



JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS

主办: 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

2020
07
VOL.25

ISSN1006-8961
CN11-3758/TB





第25卷第7期（总第291期）
2020年7月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊
中文核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院
主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

主 编 顾行发
编辑出版 《中国图象图形学报》编辑出版委员会
通信地址 北京市海淀区北四环西路19号
邮 编 100190
电子信箱 jig@radi.ac.cn
电 话 010-58887035
网 址 www.cjig.cn

广告发布登记号 京朝工商广登字20170218号
总 发 行 北京报刊发行局
订 购 全国各地邮局
海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司
(邮政信箱: 北京399信箱 邮编: 100048)
印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian | Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences
Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS
China Society of Image and Graphics
Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

Editor-in-Chief Gu Xingfa
Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of Image and Graphics
Address No. 19, North 4th Ring Road West, Haidian District, Beijing, P. R. China
Zip code 100190
E-mail jig@radi.ac.cn
Telephone 010-58887035
Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals
Domestic All Local Post Offices in China
Overseas China International Book Trading Corporation
(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China)
Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

CN 11-3758/TB
ISSN 1006-8961
CODEN ZTTXFZ

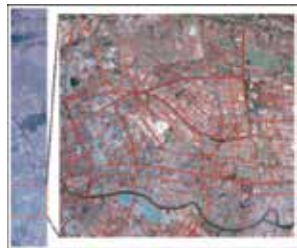
国外发行代号 M1406
国内邮发代号 82-831
国内定价 60.00元



非真实感绘制技术研究现状与展望(第1283页)



图卷积网络下牙齿种子点自动选取(第1481页)



迁移学习下高分快视数据道路快速提取(第1501页)

学者观点

非真实感绘制技术研究现状与展望

钱文华, 曹进德, 徐丹, 吴昊 1283

综述

深度哈希图像检索方法综述

刘颖, 程美, 王富平, 李大湘, 刘伟, 范九伦 1296

严肃游戏中虚拟角色行为建模综述

刘翠娟, 刘箴, 柴艳杰, 刘婷婷, 陈效奕 1318

智能制造中的计算机视觉应用瓶颈问题

雷林建, 孙胜利, 向玉开, 张悦, 刘会凯 1330

图像处理和编码

浅层CNN网络构建的噪声比例估计模型

徐少平, 林珍玉, 李崇禧, 崔燕, 刘蕊蕊 1344

烧结断面火焰图像退化模型及断面图像复原

王福斌, 刘贺飞, 武晨 1356

gyrator变换域的高鲁棒多图像加密算法

王丰, 邵珠宏, 王云飞, 姚启钧, 刘西林 1366

基于透射率修正的湍流模型与动态调整retinex的水下图像增强

汤新雨, 李敏, 徐灵丽, 郝真, 张学武 1380

图像分析和识别

俯视深度头肩序列行人再识别

王新年, 刘春华, 齐国清, 张世强 1393

结合混合池化的双流人脸活体检测网络

汪亚航, 宋晓宁, 吴小俊 1408

增强型灰度图像空间实现虹膜活体检测

刘明康, 王宏民, 李琦, 孙哲南 1421

基于水动力学、分数阶微分及Steger算法的线状目标提取

陈卫卫, 王卫星, 李润青, 蔡晓琰, 郑思凡 1436

时域候选优化的时序动作检测

熊成鑫, 郭丹, 刘学亮 1447

图像理解和计算机视觉

视频中多特征融合人体姿态跟踪

马淼, 李贻斌, 武宪青, 高金凤, 潘海鹏 1459

计算机图形学

插值给定数据点的四次PH曲线构造

方林聪, 阳诚砖, 邸文钰, 刘芳 1473

医学图像处理

图卷积网络下牙齿种子点自动选取

李占利, 孙志浩, 李洪安, 刘童鑫 1481

乳腺超声图像中易混淆困难样本的分类方法

杜章锦, 龚勋, 罗俊, 章哲敏, 杨菲 1490

遥感图像处理

迁移学习下高分快视数据道路快速提取

张军军, 万广通, 张洪群, 李山山, 冯旭祥 1501

CONTENTS

JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Research status and progress of non-photorealistic rendering technology(P1283)



Automatic selection of tooth seed point by graph convolutional network(P1481)



Rapid road extraction from quick view imagery of high-resolution satellites combined with transfer learning(P1501)

Scholar View

Research status and progress of non-photorealistic rendering technology

Qian Wenhua, Cao Jinde, Xu Dan, Wu Hao 1283

Review

Deep Hashing image retrieval methods

Liu Ying, Cheng Mei, Wang Fuping, Li Daxiang, Liu Wei, Fan Jiulun 1296

Virtual character behavior modeling in serious games: a review

Liu Cuijuan, Liu Zhen, Chai Yanjie, Liu Tingting, Chen Xiaoyi 1318

Bottleneck issues of computer vision in intelligent manufacturing

Lei Linjian, Sun Shengli, Xiang Yukai, Zhang Yue, Liu Huikai 1330

Image Processing and Coding

A shallow CNN-based noise ratio estimation model

Xu Shaoping, Lin Zhenyu, Li Chongxi, Cui Yan, Liu Ruirui 1344

Degradation model and restoration of flame image of sintering section

Wang Fubin, Liu Hefei, Wu Chen 1356

Multiple image encryption of high robustness in gyrator transform domain

Wang Feng, Shao Zhuhong, Wang Yunfei, Yao Qijun, Liu Xilin 1366

Underwater image enhancement based on turbulence model corrected by transmittance and dynamically adjusted retinex

