cos}$ 为旋转的余弦相似度损失，γ_1，γ_2 为平衡权重。在配准任务中，PointGMM学习将输入形状的位姿与结构解耦，配准阶段仅需要对高斯分量均值做刚性变换即可完成对齐，无需重新提取特征。此外，Gong 等（2024）提出的高效自回归扩散配准模型（efficient autoregressive diffusion model for registration，EADReg）把扩散模型引入概率配准流程，其粗阶段用双向高斯混合模型剔除离群点，并在源帧与目标帧的GMM之间建立对应；细阶段将基于扩散的配准视为自回归过程生成点对应，并在高层迭代细化。

近期针对部分重叠及复杂噪声场景的优化目标设计也呈现出不同的思路。Kikkawa 等人（2025）指出DeepGMR一类方法在部分对部分配准中，由于特征在刚体变换下不具备不变性，其会导致KL散度目标在优化时容易受到干扰。为此，他们提出注意力引导参考点平移层，通过将两片部分点云的共同参考点平移至原点，使网络获得对变换不变的特征表示，从而使后续的GMM参数估计与KL散度优化更加稳定。Du 等（2024）提出的重叠引导双向混合配准（overlap-guided bidirectional hybrid mixture registration，OBHMR）将重叠预测引入目标函数的构建中，利用网络估计的逐点重叠分数构建由高斯混合模型与Fisher混合模型组成的双向混合模型。该方法将原本单一的两分布对齐目标，扩展为带有法向几何约束的双向混合分布差异最小化，以处理部分到完全的配准问题。

除了对特征输入和混合成分的改进，对GMM模型内部结构的约束也体现在目标函数的构建中。Su 等（2024）提出了一种带有局部一致性约束的GMM配准方法，其优化目标在传统GMM似然的基础上增加了对邻域点后验分布相似性的约束，以增强对应关系的鲁棒性，并在EM框架下获得了E步和M步的闭式解。Fortun 等（2025）针对多视图配准中空间不变各向同性噪声假设的局限，在GMM重建框架中引入了显式的局部化噪声模型，将优化目标中的协方差矩阵修改为空间变化且各向异性的形式，并通过随机EM算法求解。此外，Chen 等（2023）通过提取局部特征与全局信息来生成GMM，使概率模型成为一种具备全局加权局部特征表示的分布。

上述深度概率方法与CPD的差别在于概率模型如何确定。CPD的GMM形式固定，EM更新变换参数和方差；Yuan 等（2020）提出的DeepGMR、Huang 等（2022）提出的统一高斯混合模型（unified gaussian mixture model，UGMM）、Mei 等（2023）提出的UDPReg等方法则由网络预测GMM的参数，目标函数相应地从对固定模型求似然或差异，变为对学习到的分布求差异。从早期的端到端学习到结合扩散模型，再到针对部分重叠和复杂噪声的改进，这些工作均建立在GMM概率模型的基本框架之上。它们分别从特征变换的预处理、混合成分的联合构建、后验分布的结构约束、协方差矩阵的各向异性处理以及全局表示的学习等维度，对GMM的优化目标进行了具体调整，有效提升了该类方法在复杂场景下的适用性。

4.2.2 求解方式

GMM分布差异最小化问题的求解方法因模型而异，传统方法主要采用EM算法（Myronenko 和 Song，2010），深度方法则采用梯度下降端到端优化。

CPD的求解在EM框架下进行，E步中根据当前变换参数计算每个目标点 $\boldsymbol{q}_j$ 属于每个高斯分量 $\boldsymbol{p}_i$ 的后验概率（即软对应关系）：

© 中国图象图形学报版权所有

$$P(i\left|\boldsymbol{q}_j\right.)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left/\!\!/\,\boldsymbol{q}_j-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}_i)\,\right/\!\!/^{2}/\sigma^{2}\right)}{\sum_{k=1}^{M}\exp\left(-\frac{1}{2}\left/\!\!/\,\boldsymbol{q}_j-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}_k)\,\right/\!\!/^{2}/\sigma^{2}\right)+\lambda} \tag{49}$$

式中$\boldsymbol{T}(\mathbf{p}_i)$为当前变换下的源点位置，$\lambda$为离群点权重相关的正则化参数；M步中根据后验概率加权更新变换参数和方差σ^2。CPD的时间复杂度为$O(MN)$，其中M和N分别为源点云和目标点云的点数。为了提升效率，传统策略包括通过下采样减少点云规模并使用高斯过程回归插值，或通过快速高斯变换加速E步求和。近期，Pan等(2025)提出的EJRGF (efficient joint registration of multiple point clouds using fast gaussian filter)方法在多视图联合配准中引入基于permutohedral格点的快速高斯滤波器，进一步大幅加速了EM的迭代过程。

在基础EM框架的变体方面，BCPD(Hirose，2021)采用变分贝叶斯推断框架替代经典EM算法，以提供了参数后验分布的不确定性量化。Sinkhorn-CPD(Zhang等，2026)将E步转化为非平衡熵正则化最优传输问题和采用广义Sinkhorn迭代求解，其中方差σ^2同时充当熵正则化参数，自动控制了从弥散到尖锐对应的退火过程。此外，部分工作对EM的具体更新步骤进行了优化。Wang等人(2024)提出的偏斜相干点漂移方法在M步中采用基于李群和李代数的无约束优化技术并结合图形处理器(graphics processing unit，GPU)加速。

