

水平集图像分割方法综述

钱芸 张英杰

(西安交通大学机械学院, 西安 710049)

摘要 图像分割是图像处理中的关键技术之一, Osher 和 Sethian 提出的水平集方法有效地解决了以前算法不能解决在曲线演化过程中的拓扑变化问题。目前, 基于水平集方法的图像分割算法很多, 对于不同应用领域的图像处理问题, 人们都提出了相应的解决方法, 而且大量的研究者还在不断改进和提高这些算法的效率和有效性。因此, 本文按照水平集算法在图像分割中应用的发展历程将其分为 3 种情况进行了综述, 以此为该领域读者提供借鉴。

关键词 水平集 图像分割 活动轮廓模型 Mumford-Shah 模型 多相位

中图分类号: TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2008)01-0007-07

Level Set Methods and Its Application on Image Segmentation

QIAN Yun, ZHANG Ying-jie

²⁾ (School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract Image segmentation is a key problem in image processing. Curve evolution, which is very difficult to solve previously, was effectively handled by level set method proposed by Osher and Sethian. At present, there are so many image segmentation methods based on level set, and there are different methods to different images. Now, these methods are continually improved to enhance the speed and the veracity. So in this paper, according to the development of the image segmentation methods based on level set, this algorithm is introduced for readers of different backgrounds in this field to use.

Keywords level set, image segmentation, active contour model, Mumford-Shah model, multiphase

1 引言

借鉴一些流体中的重要思想, 1988 年, Osher 和 Sethian 首次提出了水平集算法^[1], 这是一种有效解决曲线演化问题的数值方法, 并且计算稳定, 适宜任意维数空间。随后, Osher 等人对水平集算法做出扩展和总结^[2,3], Giga 也做了相关的理论扩展^[4]。近年来这种算法已被广泛地应用在图像处理领域^[5]中, 尤其在图像分割中已取得了很大的进展。事实上, 用水平集来解决图像分割问题的实质就是与活动轮廓模型结合, 用水平集方法来求解这些模型得到的偏微分方程 PDE (partial differential equation), 属于边缘检测的分割方法。

2 水平集方法

水平集方法将 n 维曲面的演化问题转化为 $n+1$ 维空间的水平集函数曲面演化的隐含方式来求解, 主要包括 3 个要素: 超曲面的数据表示, 控制曲面演化的一系列 PDE 以及相应的数值解法。Osher 和 Fedkiw 对水平集方法做了归纳和总结^[6]。为简化问题, 这里选择 $n=2$ 来讨论。水平集的主要思想是将 2 维平面闭合曲线 $C(t)$ 表示为水平集函数 φ 的零水平集 $\varphi(t=0)$, 即将界面嵌入到一个曲面中, 将 2 维曲线的演化转化为 3 维曲面演化。具体情况如图 1 所示。

首先, 定义符号距离函数 (signed distance function, SDF):

收稿日期: 2006-02-28 改回日期: 2006-09-12

第一作者简介: 钱芸 (1982~), 女。现在西安交通大学攻读飞行器设计专业硕士学位。研究方向是面向逆工程的图像分割和 3 维建模。

E-mail: qianyun@hqec.com; qy333312@yahoo.com.cn



图 1 水平集方法原理示意图

Fig. 1 The sketch map of level set method

$$\varphi(x, t = 0) = \pm d \quad (1)$$

其中, d 表示点 x 到初始闭合曲线 $C(t=0)$ 的最短距离, 其符号取决于点 x 在曲线的内部还是外部, 通常在外部分取正号, 在内部取负号。

水平集函数曲面的演化遵循下面的 Hamilton-Jacobi 方程^[1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F |\nabla \varphi| \\ \varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

其中, F 表示曲线上各点的演化速度, 方向沿着曲线的法线方向, 通常与图像梯度和曲线曲率有关。我们想要分析和计算的是在速度 F 的作用下, 曲面随后的演化情况。从式(2)可以看出, 只要速度 F 变化平滑, 则 $\varphi(x, y, t)$ 始终保持是一个光滑函数, 零水平集始终与运动曲面相对应, 曲面的拓扑变化可以很容易地描述。对于不同的分割模型, 速度 F 表达式也不相同, 从而出现了多种基于水平集的图像分割方法。另外, 可以看出式(2)对任意维数的曲面演化都适用。曲线的几何特性也可以很容易地从水平集函数 $\varphi(x, y, t)$ 得出, 譬如, 曲线 C 上各点的

法线矢量 $\mathbf{n} = \nabla \varphi$, 以及曲线曲率 $K = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right) = \frac{\varphi_{xx}\varphi_y^2 - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + \varphi_{yy}\varphi_x^2}{(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)^{3/2}}$ 。计算过程中, 可以利用有

限差分法结合离散网格在数值上近似求解, 水平集函数的梯度也可以利用空间导数得到很好的近似。

通常情况下, 速度 F 只定义在零水平层, 而扩展是在整个曲面进行, 因此需要将 F 扩展到整个函数曲面。最初的扩展方法就是全局扩展算法, 但这种方法的操作区域是整个图像平面, 计算量大, 效率低。针对这一问题, Malladi 等人提出了窄带算法及自适应窄带算法^[7], 该方法将计算区域由整个图像平面缩减到曲线周围的一个窄带内, 计算量大大减少, 提高了效率。这两种算法的过程是相同的, 只是处理的数据量不同。