Tang Xinyu, Li Min, Xu Lingli, Hao Zhen, Zhang Xuewu 1380

Image Analysis and Recognition

Person re-identification based on top-view depth head and shoulder sequence

Wang Xinnian, Liu Chunhua, Qi Guoqing, Zhang Shiqiang 1393

Two-stream face spoofing detection network combined with hybrid pooling

Wang Yahang, Song Xiaoning, Wu Xiaojun 1408

Enhanced gray-level image space for iris liveness detection

Liu Mingkan, Wang Hongmin, Li Qi, Sun Zhenan 1421

Linear object extraction based on hydrodynamics, fractional differential and Steger algorithm

Chen Weiwei, Wang Weixing, Li Runqing, Cai Xiaoyan, Zheng Sifan 1436

Temporal proposal optimization for temporal action detection

Xiong Chengxin, Guo Dan, Liu Xueliang 1447

Image Understanding and Computer Vision

Human pose tracking based on multi-feature fusion in videos

Ma Miao, Li Yibin, Wu Xianqing, Gao Jinfeng, Pan Haipeng 1459

Computer Graphics

Construction of quartic PH curves via interpolating given points

Fang Lincong, Yang Chengzhuan, Di Wenyu, Liu Fang 1473

Medical Image Processing

Automatic selection of tooth seed point by graph convolutional network

Li Zhanli, Sun Zhihao, Li Hongan, Liu Tongxin 1481

Classification method for samples that are easy to be confused in breast ultrasound images

Du Zhangjin, Gong Xun, Luo Jun, Zhang Zheming, Yang Fei 1490

Remote Sensing Image Processing

Rapid road extraction from quick view imagery of high-resolution satellites with transfer learning

Zhang Junjun, Wan Guangtong, Zhang Hongqun, Li Shanshan, Feng Xuxiang 1501

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2020)07-1473-08

论文引用格式: Fang L C, Yang C Z, Di W Y and Liu F. 2020. Construction of quartic PH curves via interpolating given points. Journal of Image and Graphics, 25(07): 1473-1480 (方林聪, 阳诚砖, 邸文钰, 刘芳. 2020. 插值给定数据点的四次 PH 曲线构造. 中国图象图形学报, 25(07): 1473-1480) [DOI:10.11834/jig.190534]

插值给定数据点的四次 PH 曲线构造

方林聪¹, 阳诚砖¹, 邸文钰², 刘芳¹

1. 浙江财经大学信息管理与人工智能学院, 杭州 310018; 2. 同济大学经济与管理学院, 上海 200082

摘要: 目的 PH(Pythagorean hodograph) 曲线由于具备有理等距曲线、弧长可精确计算等优良的几何性质, 广泛应用于数控加工和路径规划等方面。曲线插值是曲线构造的主要手段之一, 虽然对 PH 曲线的 Hermite 插值方法进行了广泛研究, 但插值给定数据点的构造方法仍有待突破, 为推广四次 PH 曲线的应用范围, 提出了一种新的四次 PH 曲线的 3 点插值问题解决方法。方法 从四次 PH 曲线的代数充分必要条件出发, 在该曲线的 Bézier 控制多边形中引入辅助控制顶点, 指出其中实参数的几何意义, 该实参数可作为形状调节因子对构造曲线进行交互。对给定的 3 个平面型值点进行参数化确定相应的参数值; 通过对四次 PH 曲线一阶导数积分得到曲线的显式表达, 其中包含一个待定复常量, 将给定的约束点代入曲线的显式表达式得到关于待定复常量的一元二次复方程, 求解该复方程并反求 Bézier 控制顶点得到符合约束条件的四次 PH 曲线。结果 实验对通过构造插值给定数据点的四次 PH 曲线进行比较, 当形状调节因此改变时, 曲线形状可进行有效交互。每次交互得到两条四次 PH 曲线, 通过弧长、弯曲能量、绝对旋转数的计算得到最优曲线, 并构造得到 PH 曲线的等距线。结论 本文方法给定的形状调节参数具有明确的代数意义和几何意义, 本文方法易于实现, 可有效进行交互。

关键词: 计算机辅助设计; Bézier 曲线; 控制多边形; 等距曲线; 四次 PH 曲线; 插值

Construction of quartic PH curves via interpolating given points

Fang Lincong¹, Yang Chengzhuan¹, Di Wenyu², Liu Fang¹

1. School of Information Management and Artificial Intelligence, Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou 310018, China; 2. School of Economics and Management, Tongji University, Shanghai 200082, China

Abstract: Objective The problem of interpolating three distinct planar points using quartic Pythagorean hodograph (PH) curves is studied. PH curves comprise an important class of polynomial curves that form a mathematical foundation of most current computer-aided design (CAD) tools. By incorporating special algebraic structures into their hodograph curves, PH curves exhibit many advanced properties over ordinary polynomial parametric curves. These properties include polynomial arc-length functions and rational offset curves. Thus, PH curves are considered a sophisticated solution for a variety of difficult issues arising in applications (e.g., tool paths) in the fields of computer numerically controlled machining and real-time motion control. For example, the arc-length of a PH curve can be computed without numerical integration, accelerating algorithms for numerically controlled machining. The offsets of a PH curve can also be represented exactly rather than being approximated in CAD systems. Thus, analyzing and manipulating PH curves are of considerable practical value in CAD and other applications. PH curves can be represented as widely used Bézier curves. The most intuitive and efficient

收稿日期: 2019-11-04; 修回日期: 2019-12-27; 预印本日期: 2020-01-03

基金项目: 浙江省自然科学基金项目 (LY18F020023, LQ19F020003, LY19F020011)

Supported by: Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (LY18F020023, LQ19F020003, LY19F020011)

method for constructing PH curves is by adjusting the control points of Bézier curves under conditions that guarantee PH properties. Therefore, a variety of methods for identifying PH curves are developed. Another important application of PH curves is the geometric construction of these curves. Considerable work has been conducted on Hermite interpolation with different degrees of PH curves. However, methods for interpolating three or more planar points have been rarely studied.