深度概率方法不再依赖迭代步骤，而是训练网络直接生成GMM参数，将配准问题转化为端到端的学习任务。DeepGMR(Yuan等，2020)采用端到端梯度下降，其网络首先将输入点云编码为GMM参数后，通过两个可微计算模块从匹配的GMM参数中恢复最优变换。整个网络以KL散度作为损失函数进行端到端训练，推理时一次前向传播即可完成配准；UGMM(Huang等，2022)将配准问题转化为聚类问题，其设计了特征交互模块利用自身和跨点云信息学习后验概率和设计了两个可微模块分别计算GMM参数和变换矩阵；UDPReg(Mei等，2023)则利用网络预测后验分布，并结合Sinkhorn算法预测分布级对应。针对深度方法在特征提取上的局限，ARPS层(attention-guided reference point shifting)(Kikkawa等，2026)通过注意力机制将部分点云的共同参考点平移至原点，获得了对变换不变的特征表示，为DeepGMR及其变体提供了更稳定的求解初值。

在引入多步生成式采样的求解方法中，EADReg(Gong等，2024)采用由粗到细的求解框架，粗阶段利用双向高斯混合模型剔除离群点以完成初始对齐；细阶段将对应生成视为自回归过程，通过多步去噪采样逐步细化点对应。Yuan等(2025)提出的变换扩散模型(transformation diffusion model，TDM)将刚体变换参数视为生成目标，通过反向去噪将随机噪声逐步细化至最优位姿；Diff-Reg v2(Wu等，2025)则在匹配矩阵空间执行扩散去噪，以迭代采样的方式避免单步回归陷入局部极小。这些工作将GMM概率配准的求解机制从单步网络回归，进一步拓展到了多步生成式采样。

5 讨论与分析

前文分别从几何距离最小化、鲁棒损失最小化和概率分布差异最小化三个维度系统梳理了点云配准优化模型的目标函数设计与求解策略。三类模型的决策变量均为刚体变换$(\boldsymbol{R},\boldsymbol{t})$，其中$\boldsymbol{R}\in\boldsymbol{SO}(3)$为旋转矩阵，$\boldsymbol{t}\in\mathbf{R}^3$为平移向量，其区别在于目标函数的构造方式以及求解路径的差异。本章从收敛特性、对初值的依赖程度以及计算效率等方面展开对比分析，总结各类优化模型的适用场景、性能特征及局限性，并在此基础上提出今后在该领域的研究建议。

5.1 各优化模型对比分析

表1从收敛特性和求解方式等方面对三类优化模型进行了综合对比。

三类方法所面对的问题各有侧重。几何距离最小化直接涉及非凸性和初值敏感，其改进多集中在扩大收敛域和降低初始位姿依赖；对应关系不确定性则通过最近邻搜索或软匹配处理，但对应关系误差仍会影响配准结果。鲁棒损失最小化以离群点干扰为主要目标，通过核函数、截断或自适应加权降低大残差影响；非凸性并未消除，截断类方法因离散决策使问题更为复杂，需借助半定松弛、分支定界等策略求解。概率分布差异最小化以对应关系不确定为出发点，通过分布对齐避开显式对应，其对离群点的鲁棒性来自概率模型对局部扰动的平滑作用，而非

© 中国图象图形学报版权所有

表1　各类优化目标对比

Table 1　Comparison of various optimization objectives

对比维度	几何距离最小化	鲁棒损失最小化	概率分布差异最小化
代表算法	点到点ICP、点到面ICP、PLICP、对称ICP	Huber-ICP、TEASER++、TrICP、PAVM	NDT、CPD、DeepGMR
收敛特性	点到点ICP：线性收敛；点到面ICP：二次收敛；深度方法：推理阶段单次前向；	无统一收敛阶；M-estimator：经IRLS求解，局部线性收敛；TrICP：局部收敛；PAVM：二次收敛；	无统一收敛阶；NDT：局部二次收敛，体素边界处可能影响稳定性；CPD：EM线性收敛；深度概率方法：推理阶段单次前向；
优化求解方式	SVD / LM / GN	IRLS / SDP / GNC / 图搜索	EM / 牛顿法 / Sinkhorn / DL前向传播
是否需要点对应	是（每次迭代最近邻）	是（基于对应残差）	否（分布整体对齐）
是否需训练数据	否（传统方法）；是（深度方法）	否（传统方法）；是（深度鲁棒配准）	否（传统方法）；是（深度概率方法）
典型适用场景	高重叠、精配准	高离群点率、工业场景	全局配准、稀疏/无对应场景

逐点抑制。

结合表1的对比可看出三类方法在计算效率与适用场景上存在明显的差异。基于几何距离最小化的方法实现简单、计算效率高，是工程中最常用的配准方案，但其依赖较好的初始位姿且对噪声敏感；其中传统方法点到面ICP可达二次收敛，而深度方法多依赖单次前向推理。基于鲁棒损失最小化的方法以增加计算开销为代价提升了抗干扰能力，其中M-estimator类经IRLS求解通常呈局部线性收敛；截断类在极高离群点率下仍能有效求解，以TEASER++为代表的方法具备可认证的全局最优性；自适应鲁棒损失则通过动态调整损失形态降低了对超参数设置的依赖。基于概率分布差异最小化的方法无需显式点对应，但计算量通常高于几何距离方法。其中NDT等负对数似然类通过牛顿法可实现局部二次收敛且效率较高，适用于大规模点云配准，但代价函数在体素边界处的不连续性会影响求解稳定性；CPD及其深度变体等高斯混合模型类计算开销较大，但在非刚性配准场景中表现更为适用。总体而言，三类方法在适用场景上各有侧重，具体选用需结合实际任务对精度、鲁棒性和实时性的要求，而将不同优化模型组合使用通常可取得更好的表现。