这种基于水平集的数值方法以一种隐含的方式

描述曲面的运动变化。所有曲面运动相关的信息和运动曲面本身的情况都体现在水平集函数之中。

3 基于梯度信息的活动轮廓模型的水平集图像分割方法

3.1 活动轮廓模型

Snake 模型又称活动轮廓模型^[8], 其基本思想是使初始曲线在一系列的外部约束力和图像内在能量的相互作用下进行演化, 直至它满足一定的收敛条件停止在图像的边缘, 实现图像的分割。Snake 模型的原理就是要计算能量最小, 即 $\inf_C J_1(C)$, 其具体形式为

$$J_1(C) = \alpha \int_0^1 |C'(s)|^2 ds + \beta \int_0^1 |C''(s)|^2 ds - \lambda \int_0^1 |\nabla u_0(C(s))|^2 ds \quad (3)$$

式中, 参数 α, β, λ 为非负的常数, $C(s)$ 为初始曲线。式(3)开头两项的作用是用来控制轮廓的平滑性, 属于内部能量; 最后一项是控制分割物体周围的轮廓的, 属于外部能量。可以看出, 要使能量达到最小化, 就要把演化曲线 $C(s)$ 置于梯度 $|\nabla u_0(C(s))|$ 最大的地方, 也就是到达目标物体边缘, 从而实现图像分割。

随后, 基于平均曲率的变化情况, Caselles 等人提出了水平集的几何活动轮廓模型^[9], 其水平集的曲线演化方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = g(|\nabla u_0|) |\nabla \varphi| \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right) + \nu \right) \\ \varphi(0, x, y) = \varphi_0(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

式中, ν 是大于零的常数。 $g(|\nabla u_0|)$ 是边缘检测子, 是一个正的递减函数, 它依赖于图像梯度信息, 具体形式为

$$g(|\nabla u_0(x, y)|) = \frac{1}{1 + |\nabla G_\sigma(x, y) * u_0(x, y)|^2} \quad (5)$$

式中, $G_\sigma(x, y) * u_0(x, y)$ 是图像 u_0 与方差为 σ 的高斯滤波器的卷积, 显然在梯度较大处 $g(u_0)$ 趋近于 0。

同时, Malladi 等人提出了两种基于梯度的水平集活动轮廓模型^[10]。他们将速度函数 F 分为两部分: $F = F_A + F_C$, F_A 是基于符号控制曲线扩张和收缩的常量, 就像在传统 Snake 模型^[11]中扩张力一样。 F_C 是依赖于曲线的几何特性(如曲率 K)的变

量。其中,第 1 种活动轮廓模型的曲线演化方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = |\nabla \varphi| \left(-F_{\Lambda} + \frac{F_{\Lambda}}{(M_1 - M_2)} (|\nabla G_{\sigma}(x, y) * u_0(x, y)| - M_2) \right) \\ \varphi(0, x, y) = \varphi_0(x, y) \end{cases} \quad (6)$$

式中, M_1 和 M_2 分别表示图像梯度的最大值和最小值。

第 2 种活动轮廓模型的曲线演化方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{1 + |\nabla G_{\sigma}(x, y) * u_0(x, y)|} (F_{\Lambda} + F_C) |\nabla \varphi| \\ \varphi(0, x, y) = \varphi_0(x, y) \end{cases} \quad (7)$$

从式(7)可以看出,第 2 种模型与基于几何的活动轮廓模型式(4)很相似。随后,Caselles 等人在基于能量最小化的 Snakes 模型和基于曲线进化理论的几何活动轮廓模型的基础上提出了测地线活动轮廓模型^[12],对分割具有裂口、缝隙的图像有很好的效果。事实上,此模型是建立在几何活动轮廓模型的基础上进行改进的,其曲线演化方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = |\nabla \varphi| \left(\operatorname{div} \left(g(|\nabla u_0|) \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right) + \nu g(|\nabla u_0|) \right) \\ \varphi(0, x, y) = \varphi_0(x, y) \end{cases} \quad (8)$$