Method The necessary and sufficient condition for a planar curve to be a PH curve is a form of a product of complex polynomials, and a Bézier curve and its first derivative are Bernstein polynomials, which are a form of the sum of Bernstein basis functions. We derive a system of complex nonlinear equations by considering the compatibility of the two forms. The geometric meanings of the coefficients are then introduced by presenting several auxiliary points for their Bézier control polygons. To construct a quartic PH curve that interpolates any given three planar points, the first and last points are used as the two endpoints of a Bézier curve. The second point is parameterized by computing the chord lengths by connecting three given points. A complex unknown should be solved considering the integration of the first derivative. The compatibility of complex systems provides a quadratic complex equation with a real coefficient. Thus, in accordance with the fundamental theorem of algebra, two quartic PH curves satisfy any given conditions. A user may interactively construct a series of quartic PH curves by specifying a real coefficient. **Result** The method is implemented using MATLAB. A maximum of two families of quartic PH curves can be constructed for any given three points. Moreover, arc-lengths, bending energy, and absolute rotation numbers can be computed to select the best solution. Curves with low energy and/or an absolute rotation number can be generally regarded as the best solution because curves with a large bending energy and/or absolute rotation numbers are typically self-intersected. Examples show that the shape can be interactively adjusted by changing a real coefficient, determining the parameter value of the cusp. Lastly, the offsets of the constructed quartic PH curves are shown. **Conclusion** The proposed method can efficiently construct quartic PH curves for any given three planar points. Only a quadratic complex equation is required to be solved. Thus, the method is robust and efficient. Future studies may consider other applications of the proposed method, e. g., data interpolation using quartic PH splines.

Key words: computer aided design (CAD); Bézier curve; control polygon; offset curve; quartic PH curve; interpolation

0 引言

等距曲线在路桥设计、加工路径规划、数控机器设计等计算机辅助设计 (computer aided design, CAD) 中有着广泛应用。CAD 系统中主要的造型工具是多项式曲线曲面, 具有 Bézier 控制多边形功能, 给设计交互造型带来了极大便利。此外, Bézier 控制多边形具有凸包性、几何不变性、变差缩减等优良的几何性质, 进一步为多项式曲线曲面的几何计算提供了高效算法。

然而, 多项式曲线的单位法向量在计算时包含求根运算, 导致等距曲线通常不具有有理形式, 为此研究者提出了许多等距线的逼近算法。当参数曲线的一阶导数的欧氏范数为一个实多项式 (满足 Pythagorean 条件) 时, 该曲线的等距线自然可以表示为有理多项式形式, 这类曲线称为 PH (Pythagorean hodograph) 曲线 (Farouki 和 Sakkalis, 1990)。由于这种特殊性质, 使得 PH 曲线的弧长、曲率等几何量可被精确计算, 而无须使用数值积分运算。同时由

于 PH 曲线及其等距曲线能够很好地与现有 CAD 系统兼容, 等距曲线在 CAD 系统中也可精确表示。这些性质不仅提升了许多几何计算中的算法效率 (Farouki 和 Neff, 1995), 而且为各种实际应用提供了良好的解决方案, 特别是传统数控加工中的切、削、磨的刀具路径规划等。

PH 曲线是特殊的多项式参数曲线, 给定一个多项式曲线及其 Bézier 控制多边形, 能否有效判断该曲线为 PH 曲线, 在逆向工程中具有重要作用 (Farouki 等, 2015)。研究者对 PH 曲线的判别方法进行了深入研究。早在 PH 曲线提出时, Farouki 和 Sakkalis (1990) 就给出了三次 PH 曲线的几何判别方法, 指出若三次 PH 曲线的控制多边形满足两内角相等, 且第 2 条边是首末两边的等比中项, 则该曲线为三次 PH 曲线。Wang 和 Fang (2009) 采用平面曲线的复数表示方法, 给出了四次 PH 曲线的几何判别方法, 继而推广到五次、六次、七次 PH 曲线的几何特征研究 (Fang 和 Wang, 2018; Farouki, 2008; Zheng 等, 2016)。此外, Farouki 等人 (2015) 从代数学的角度提出了一种 PH 曲线的代数判别方法, 并给出