5.2　局限与展望

尽管各类优化方法在特定场景下表现较好，但现有方法仍存在一些共性局限。结合1.2节提出的三大核心挑战，本文归纳了现有方法的不足，并提出相应的研究建议：

1）针对非凸性与初值敏感问题，传统几何距离和鲁棒损失方法的优化过程易陷入局部最优和依然高度依赖良好的粗配准。未来可探索将分支定界的下界构造、半定松弛等全局优化策略与可微模块或深度特征相结合，在保持推理效率的同时提供一定的全局收敛保证；或者探索无需人工设定退火计划的自适应渐进非凸性策略，以降低算法对初始位姿的依赖。

2）针对对应关系缺失与几何退化场景，现有方法在弱纹理、长直走廊等特征不足环境中，难以建立可靠的点对对应。未来可尝试引入大规模视觉基础模型的预训练特征，利用其泛化先验提升局部匹配的鲁棒性；同时，将相机图像纹理或语义标签等跨模态信息与点云几何特征进行融合，以弥补纯几何信息在退化结构下的约束不足。

3）针对离群点干扰与深度模型泛化能力差的问题，真实传感器的测量噪声和遮挡往往会导致严重的异常残差，而深度学习方法又高度依赖标注数据。未来可设计基于不确定性量化的鲁棒损失函数，使优化目标能够根据局部点云的预测方差动态分配权重；在训练策略上，可进一步挖掘点云自身的空间拓扑不变性（如多视角循环一致性或邻域保持），构建自监督信号，从而减少对人工标注的依赖，

© 中国图象图形学报版权所有

提升模型在未知传感器与跨场景部署时的泛化能力。

6 结 语

本文从目标函数的核心差异出发，将点云配准方法划分为几何距离最小化、鲁棒损失最小化与概率分布差异最小化三大类，并梳理了各类方法的数学形式与求解策略，并对其收敛特性与适用场景等进行了对比分析。从数学形式上看，鲁棒损失可视为几何距离在残差惩罚层面的推广，而二者在优化问题中的侧重点不同，几何距离最小化决定数据项的内部结构，即采用何种度量来约束局部对齐；鲁棒损失最小化则决定对不一致量施加何种惩罚，侧重于提升算法对异常点的抗干扰能力。近年来，深度学习与视觉基础模型的引入改变了配准目标函数的构建方式，但非凸优化带来的初值敏感、几何退化环境下的约束不足以及跨场景泛化困难等核心挑战依然存在。后续研究可进一步关注深度特征与全局优化策略的结合、跨模态信息与视觉基础模型的语义融合，以及结合不确定性量化的自监督学习设计等方向，在统一框架下探索经典数学推导与数据先验的有机结合，以逐步提升配准算法在未知传感器与复杂物理场景下的可靠性与适应性。

参考文献(References)

Adlerstein M, Soares J C V, Bratta A, Semini C. 2025. SANDRO: A Robust Solver with a Splitting Strategy for Point Cloud Registration// 2025 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Atlanta, USA: IEEE: 11112-11118 [DOI: 10.1109/ICRA55743.2025.11128360]

Aftab K and Hartley R. 2015. Convergence of iteratively re-weighted least squares to robust m-estimators//2015 IEEE Winter Conference on Applications of Computer Vision. Waikoloa, USA: IEEE: 480-487 [DOI: 10.1109/WACV.2015.70]

Aoki Y, Goforth H, Srivatsan R A and Lucey S. 2019. PointNetLK: Robust & Efficient Point Cloud Registration Using PointNet// Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Long Beach, USA: IEEE: 7163-7172 [DOI: 10.1109/CVPR.2019.00733]

Babin P, Giguere P and Pomerleau F. 2019. Analysis of Robust Functions for Registration Algorithms//2019 International Confer-ence on Robotics and Automation. Montreal, Canada: IEEE: 1451-1457 [DOI: 10.1109/ICRA.2019.8793791]

Bai X Y, Luo Z X, Zhou L, Chen H K, Li L, Hu Z Y, et al. 2021. PointDSC: Robust Point Cloud Registration Using Deep Spa-tial Consistency//Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. [DOI: 10.1109/CVPR46437.2021.01560]

Besl P J and McKay N D. 1992. Method for registration of 3-D shapes// Sensor fusion IV: control paradigms and data structures. Bellingham, USA: SPIE: 586-606 [DOI: 10.1117/12.57955]

Bergström P and Edlund O. 2014. Robust registration of point sets using iteratively reweighted least squares. Computational opti-mization and applications, 58(3): 543-561 [DOI: 10.1007/s1058 9-014-9643-2]

Biber P and Strasser W. 2003. The normal distributions transform: a new approach to laser scan matching//Proceedings 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Las Vegas, USA: IEEE: 2743-2748 [DOI: 10.1109/ IROS. 2003.1249285]

Bube K P and Langan R T. 1997. Hybrid l^1/l^2 minimization with applications to tomography. Geophysics, 62(4): 1183-1195 [DOI: 10.1190/1.1444219]

Censi A. An ICP variant using a point-to-line metric//2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Pasa-dena, USA: IEEE: 19-25 [DOI: 10.1109/ROBOT.2008.4543181]

Chen H, Chen B F, Zhao Z S, Song B J. 2023. Point cloud registration based on learning Gaussian mixture models with global-weighted local representations. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 20: 1-5 [DOI: 10.1109/LGRS.2023.3256005]

Chen Y, Medioni G. 1992. Object modelling by registration of multi-ple range images. Image and vision computing, 10(3): 145-155 [DOI: 10.1016/0262-8856(92)90066-C]

Chetverikov D, Svirko D, Stepanov D and Krsek P. 2002. The Trim-med Iterative Closest Point algorithm//2002 International Co-nference on Pattern Recognition. Quebec City, Canada: IEEE: 545-548 [DOI: 10.1109/ICPR.2002.1047997]

Das S and Gross J N. 2023. Analysis of scale-variant robust kernel optimization for nonlinear least-squares problems. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 59(6): 752 9-7538 [DOI: 10.1109/TAES.2023.3290142]

Ding J, Liu Q and Sun P. 2019. A robust registration algorithm of point clouds based on adaptive distance function for surface ins-pection. Measurement Science and Technology, 30(7): 075003 [DOI: 10.1088/1361-6501/ab16ad]

Ding T, Wu H and Zhu D. 2024. Robust registration method for vehicle body components under abnormal point cloud interference. China Mechanical Engineering, 35(6): 1074-1085 (丁涛, 吴浩, 朱大虎. 2024. 异常点云干扰下的车身构件鲁棒性配准方法. 中国机械工程, 35(6): 1074-1085) [DOI: 10.3969/j.issn.1004-132X.2024.06.013]

© 中国图象图形学报版权所有

Du Y, Song Y, Guo C, Tian X J, Liu D and Cong M. 2024. MEDPNet: Achieving High-Precision Adaptive Registration for Complex Die Castings[EB/OL].[2024-03-15]. https://arxiv.org/abs/2403. 09996.pdf

Du X Z, Zhang Z Y, Zhang A, Song R, Li Y B, Min Z, et al. 2024. Obhmr: Robust partial-to-full generalized point set registration with overlap-guided bidirectional hybrid mixture model//2024 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Abu Dhabi, United Arab Emirates: IEEE: 7235-7242 [DOI: 10.1109/IROS58592.2024.10801428]

Edstedt J, Sun Q Y, Bökman G, Wadenback M and Felsberg M. 2024. Roma: Robust dense feature matching//2024 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Seattle, USA: IEEE: 19790-19800 [DOI: 10.1109/CVPR52733. 2024.01871]

Fathian K and Summers T. 2024. Clipper+: a fast maximal clique algorithm for robust global registration. IEEE Robotics and Automation Letters, 9(4): 3562-3569 [DOI: 10.1109/LRA. 2024.3368233]

Fischer K, Simon M, Milz S and Mäder P. 2025. Magneticpillars++: Efficient lidar odometry via deep frame-to-keyframe point cloud registration. Applied Artificial Intelligence, 39(1): e2472105 [DOI: 10.1080/08839514.2025.2472105]

Fortun D, Baudrier E, Zwettler F, Sauer M, Faisan S. 2025. Multiview point cloud registration with anisotropic and spatially varying localization noise. SIAM Journal on Imaging Sciences, 18(1): 280-307 [DOI: https://doi.org/10.1137/24M1632401]

Gong L, Liu J M, Ma J Y, Liu L H, Wang Y N and Wang H S. 2024. Eadreg: Probabilistic correspondence generation with efficient autoregressive diffusion model for outdoor point cloud registration [EB/OL].[2024-11-22]. https://arxiv.org/pdf/2411.15 271.pdf

Guo J C, Ren L, Xin Y F, Liu C, Zhang P and Wang L. 2024. Similarity Registration Algorithm of 3D Point Clouds Based on Improved ICP//2024 IEEE 7th Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference. Chongqing, China: IEEE: 7840-7845 [DOI: 10.1109/CAC59555. 2023.10450536]

Gupta H, Andreasson H, Magnusson M, Simon J and J. Lilientha A. 2023. Revisiting Distribution-Based Registration Methods// 2023 European Conference on Mobile Robots. Coimbra, Por-tugal: IEEE: 1-6 [DOI: 10.1109/ECMR59166.2023.10256416]

Haitman Y, Efraim A and Francos J M. 2026. C-GenReg: Training-Free 3D Point Cloud Registration by Multi-View-Consistent Geometry-to-Image Generation with Probabilistic Modalities Fusion [EB/OL]. [2026-04-17]. https://arxiv.org/abs/2604.166 80.pdf

Hertz A, Hanocka R, Giryes R and Cohen-Or D. 2020. Pointgmm: A neural gmm network for point clouds//Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Reco-gnition. Seattle, USA: IEEE: 12054-12063 [DOI: 10.1109/ CVPR42600.2020. 01207]

Hirose O. 2021. A Bayesian Formulation of Coherent Point Drift. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intellig-ence, 43 (7): 2269-2286 [DOI: 10.1109/TPAMI.2020.2971687]

Hitchcox T and Forbes J R. 2022. Mind the gap: Norm-aware adap-tive robust loss for multivariate least-squares problems. IEEE Robotics and Automation Letters, 7(3): 7116-7123 [DOI: 10.1 109/LRA. 2022.3179424]

Hong H and Lee B H. 2017. Probabilistic normal distributions transform representation for accurate 3D point cloud registra-tion//2017 IEEE/RSJ international Conference on intelligent robots and systems. Vancouver, Canada: IEEE: 3333-3338 [DOI: 10.1109/IROS.2017.8206170]

Hu Y, Hu L M, Chen F, Zhao S and Duan S K. 2025. Gricp: Granular-ball iterative closest point with multikernel correntropy for point cloud fine registration//Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. Philadelphia, USA: AAAI: 1710-1718 [DOI: https://doi.org/10.1609/aaai.v39i2. 32164]

Huang X S, Li S, Zuo Y F, Fang Y M, Zhang J and Zhao X W. 2022. Unsupervised point cloud registration by learning unified gaussian mixture models. IEEE Robotics and Automation Letters, 7(3): 7028-7035 [DOI: 10.1109/LRA.2022.3180443]