了在数控实际应用中的可靠计算精度范围。

另一方面, PH 曲线的构造方法也在不断改进, 为使用者对 PH 曲线进行交互设计提供了有效工具, 困扰 PH 曲线的 Hermite 插值问题也有了解决办法。Farouki 和 Neff (1995) 针对五次 PH 曲线的 C^1 插值问题, 指出对于任意给定的 C^1 端点条件, 总存在 4 个可行解, 即可以构造 4 条符合条件的五次 PH 曲线。Wang 等人 (2017) 通过对 4 个可行解中的曲线形状的讨论, 提出了选取最优解的标准与方法。雍俊海和郑文 (2005) 从几何角度给出了五次 PH 曲线的 C^1 Hermite 插值问题的一种求解方法。Meek 和 Walton (1997) 针对给定 G^1 连续的端点约束条件则存在两条符合条件的三次 PH 曲线给出了相应的构造方法, Byrtus 和 Bastl (2010) 在此基础上深入分析了插值解的数量与质量。Jüttler (2001) 针对七次 PH 曲线则可满足更高连续阶的端点约束条件, 提出了一类正则七次 PH 曲线在 $G^2[C^1]$ 端点条件下的构造方法, 并应用七次 PH 曲线对任意给定曲线进行逼近。Kong 等人 (2008) 对于特殊的 PH 曲线的 C^1 Hermite 插值方法, 采用曲线的复数表示, 对 PH 曲线的导矢曲线零点在复数域中分布情况进行了研究。Farouki (2014) 考虑到在数控加工中经常出现的直角过渡曲线设计问题, 研究了奇数次 PH 曲线在 G^2 连续的端点约束条件下的构造方法。此外, 偶数次的 PH 曲线也用于曲线构造。Wang 和 Fang (2009) 提出了四次 PH 曲线 G^1 条件下的几何构造方法。郭宇等人 (2019) 基于 Möbius 变换引入参数, 利用复分析的方法构造了四次有理抛物-PH 曲线的 C^2 Hermite 插值。方林聪和汪国昭 (2014) 以及王慧等人 (2016) 分别讨论了六次 PH 曲线在 C^1 和 G^2 端点条件下的构造方法以及圆弧的逼近问题。随着研究的不断深入, PH 曲线的相关理论推广到了高维曲线 (Farouki 等, 2002; Sakkalis 和 Farouki, 2012)、有理曲线 (Pottmann, 1995; Farouki 和 Šír, 2011) 以及 Minkowski 空间 (Moon, 1999; Kosinka 和 Jüttler, 2006)。更多的内容以及实例可以参考 Farouki 等人 (2008) 以及 Kosinka 和 Lávička (2014) 的相关论述。总之, PH 曲线 Hermite 插值方法的研究成果比较丰富, 然而 PH 样条的构造方法尚未深入研究。

数据插值在几何造型中的应用非常广泛, 设计者希望通过给定的型值点构造相应的几何模型。本

文以 PH 曲线的代数充要条件为基础, 提出了四次 PH 曲线的插值构造方法, 并讨论了均匀参数化、弦长参数化、弧长参数化方法在插值效果上的差异。通过比较曲线的弧长、弯曲能量、绝对旋转数等几何量来选择最优曲线。

1 四次 PH 曲线

定理 1 一条平面参数曲线是 PH 曲线当且仅当其一阶导数有如下形式的因式分解

$$P'(t) = w(t)[u(t) + iv(t)]^2$$

式中, $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ 为实多项式, 且 $u(t)$, $v(t)$ 互素。

若四次平面参数曲线 $P(t)$ 为 PH 曲线, 则有 $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ 均为一次实多项式。因此四次 PH 曲线的一阶导数有如下形式

$$P'(t) = [a(1-t) + t][z_0(1-t) + z_1t]^2 \quad (1)$$

式中, $a \in \mathbf{R}$, $z_0, z_1 \in \mathbf{C}$, $z_0 \neq kz_1$, $\forall k \in \mathbf{R}$ 。注意到 $P'\left(\frac{a}{a-1}\right) = 0$, 因此实系数 a 确定了四次 PH 曲线的奇异点的参数值。

令 P_i , $i = 0, \dots, n$, 为 Bézier 曲线 $P(t)$ 的控制顶点, 则 Bézier 曲线的一阶导数可表示为

$$P'(t) = 3 \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) \Delta P_i \quad (2)$$

式中, $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$, $i = 0, 1, 2$ 。通过比较 Bernstein 多项式系数, 得

$$\begin{cases} 4\Delta P_0 = az_0^2 \\ 12\Delta P_1 = z_0^2 + 2az_0z_1 \\ 12\Delta P_2 = az_1^2 + 2z_0z_1 \\ 4\Delta P_3 = z_1^2 \end{cases} \quad (3)$$

不妨令

$$\begin{cases} Q_0 = P_1 + \frac{z_0^2}{12} \\ Q_1 = P_3 + \frac{z_1^2}{12} \end{cases}$$

于是有

$$a = \frac{\Delta P_0}{3(Q_0 - P_1)} = \frac{P_2 - Q_0}{Q_1 - P_2} = \frac{3(P_3 - Q_1)}{\Delta P_3}$$

$$\arg \frac{P_2 - Q_0}{\Delta P_0} = \arg \frac{\Delta P_3}{Q_1 - P_2} = \arg \frac{z_1}{z_0}$$

即直线 Q_0Q_1 为直线 P_0P_1 与 P_3P_4 所成角的角平分

线,且经过控制顶点 P_2 , 因此 a 的几何意义是明确的,如图 1 所示。

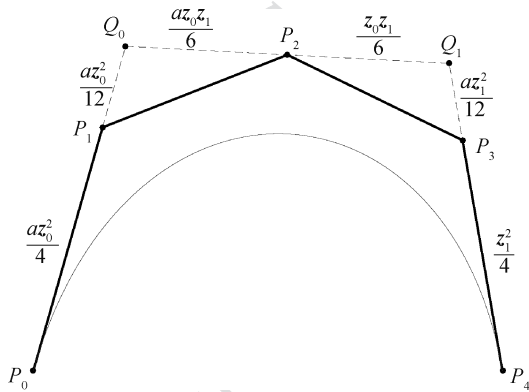


图 1 四次 PH 曲线的 Bézier 控制多边形

Fig. 1 Bézier control polygon of a quartic PH curve

给定一条平面参数曲线,令 k 为曲线的曲率,则该曲线的弧长 S 、弯曲能量 E 、绝对旋转数 R_{abs} 等曲线度量计算方法如下

$$S = \int ds = \int_0^1 \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

$$E = \int k^2 ds = \int_0^1 k^2 \|P'(t)\| dt$$

$$R_{\text{abs}} = \frac{1}{2\pi} \int |k| ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 |k| \|P'(t)\| dt$$

2 三点插值

考虑给定平面上 3 个型值点 $\bar{P}_i, i = 0, 1, 2$, 要求构造一条三次 PH 曲线 $P(t), t \in [0, 1]$, 插值这些数据点, 其中有 $P(0) = \bar{P}_0 = P_0, P(1) = \bar{P}_2 = P_4$ 。记 $\bar{P}_1$ 点的参数值为 t_1 , 即 $P(t_1) = \bar{P}_1$ 。这里 t_1 可以通过弦长参数化方法计算得到, 即

$$t_1 = \frac{\|\bar{P}_1 - \bar{P}_0\|}{\|\bar{P}_1 - \bar{P}_0\| + \|\bar{P}_2 - \bar{P}_1\|} \quad (4)$$

由于 $P'(t)$ 具有式(1)的形式, 因此 $P(t)$ 可通过对式(1)积分得到, 即

$$P(t) = \int P'(t) dt =$$

$$\int [a(1-t) + t][z_0(1-t) + z_1t]^2 dt =$$

$$\rho_0(t)z_0^2 + \rho_1(t)z_0z_1 + \rho_2(t)z_1^2 + Z$$

式中, Z 为待定的复常数, 其余实多项式系数 $\rho_0(t), \rho_1(t), \rho_2(t)$ 的表达式为

$$\rho_0(t) = -\frac{a}{4}(1-t)^4 + \frac{1}{2}(1-t)^2t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4$$

$$\rho_1(t) = a(1-t)^2t^2 + \frac{2}{3}(1-t)t^3 -$$

$$\frac{1}{2}at^4 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{2}{3}at^3$$

$$\rho_2(t) = \frac{1}{3}a(1-t)t^3 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{12}at^4 \quad (5)$$

记 $f_i = \rho_i(t_1), i = 0, 1, 2$ 。由于 $P(0) = \bar{P}_0 = P_0, P(t_1) = \bar{P}_1, P(1) = \bar{P}_2 = P_4$, 可以得到方程组

$$\begin{cases} -\frac{a}{4}z_0^2 + Z = \bar{P}_0 \\ f_0z_0^2 + f_1z_0z_1 + f_2z_1^2 + Z = \bar{P}_1 \\ \frac{1}{12}z_0^2 + \frac{1+a}{6}z_0z_1 + \frac{3+a}{12}z_1^2 + Z = \bar{P}_2 \end{cases}$$

在该方程组中, 将 z_0^2, z_0z_1, z_1^2 作为未知数, 可求得

$$\begin{cases} z_0^2 = \frac{4}{a}(Z - \bar{P}_0) \\ z_0z_1 = \frac{f_2(g_4 - g_3Z) - g_1(g_5 - g_2Z)}{f_2g_0 - f_1g_1} \\ z_1^2 = \frac{g_0(g_5 - g_2Z) - f_1(g_4 - g_3Z)}{f_2g_0 - f_1g_1} \end{cases} \quad (6)$$

式中,

$$\begin{cases} g_0 = \frac{1+a}{6}; g_1 = \frac{3+a}{12}; \\ g_2 = \frac{4f_0}{a}; g_3 = \frac{1}{3a}; \\ g_4 = \bar{P}_2 + \frac{1}{3a}\bar{P}_0; g_5 = \bar{P}_1 + \frac{4f_0}{a}\bar{P}_0 \end{cases} \quad (7)$$

进一步考虑 $(z_0z_1)^2 = z_0^2z_1^2$, 得到关于 Z 的一元二次复方程

$$AZ^2 + BZ + C = 0 \quad (8)$$

式中,

$$\begin{cases} A = (g_1g_2 - f_2g_3)^2 - \frac{4}{a}(f_2g_0 - f_1g_1)(f_1g_3 - g_0g_2) \\ B = 2(g_1g_2 - f_2g_3)(f_2g_4 - g_1g_5) - \frac{4}{a}(f_2g_0 - f_1g_1)[g_0g_5 - f_1g_4 + (f_1g_3 - g_0g_2)\bar{P}_0] \\ C = (f_2g_4 - g_1g_5)^2 + \frac{4}{a}(f_2g_0 - f_1g_1)(g_0g_5 - f_1g_4)\bar{P}_0 \end{cases} \quad (9)$$

由代数基本定理知, 当给定实数 a 时, 方程式(8)存在两个复数解, 即存在两条插值四次 PH 曲

线。综上所述, 给定实数平面上任意 3 个型值点 $\bar{P}_i, i = 0, 1, 2$, 以及实数 a (实数 a 具有明确的代数意义和几何意义), 则插值的四次 PH 曲线可以用如下算法构造得到。

输入: 复数表示的 3 个型值点 $\bar{P}_i, i = 0, 1, 2$, 一个实参数 a 。

输出: 复数表示的控制顶点 $P_i, i = 0, \dots, 4$ 。

- 1) 根据式(4)计算 $\bar{P}_1$ 的参数值 t_1 。
- 2) 根据式(5)计算 $f_i, i = 0, 1, 2$ 。
- 3) 根据式(7)计算 $g_i, i = 0, \dots, 5$ 。