Huang S, Lin C and Zhao Y. 2026. DepthI2P: Towards Generalized Image-to-Point Cloud Registration Leveraging Depth Estim-ation. IEEE Transactions on Multimedia, 14(8): 1-13 [DOI: 10.1109/TMM.2026.3733556]

Huber P J. 1992. Robust estimation of a location parameter //Breakthroughs in statistics: Methodology and distribution. New York, USA: Springer: 492-518 [DOI: 10.1007/978-1-4612-4380-9_35]

Huang T Y, Peng L Z, Vidal R and Liu Y H. 2024. Scalable 3D registration via truncated entry-wise absolute residuals //Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Seattle, USA: IEEE: 27477-27487 [DOI: 10.1109/CVPR52733.2024.02594]

Lee S H, Vandewalle P and Civera J. 2026. Robust Single-Parameter Point Cloud Registration using Truncated Lp Functions [EB/OL]. [2026-10-25]. https://arxiv.org/abs/2610.34271.pdf

Ivanov I and Markgraf C. 2025. Fast globally optimal Truncated Least Squares point cloud registration with fixed rotation ax-is[EB/OL]. [2025-08-21]. https://arxiv.org/abs/2508.15613.pdf

Jiang H B, Shen Y Q, Xie J, Li J, Qian J J and Yang J. 2021. Sampling network guided cross-entropy method for unsupervised point cloud registration//Proceedings of the IEEE/CVF internation-nal conference on computer vision. Montreal, Canada: IEEE: 6128-6137 [DOI: 10.1109/ICCV48922.2021.00607]

Jiang H, Xie J, Yang J, Yu L and Zheng J M. 2025. Zero-shot RGB-d point cloud registration with pre-trained large vision model//2025 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recogni-

© 中国图象图形学报版权所有

tion. Nashville, USA: IEEE: 16943-16952 [DOI: 10.1109/CVPR52734.2025.01579]

Jung K, Hitchcox T and Forbes J R. 2024. An adaptive graduated non-convexity loss function for robust nonlinear least-squares solutions. IEEE Transactions on Robotics, 40: 4207-4221 [DOI: 10.1109/TRO.2024.3434169]

Kikkawa M, Yatagawa T, Ohtake Y and Suzuki H. 2026. Attention-guided reference point shifting for Gaussian-mixture-based partial point set registration. Computational Visual Media, 12(1): 105-121 [DOI: 10.26599/CVM.2025.9450429]

Laserna J, San Segundo P and Álvarez D. 2025. Clireg: Clique-based robust point cloud registration. IEEE Transactions on Robotics, 41: 1898 - 1917 [DOI: 10.1109/TRO.2025.3542954]

Lee D, Lim H and Han S. 2024. GenZ-ICP: Generalizable and degeneracy-robust LiDAR odometry using an adaptive weight-ing. IEEE Robotics and Automation Letters, 10(1): 152-159 [DOI: 10.1109/LRA.2024.3498779]

Li J, Zhang Y and Hu Q. 2021. Robust estimation in robot vision and photogrammetry: A new model and its applications. ISPRS Annals of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, 1: 137-144 [DOI: 10.5194/isprs-annals-V-1-2021-137-2021]

Li J Y, Hu Q W, Zhang Y J and Ai M Y. 2022. Robust symmetric iterative closest point[J]. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 185: 219-231 [DOI: 10.1016/j.isprsjprs.2022. 01.019]

Li R, Liu Z, Wei H, Cai Y X, Li H T and Zhang F. 2016. Efficient and distributed large-scale point cloud bundle adjustment via majorization-minimization[EB/OL].[2026-07-08]. https://arxiv. org/pdf/2502.18801.pdf

Lian W, Ma F, Pan H, Cui Z and Zuo W. 2026. DC-Reg: Globally Optimal Point Cloud Registration via Tight Bounding with Difference of Convex Programming [EB/OL]. [2026-07-08]. htt ps://arxiv. org/pdf/2603.25442.pdf

Lim H, Seo M, Carlone L and Park J. 2026. Towards Zero-Shot Point Cloud Registration Across Diverse Scales, Scenes, and Sensor Setups[EB/OL].[2026-07-08]. https://arxiv.org/pdf/2601.02759. pdf

Liu J, Wang G, Liu Z, Jiang C K, Pollefeys M and Wang H S. 2023. Regformer: An efficient projection-aware transformer network for large-scale point cloud registration//2023 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. Paris, France: IEEE: 8417-8426 [DOI: 10.1109/ICCV51070.2023.00776]

Liu W, Wu H, Chirikjian G S. 2021. LSG-CPD: Coherent Point Drift with Local Surface Geometry for Point Cloud Registration// Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. Montreal, Canada: IEEE: 15273-15282 [DOI: 10.1109/ICCV48922.2021.01501]

Liu Y X, Zou J G, Zhao Y Z, He Y F,Liu W Q and Wang N. 2026. Registration algorithm for heterogeneous point clouds based on building contour features. Acta Geodaetica et Cartogra-phica Sinica, (3): 32-37 (刘蕴萱, 邹进贵, 赵胤植, 贺亦峰, 刘文钦, 王娜. 2026. 基于建筑物轮廓特征的异源点云配准算法.测绘通报, (3):32-37) [DOI: 10.13474/j.cnki.11-2246.2026.0306]

Lv R, Liu H D, Wang Z J and Zhu D H. 2022. WPMAVM: Weighted plus-and-minus allowance variance minimization algorithm for solving matching distortion.Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 76: 102320 [DOI: 10.1016/j.rcim.2022.102320]

Lyu M J, Yang J, Qi Z Q, Xua R J and Liu J B. 2024. Rigid pairwise 3D point cloud registration: A survey. Pattern Recognition, 151: 110408 [DOI: 10.1016/j.patcog.2024.110408]

Magnusson M. 2009. The three-dimensional normal-distributions transform: an efficient representation for registration, surface analysis, and loop detection. Örebro: Örebro universitet: 1-220 [DOI: 10.1016/S0960-1481(02)00068-X]

Magnusson M, Vaskevicius N, Stoyanov T, Pathak K and Birk A. 2015. Beyond points: Evaluating recent 3D scan-matching algorithms// 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Seattle, USA: IEEE: 3631-3637 [DOI: 10. 1109/ICRA. 2015. 7139703]

Mei G F, Poiesi F, Saltori C, Zhang J, Ricci E and Sebe N. 2023. Overlap-guided Gaussian Mixture Models for Point Cloud Registration//Proceedings of the IEEE/CVF Winter Confer-ence on Applications of Computer Vision. Waikoloa, USA: IEEE: 4511-4520 [DOI: 10.1109/WACV56688.2023.00449]

Mei G F, Tang H, Huang X S, Wang W J, Liu J, Zhang J, et al. 2023. Unsupervised Deep Probabilistic Approach for Partial Point Cloud Registration//Proceedings of the IEEE/CVF Confer-ence on Computer Vision and Pattern Recognition. Vancouver, Canada: IEEE: 13611-13620 [DOI: 10.1109/CVPR52729. 2023.01308]

Myronenko A and Song X. 2010. Point Set Registration: Coherent Point Drift. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Mach-ine Intelligence, 32(12): 2262-2275 [DOI: 10.1109/TPAMI. 2010.46]

Pan Z and Li L. 2025. Robust Multiview Point Cloud Registration with Reliable Sparse Graph and Adaptive Reweighting// International Conference on Intelligent Computing. Ningbo, China: Springer: 268-280 [DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-95-0006-2_23]

Pan Y H, Yi J J, Dai Z Y, Zhao Y B and Wang L S. 2025. Ejrgf: Efficient joint registration of multiple point clouds using fast Gaussian filter. IEEE Robotics and Automation Letters, 10(11): 11212-11219 [DOI: 10.1109/LRA.2025.3608652]

Piedade V, Sidhartha C, Gaspar J, Govindu V M and Miraldo P. 2025. SAC-GNC: SAmple Consensus for adaptive Graduated Non-Convexity//Proceedings of the IEEE/CVF International Confer-ence on Computer Vision. Honolulu. USA: IEEE: 5780-5790 [DOI: 10.1109/ICCV51701.2025.00547]

Pottmann H, Huang Q X, Yang Y L and Hu S M. 2006. Geometry and convergence analysis of algorithms for registration of 3D shapes. International Journal of Computer Vision, 67(3): 277-296 [DOI:

© 中国图象图形学报版权所有

10.1007/s11263-006-5167-2]

Qian X, Wen F and Liu P. 2026. A Robust 3D Registration Method via Simultaneous Inlier Identification and Model Estimation. Journal of Imaging, 12(6): 247[DOI: https://doi. org/10.3390/ jimaging12060247]

Qin Z, Yu H, Wang C J, Guo Y L, Peng Y X and Xu K. 2022. Geometric transformer for fast and robust point cloud registration//Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Com-puter Vision and Pattern Recognition. New Orleans, Louisiana: IEEE: 11143-11152[DOI: 10.1109/CVPR52688.2022.01086]

Rusinkiewicz S. 2019. A symmetric objective function for ICP. ACM Transactions on Graphics (TOG), 38(4): 1-7[DOI: 10.1145/3306346.3323037]

Rusinkiewicz S and Levoy M. 2001. Efficient variants of the ICP algorithm//Proceedings Third International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling. Quebec City, Canada: IEEE: 145-152[DOI: 10.1109/IM.2001.924423]

Seo M, Lim H, Lee K, Carlone L and Park J. 2025. Buffer-x: Towards zero-shot point cloud registration in diverse scenes//2025 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. Honolulu, USA: IEEE: 3851-3862[DOI: 10.1109/ICCV51701. 2025.00367]

Sexton J T, Morin M, Giguère P and Gaudreault J. 2025. Fast (er) Robust Point Cloud Alignment Using Lie Algebra//2025 IEEE/ RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Hangzhou, China: IEEE: 10734-10740[DOI: 10.1109/IROS601 39. 2025.11247419]

Sharifipour S, Casado C A, Sabokrou M and López M B. 2026. Apml: Adaptive probabilistic matching loss for robust 3d point cloud reconstruction. Advances in Neural Information Processing Systems, 38: 104860-104892[DOI: 10.52202/085713-3504]

Shen Y, Zhang B, Wang J, Zhang Y, Wu Y, Chen Y, et al. 2024. MI-NDT: Multiscale iterative normal distribution transform for registering large-scale outdoor scans. Ieee transactions on geoscience and remote sensing, 62: 1-13[DOI: 10.1109/TGRS. 2024.3437162]

Su L J, Xu W and Li Q L. 2024. Robust point cloud registration in robotic inspection with locally consistent gaussian mixture model. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 73: 1-12[DOI: 10.1109/TIM.2024.3480198]

Sun S H, Cui X M, Yuan D B and Yang H D. 2025. Robust Registration of Multi-Source Terrain Point Clouds via Region-Aware Adaptive Weighting and Cauchy Residual Control. Remote Sensing, 17(17): 2960[DOI: 10.3390/rs17172960]