4) 将 $f_i, g_j, i = 0, 1, 2, j = 0, \dots, 5$ 代入式(9)得到 A, B, C 。

5) 求解方程式(8)得到 Z 的两个解。

6) 通过式(6)计算得到 $z_0^2, z_0 z_1, z_1^2$ 。

7) 已知 $P_0 = \bar{P}_0, P_4 = \bar{P}_2$, 按照式(3)计算得 $P_i, i = 1, 2, 3$ 。

3 数值实例

图2—图4是应用本文算法构造的两个四次

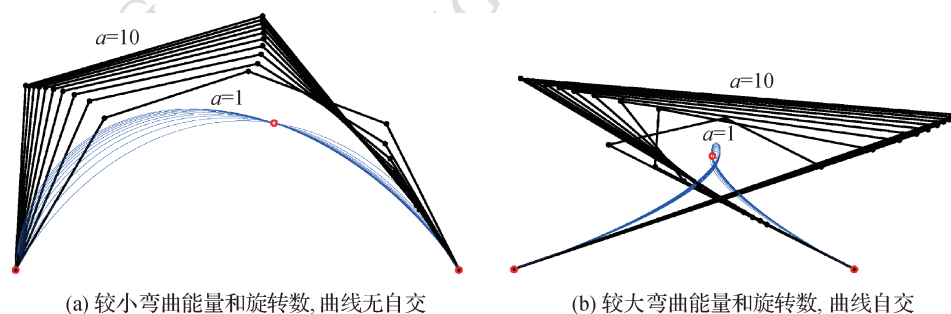


图2 第1个实例的两族四次 PH 曲线

Fig. 2 The first example of two families of quartic PH curves constructed ((a) curves with smaller bending energy and absolute rotation numbers are not self-intersected; (b) curves with bigger bending energy and absolute rotation numbers are self-intersected)

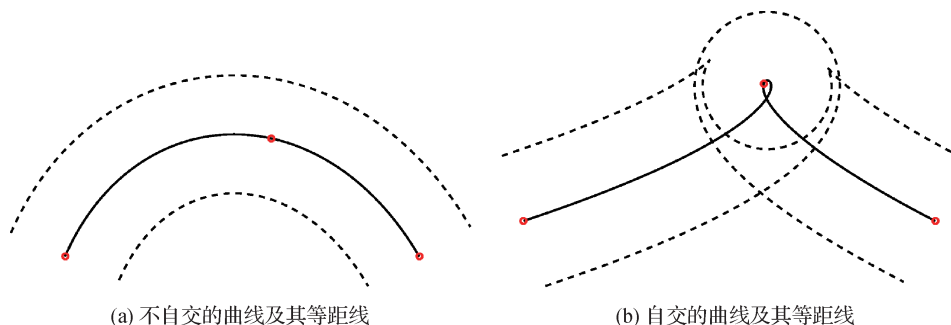


图3 $a = 2$ 时第1个实例的两条四次 PH 曲线及其等距线

Fig. 3 Two quartic PH curves with their offsets of the first example when $a = 2$
((a) none self-intersected curve with its offsets; (b) self-intersected curve with its offsets)

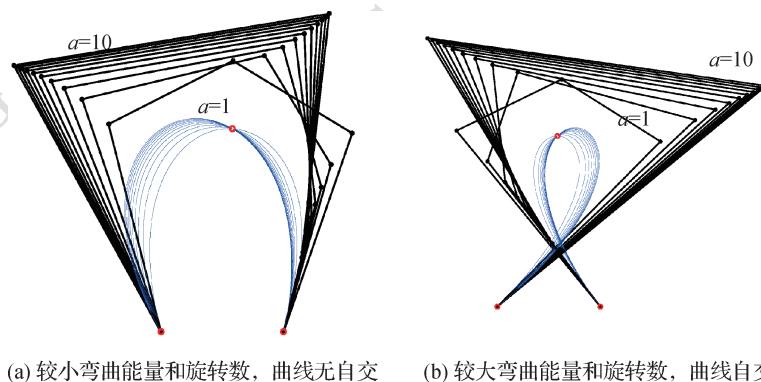


图4 第2个实例的两族四次 PH 曲线

Fig. 4 The second example of two families of quartic PH curves constructed ((a) curves with smaller bending energy and absolute rotation numbers are not self-intersected; (b) curves with bigger bending energy and absolute rotation numbers are self-intersected)

PH 曲线实例。在图 2 的实例中,给定型值点 $\bar{P}_0 = 0, \bar{P}_1 = 3.5 + 2i, \bar{P}_2 = 6$,给出了 $a = 1, \dots, 10$ 时构造的四次 PH 曲线。为比较得到的两族曲线,表 1 给出了相应的曲线几何量,包括曲线的弧长、弯曲能量、绝对旋转数等。注意到对于相同的参数 a ,得到的插值曲线具有相同的弧长,但图 2(a) 中的曲线具有较小的弯曲能量和旋转数,曲线无自交;图 2(b) 中的曲线具有较大的弯曲能量和旋转数,表现为自交曲线,实际应用中通常不采用。图 3 给出了当 $a = 2$ 时,本文方法构造的曲线及其等距曲线,图中实线表示 PH 曲线,虚线表示等距曲线。

表 1 图 2 中两族曲线几何量比较
Table 1 Comparison of curves' geometric measures in Fig. 2

a	图 2(a)			图 2(b)		
	弧长	弯曲能量	旋转数	弧长	弯曲能量	旋转数
1	7.617 7	0.630 5	0.342 8	7.617 7	57.839 6	0.874 0
2	7.683 2	0.654 2	0.350 8	7.683 2	53.881 9	0.873 0
3	7.746 9	0.692 4	0.360 6	7.746 9	50.319 1	0.872 5
4	7.801 1	0.729 2	0.369 2	7.801 1	47.660 8	0.872 2
5	7.846 6	0.762 0	0.376 3	7.846 6	45.663 5	0.872 0
6	7.884 9	0.790 7	0.382 3	7.884 9	44.122 0	0.871 8
7	7.917 6	0.815 6	0.387 3	7.917 6	42.900 4	0.871 6
8	7.945 8	0.837 4	0.391 5	7.945 8	41.909 8	0.871 5
9	7.970 2	0.856 5	0.395 2	7.970 2	41.091 1	0.871 4
10	7.991 7	0.873 4	0.398 3	7.991 7	40.403 2	0.871 2