Stoyanov T, Magnusson M, Almqvist H and J. Lilienthal A. 2011. On the accuracy of the 3D normal distributions transform as a tool for spatial representation//2011 IEEE international conference on robotics and automation. Shanghai, China: IEEE: 4080-4085[DOI: 10.1109/ICRA.2011.5979584]

Tan J S, Lua C G and Srigrarom S. 2023. Air-to-ground Targets Re-identification from Non-aligned and Partially Overlapped Cameras by Homograhy Transfer and Iterative Closest Point with Huber Loss Function//2023 IEEE Symposium Sensor Data Fusion and International Conference on Multisensor Fusion and Integration. Bonn, Germany: IEEE: 1-8[DOI: 10. 1109/SDF-MFI59545.2023. 10361306]

Tang Y and Peng Y. 2026. Cauchy-MSE kernel based Iterative Closest Point for point cloud registration. Computer Vision and Image Understanding, 271: 104865[DOI: 10.1016/j.cviu.2026.1048 65]

Ulaş C and Temeltaş H. 2013. 3D multi-layered normal distribution transform for fast and long range scan matching. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 71(1): 85-108[DOI: 10.1007 /s10846-012-9780-8]

Wan H and Wu X Q. 2025. Survey of 3D point cloud registration. Journal of Image and Graphics, 30(10): 3255-3274 (万航, 吴晓群. 2025. 三维点云的配准方法综述. 中国图象图形学报, 30(10): 3255-3274)[DOI:10.11834/jig. 240550]

Wang D, Herraez D C, May S and Nüchter A. 2026. Dynamic-ICP: Doppler-Aware Iterative Closest Point Registration for Dynamic Scenes. IEEE Robotics and Automation Letters, 11(4): 5174-5181[DOI: 10.1109/LRA.2026.3669808]

Wang P, Li S D and Zhao X. 2017. 3D Normal Distribution Trans-form Point Cloud Registration Algorithm Based on Quasi-Newton Method. Journal of Spatio-temporal Information, 24(5): 42-44 (王鹏, 李少达, 赵雪. 2024. 基于拟牛顿法改进的3D正态分布变换点云配准算法. 地理信息世界, 2017, 24(5): 42-44)[DOI: 10.3969/j.issn.1672-1586.2017.05.008]

Wang Y and Solomon J M. 2019. Deep closest point: Learning representations for point cloud registration//Proceedings of the IEEE/ CVF International Conference on Computer Vision. Seoul, Korea (South): IEEE: 3523-3532[DOI: 10.1109/ICCV.2019. 00362]

Wang Q X and Wang M J. 2024. A novel 3D LiDAR deep learning approach for uncrewed vehicle odometry. PeerJ Computer Science, 10: e2189[DOI: 10.7717/peerj-cs.2189]

Wang Z, Yi J J, Su L and Pan Y H. 2024. Coherent point drift with Skewed Distribution for accurate point cloud registration. Computers & Graphics, 122: 103974[DOI: 10.1016/j.cag.2024. 103974]

Wei T, Patel Y, Shekhovtsov A, Mata J and Barath D. 2023. Generalized differentiable RANSAC//Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. Paris, France: IEEE: 17649-17660[DOI: 10.1109/ICCV51070.2023.0 1618]

Wu H, Liu H D, Ding T, Hua L and Zhu D H. 2026. PAVM: Progressive and Adaptive Variance Minimization Algorithm for Robust Registration, 48(3): 2282-2295[DOI: 10.1109/TPAMI. 2025.3625992]

Wu Q L, Jiang H B, Ding Y Q, Luo L, Xie J, Wu X J, et al. 2025. Diff-reg v2: Diffusion-based matching matrix estimation for image matching and 3d registration[EB/OL].[2025-03-25]. https://arxiv.org/abs/2503.04127.pdf

© 中国图象图形学报版权所有

Wu L H, Gan L H, Wu L K, Wen T, Shen Q F and Chen H Y. 2025. Bidirectional Trimmed ICP Point Cloud Registration Al-gorithm. Mechanical & Electrical Engineering Technology, 54(19): 19-24+64 (吴立华, 甘汤键, 吴立坤, 温涛, 申启访, 陈泓宇. 2025. 基于双向的修剪ICP点云配准算法. 机电工程技术, 54(19): 19-24+64) [DOI: 10.3969/j.issn.1009-9492.2025.00052]

Wu Y, Yuan Y Z, Xiang B H, Sheng J L, Lei J Y and Hu C Y. 2023. Overview of the computational intelligence method in 3D point cloud registration. Journal of Image and Graphics, 28(9): 2763-2787 (武越, 苑咏哲, 向本华, 绳金龙, 雷佳熠, 胡聪颖, 等. 2023. 三维点云配准中的计算智能方法综述. 中国图象图形学报, 28(9): 2763-2787) [DOI: 10.11834/jig.220727]

Xie H, Li W L, Yin Z P, Ding H. 2018. Variance-minimization iterative matching method for free-form surfaces—Part I: Theory and method. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 16(3): 1181-1191 [DOI: 10.1109/TASE.2018. 2875154]

Xin M T, Li B, Wei X and Zhao Z. 2021. Rapid registration method by using partial 3D point clouds. Optik, 246: 167764 [DOI: 10.1016/ j.ijleo.2021.167764]

Xiong K, Zheng M, Xu Q, Wen C L, Shen S Q and Wang C. 2024. SPEAL: Skeletal prior embedded attention learning for cross-source point cloud registration//Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. Vancouver, Canada: AAAI: 6279-6287 [DOI: https://doi.org/10.1609/ aaai.v38i6. 28446]