在图 4 的实例中,给定型值点 $\bar{P}_0 = 0, \bar{P}_1 = 3.5 + 10i, \bar{P}_2 = 6$,给出了 $a = 1, \dots, 10$ 时构造的四次 PH 曲线。为比较得到的两族曲线,表 2 给出了相应的曲线几何量,包括曲线的弧长、弯曲能量、旋转数等。注意到对于相同的参数 a ,得到的插值曲线具有相同的弧长,但图 4(a) 中的曲线具有较小的弯曲能量和旋转数,曲线无自交;图 4(b) 中的曲线具有较大的弯曲能量和旋转数,表现为自交曲线,通常不被实际应用所采用。图 5 给出了当 $a = 2$ 时,本文方法构造的曲线及其等距曲线,图中 PH 曲线是实线表示的,而等距曲线是虚线表示的。

表 2 图 4 中两族曲线几何量比较

Table 2 Comparison of curves' geometric measures in Fig. 4

a	图 4(a)			图 4(b)		
	弧长	弯曲能量	旋转数	弧长	弯曲能量	旋转数
1	23.888 3	0.819 9	0.591 9	23.888 3	2.348 1	0.732 5
2	24.111 9	0.812 9	0.595 5	24.111 9	2.289 5	0.734 0
3	24.397 9	0.805 9	0.600 4	24.397 9	2.221 4	0.736 2
4	24.647 9	0.800 9	0.604 5	24.647 9	2.168 4	0.738 0
5	24.857 1	0.797 3	0.607 8	24.857 1	2.127 9	0.739 4
6	25.031 9	0.794 6	0.610 5	25.031 9	2.096 5	0.740 6
7	25.179 3	0.792 6	0.612 7	25.179 3	2.071 5	0.741 6
8	25.304 8	0.791 1	0.614 6	25.304 8	2.051 2	0.742 4
9	25.412 7	0.789 9	0.616 1	25.412 7	2.034 5	0.743 0
10	25.506 5	0.788 9	0.617 5	25.506 5	2.020 4	0.743 6

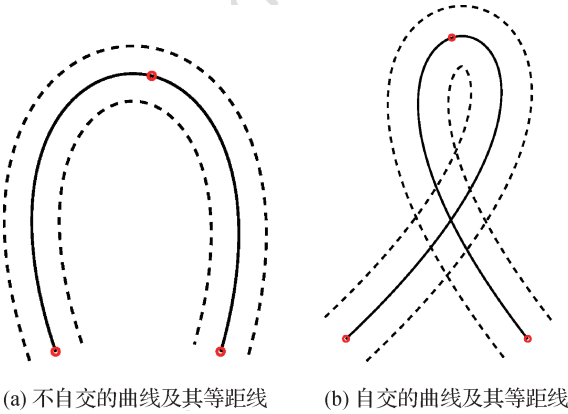


图 5 $a = 2$ 时第 2 个实例的两条四次 PH 曲线及其等距曲线

Fig. 5 Two quartic PH curves with their offsets of the second example where $a = 2$
(a) none self-intersected curve with its offsets;
(b) self-intersected curve with its offsets)

4 结 论

本文指出给定平面 3 个型值点的条件下,依次插值这 3 个点的四次 PH 曲线的构造问题可转化为一个带有实参数的一元二次复方程的求解问题。因此,由代数基本定理可知,当实参数给定时,存在不超过两条四次 PH 曲线满足插值条件。本文通过对四次 PH 曲线代数充分必要条件的深入分析,给出

了一元二次复方程的具体形式,进一步提出了详细的曲线构造算法。

实验结果表明,本文方法可有效构造四次 PH 曲线,且实参数可作为形状调节因子对曲线进行交互构造。通过对弧长、弯曲能量、绝对旋转数的计算,从两个可行解中可有效排除自交曲线。因此,本文的方法易于实现,应用灵活。

然而,由于本文方法未考虑端点的切向及高阶导数的约束条件,因此无法直接用于构造四次 PH 样条曲线。本文工作继续推广,可对任意给定的曲线使用四次 PH 曲线进行插值逼近,今后也可进一步讨论 PH 样条构造的可能性。

参考文献 (References)

- Byrtus M and Bastl B. 2010. G^1 Hermite interpolation by PH cubics revisited. *Computer Aided Geometric Design*, 27 (8): 622-630 [DOI: 10.1016/j.cagd.2010.06.004]
- Fang L C and Wang G Z. 2014. C^1 Hermite interpolation using sextic PH curves. *Scientia Sinica Mathematica*, 44 (7): 799-804 (方林聪, 汪国昭. 2014. 六次 PH 曲线 C^1 Hermite 插值. *中国科学: 数学*, 44 (7): 799-804) [DOI: 10.1360/N012013-00124]
- Fang L C and Wang G Z. 2018. Geometric characteristics of planar quintic Pythagorean-hodograph curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 330: 117-127 [DOI: 10.1016/j.cam.2017.08.014]
- Farouki R T. 2008. *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable*. Berlin: Springer
- Farouki R T. 2014. Construction of G^2 rounded corners with Pythagorean-hodograph curves. *Computer Aided Geometric Design*, 31 (2): 127-139 [DOI: 10.1016/j.cagd.2014.02.002]
- Farouki R T, Al-Kandari M and Sakkalis T. 2002. Hermite interpolation by rotation-invariant spatial Pythagorean-hodograph curves. *Advances in Computational Mathematics*, 17 (4): 369-383 [DOI: 10.1023/A:1016280811626]
- Farouki R T, Giannelli C and Sestini A. 2015. Identification and "reverse engineering" of Pythagorean-hodograph curves. *Computer Aided Geometric Design*, 34: 21-36 [DOI: 10.1016/j.cagd.2015.04.001]
- Farouki R T, Jüttler B and Manni C. 2008. Pythagorean-hodograph curves and related topics. *Computer Aided Geometric Design*, 25 (4/5): 203-204 [DOI: 10.1016/j.cagd.2008.01.001]
- Farouki R T and Neff C A. 1995. Hermite interpolation by Pythagorean hodograph quintics. *Mathematics of Computation*, 64 (212): 1589-1609 [DOI: 10.1090/S0025-5718-1995-1308452-6]
- Farouki R T and Sakkalis T. 1990. Pythagorean hodographs. *IBM Journal of Research and Development*, 34 (5): 736-752 [DOI: 10.1147/rd.345.0736]
- Farouki R T and Štr Z. 2011. Rational Pythagorean-hodograph space curves. *Computer Aided Geometric Design*, 28 (2): 75-88 [DOI: 10.1016/j.cagd.2011.01.002]
- Guo Y, Jiang P, Wang J M and Liu Z. 2019. C^2 Hermite interpolation based on quartic rational parabolic-PH curves by using Möbius transformation. *Journal of Image and Graphics*, 24 (1): 96-102 (郭宇, 江平, 王剑敏, 刘植. 2019. Möbius 变换下四次有理抛物-PH 曲线的 C^2 Hermite 插值. *中国图象图形学报*, 24 (1): 96-102) [DOI: 10.11834/jig.180318]
- Jüttler B. 2001. Hermite interpolation by Pythagorean hodograph curves of degree seven. *Mathematics of Computation*, 70 (235): 1089-1111 [DOI: 10.1090/S0025-5718-00-01288-6]
- Kong J H, Jeong S P, Lee S and Kim G I. 2008. C^1 Hermite interpolation with simple planar PH curves by speed reparametrization. *Computer Aided Geometric Design*, 25 (4/5): 214-229 [DOI: 10.1016/j.cagd.2007.11.006]
- Kosinka J and Jüttler B. 2006. C^1 Hermite interpolation by Minkowski Pythagorean hodograph cubics. *Computer Aided Geometric Design*, 23 (5): 401-418 [DOI: 10.1016/j.cagd.2006.01.004]
- Kosinka J and Lávička M. 2014. Pythagorean hodograph curves: a survey of recent advances. *Journal for Geometry and Graphics*, 18 (1): 23-43
- Meek D S and Walton D J. 1997. Geometric Hermite interpolation with Tschirnhausen cubics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 81 (2): 299-309 [DOI: 10.1016/S0377-0427(97)00066-6]
- Moon H P. 1999. Minkowski Pythagorean hodographs. *Computer Aided Geometric Design*, 16 (8): 739-753 [DOI: 10.1016/S0167-8396(99)00016-3]
- Pottmann H. 1995. Rational curves and surfaces with rational offsets. *Computer Aided Geometric Design*, 12 (2): 175-192 [DOI: 10.1016/0167-8396(94)00008-G]
- Sakkalis T and Farouki R T. 2012. Pythagorean-hodograph curves in Euclidean spaces of dimension greater than 3. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236 (17): 4375-4382 [DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2012.04.002]
- Wang G Z and Fang L C. 2009. On control polygons of quartic Pythagorean-hodograph curves. *Computer Aided Geometric Design*, 26 (9): 1006-1015 [DOI: 10.1016/j.cagd.2009.08.003]
- Wang H, Zhu C G and Li C Y. 2016. G^2 Hermite interpolation by Pythagorean hodograph of degree six. *Journal of Graphics*, 37 (2): 155-165 (王慧, 朱春钢, 李彩云. 2016. 六次 PH 曲线 G^2 Hermite 插值. *图学报*, 37 (2): 155-165) [DOI: 10.11996/JG.j.2095-302X.2016020155]
- Wang H, Zhu C G and Li C Y. 2017. Identification of planar sextic Pythagorean-hodograph curves. *Journal of Mathematical Research with Applications*, 37 (1): 59-72
- Yong J H and Zheng W. 2005. Geometric method for Hermite interpolation

tion by a class of PH quintics. Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics, 17(5): 990-995 (雍俊海, 郑文. 2005.

一类五次 PH 曲线 Hermite 插值的几何方法. 计算机辅助设计与图形学学报, 17(5): 990-995) [DOI: 10.3321/j.issn:1003-9775.2005.05.019]

Zheng Z H, Wang G Z and Yang P. 2016. On control polygons of Pythagorean hodograph septic curves. Journal of Computational and Applied Mathematics, 296: 212-227 [DOI: 10.1016/j.cam.2015.09.006]

阳诚砖,男,讲师,主要研究方向为计算机视觉、模式识别、人工智能。E-mail: chengzhuanyang@zufe.edu.cn

邸文钰,女,本科生,主要研究方向为数据可视化、数据挖掘与可视分析。E-mail: 1753566@tongji.edu.cn

刘芳,女,讲师,主要研究方向为数据可视化、数据挖掘与可视分析。E-mail: maggie_liufang@126.com

作者简介



方林聪,1982 年生,男,副教授,硕士生导师,主要研究方向为计算机辅助设计与图形学、几何设计与计算。

E-mail: lincongfang@gmail.com