Yang H T, Bai H T, Li X L, Bi Z Q, Cheng Y L and Zhang P. 2025. An Adaptive Point Cloud Registration Method for Weld Beads Based on Geman-McClure Robust Kernel Function. IEEE Access, 13: 186760-186775 [DOI: 10.1109/ACCESS.2025. 3625902]

Yang H, Shi J and Carlone L. 2021. TEASER: Fast and Certifiable Point Cloud Registration. IEEE Transactions on Robotics, 37(2): 314-333 [DOI: 10.1109/TRO.2020.3033695]

Yang J Q, Zhang S K and Fan S C. 2022. Survey on multi-view point cloud registration algorithm. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 50(11): 16-34 (杨佳琪, 张世坤, 范世超, 曹治国. 2022. 多视图点云配准算法综述. 华中科技大学学报(自然科学版), 50(11): 16-34) [DOI: 10.13245/j.hust.221102]

Yew Z J and Lee G H. 2020. Rpm-net: Robust point matching using learned features//Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition. Seattle, USA: IEEE: 11824-11833 [10.1109/CVPR42600.2020.01184]

Yong B B, Lei M, Shen J, Zhi P, Zhao R and Zhou Q G. 2024. A Novel Point Cloud Registration Method for Multimedia Communi-cation in Automated Driving Metaverse. ACM Transactions on Internet Technology, 3672561 [DOI: 10.1145/3672561]

Yu H, Li F, Saleh M, Busam B and Ilic S. 2021. Cofinet: Reliable coarse-to-fine correspondences for robust pointcloud registra-tion. Advances in Neural Information Processing Systems, 34: 23872-23884 [DOI: 10.48550/arXiv.2110.14076]

Yu H, Qin Z, Hou J, Mahdi S, Li D S, Busam B, et al. 2023. Rotation-invariant transformer for point cloud matching//Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Vancouver, Canada: IEEE: 5384-5393 [DOI: 10.1109/CVPR52729.2023.00521]

Yu J, Ren L, Zhang Y, et al. 2023. Peal: Prior-embedded explicit attention learning for low-overlap point cloud registration// Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition. Vancouver, Canada: IEEE: 17702-17711 [DOI: 10.1109/CVPR52729.2023.01698]

Yuan W T, Eckart B, Kim K, Jampani V, Fox F and Kautz J. 2020. DeepGMR: Learning Latent Gaussian Mixture Models for Registration[EB/OL].[2026-07-08]. https://arxiv.org/pdf/2008. 09088.pdf

Yuan Y Z, Wu Y, Fan X L, Gong M G, Miao Q G and Ma W P. 2025. Where precision meets efficiency: Transformation diffusion model for point cloud registration//Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. Philadelphia, USA: AAAI: 9734-9742 [DOI: https://doi.org/10.1609/aaai.v39i9. 33055]

Yue H S, Xu Q Y, Chen F, Pan J and Chen W H. 2025. LP-ICP: General Localizability-Aware Point Cloud Registration for Robust Localization in Extreme Unstructured Environme-nts[EB/OL].[2026-07-08]. https://arxiv.org/pdf/2501. 02580.pdf

Zhang J, Zhao M, Liu B and Jiang X. 2026. Sinkhorn-CPD: Robust point cloud registration via unbalanced entropic optimal transport. Computer-Aided Design, 199: 104104 [DOI: 10.1016/ j.cad.2026.104104]

Zhang H B, Hai L Q, Sun H R, Wang X, Li R X, Geng G H, et al. 2024. GTGMM: geometry transformer and Gaussian Mixture Models for robust point cloud registration. Multimedia Tools and Applications, 83(33): 79757-79783 [DOI: 10.1007/ s11042-024-18660-8]

Zhang X Y, Yang J Q, Zhang S K and Zhang Y N. 2023. 3D registration with maximal cliques//Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recog-nition. Vancouver, Canada: IEEE: 17745-17754 [DOI: 10. 1109/CVPR52729.2023.01702]

Zhang Y X, Gui J, Yu B S, Cong X F, Gong X, Tao W B, et al. 2024. Deep learning-based point cloud registration: A comprehensive survey and taxonomy[EB/OL]. [2026-07-08] https://arxiv.org/pdf/2404.13830.pdf

Zheng C Y, Huang J, Chen H H and Wei M Q. 2025. Rare: Refine any registration of pairwise point clouds via zero-shot learning//2025 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. Honolulu, USA: IEEE: 26549-26558 [DOI: 10.1109/ICCV51701.2025.02464]

Zhao M and Xu L. 2025. ETC-PCR: Coarse-to-Fine Edge-Triangle Compatibility for Robust and Accurate Point Cloud Registra-tion. IEEE Access, 13: 102659-102674 [DOI: 10.1109/ACC ESS. 2025.

© 中国图象图形学报版权所有

3577668]

Zhao Q, Han X H and Chen Y W. 2015. A robust registration method using Huber ICP and low rank and sparse decomposition// 2015 Asia-Pacific Signal and Information Processing Asso-ciation Annual Summit and Conference. Hong Kong, China: IEEE: 744-752[DOI: 10.1109/APSIPA.2015.7415371]

作者简介

袁箫蝶,女,硕士研究生,主要研究方向为三维计算机视觉与点云配准等。E-mail:bonus20914@163.com

林浩,通信作者,男,博士,主要研究方向为数据挖掘、网络安全等。E-mail:suzukaze_aoba@126.com

万剑雄,男,博士,教授,主要研究方向为分布式系统、绿色计算、智能决策技术、机器学习等。E-mail:jxwan@imut.edu.cn

李雷孝,男,博士,教授,主要研究方向为数据分析与数据挖掘、网络空间安全、区块链技术等。E-mail:llxhappy@126.com

© 中国图象图形学报版权所有