图 2 所示为基于梯度的图像分割中的曲线演化过程。

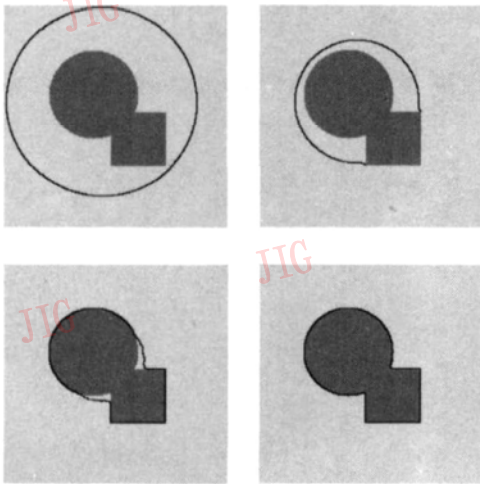


图 2 梯度变化明显图像的分割过程

Fig. 2 The segment process of the edge-stopping image

对于依赖于梯度有缝隙、裂口的图像,采用以上的水平集方法进行图像分割具有一定的优势。

3.2 数值算法

基于 PDE 的水平集求解的基本步骤是:(1)初

始化距离函数及设置各种参数(如时间间隔等)。(2)利用上述曲线演化模型通过迭代方式计算水平集函数直到收敛为止。

该算法的第 1 步是初始化水平集函数。Adalsteinsson 和 Sethian^[13] 提出基于窄带的快速推进法在迭代过程进行水平集函数的重新初始化,大大地提高了曲线演化速度。快速推进法(fast marching method)^[14,15] 是一种求解边界值问题——Eikonal 方程的数值解法。该算法结合了 Hamilton-Jacobi 方程粘性解法中的上推算法、窄带算法以及最小数据堆的数据结构。随后,Zhao 提出了快速扫描法(fast sweeping method)来求解 Eikonal 方程^[16] 以及 Hamilton-Jacobi 方程^[17,18],这种扫描算法还被用来计算距离函数^[19]。快速扫描方法将计算复杂度由快速推进法的 $O(N \log N)$ 降到 $O(N)$ 。而且因为快速扫描算法不需要堆栈,所以比快速推进法更易实现。

4 基于 Mumford-Shah 模型的水平集图像分割方法

以上介绍的模型都是基于梯度信息的图像分割模型,对于比较模糊或者噪声较大的图像,以上方法很难奏效,甚至可能出现不正确的分割结果。鉴于这种情况,Chan-Vese 提出了一种基于 Mumford-Shah 模型的水平集图像分割方法^[20],此方法不依赖梯度信息,利用计算能量函数最小实现图像分割,所以该方法具有全局最优。

4.1 Chan-Vese 图像分割模型

Mumford-Shah 模型^[21] 是一种基于能量最小化的用于图像分割或降噪模型。Mumford-Shah 模型的基本形式是:

$$E(u, C) = \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx dy + \mu \int_{\Omega \setminus C} |\nabla u|^2 dx dy + \nu \cdot \text{length}(C) \quad (9)$$

式中, μ, ν 是非负常数, Ω 表示图像区域,曲线 C 表示区域的边界, u_0 表示初始图像, u 表示逼近原始图像 u_0 一个分段光滑图像。要解决的主要问题是极小化能量函数 $E(u, C)$, Chan-Vese 提出用水平集方法来解决 Mumford-Shah 问题^[20]。此外,他们将 Mumford-Shah 模型又分为分段光滑和分段常数两种情况。

首先介绍分段光滑(piecewise smooth) Chan-

Vese 模型^[22]。假设 C 是一条封闭曲线(活动轮廓),它将图像区域 Ω 分为曲线的内部和外部,分别表示为 u^+ 和 u^- 。利用水平集方法求解该模型,用水平集函数 $\varphi(x, y, t)$ 来代替未知曲线 $C(t)$,如果当前点在曲线 C 外,则 $\varphi(x, y, t) < 0$,反之, $\varphi(x, y, t) > 0$,在曲线上,则 $\varphi(x, y, t) = 0$ 。那么式(9)将变为

$$\begin{aligned}
 E(u^+, u^-, \varphi) = & \int_{\Omega} |u^+ - u_0|^2 H(\varphi) dx dy + \\
 & \mu \int_{\Omega} |\nabla u^+|^2 H(\varphi) dx dy + \\
 & \int_{\Omega} |u^- - u_0|^2 (1 - H(\varphi)) dx dy + \\
 & \mu \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 (1 - H(\varphi)) dx dy + \\
 & \nu \int_{\Omega} |\nabla H(\varphi)| dx dy \quad (10)
 \end{aligned}$$

将 $E(u^+, u^-, \varphi)$ 最小化,可得到相应的欧拉-拉格朗日方程:

$$\begin{cases}
 u^+ - u_0 = \mu \Delta u^+ & \varphi > 0 \\
 \frac{\partial u^+}{\partial n} = 0 & \varphi = 0 \\
 u^- - u_0 = \mu \Delta u^- & \varphi < 0 \\
 \frac{\partial u^-}{\partial n} = 0 & \varphi = 0
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = & \delta(\varphi) \left[\nu \nabla \left(\frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right) - |u^+ - u_0|^2 - \right. \\
 & \left. \mu |\nabla u^+|^2 + |u^- - u_0|^2 + \mu |\nabla u^-|^2 \right] \quad (11)
 \end{aligned}$$

上式中, $H(\varphi)$ 是 Heaviside 函数, $\delta(\varphi)$ 是 Dirac 函数,定义为

$$\begin{aligned}
 H(\varphi) &= \begin{cases} 1 & \varphi \geq 0 \\ 0 & \varphi < 0 \end{cases} \\
 \delta(\varphi) &= \frac{d}{d\varphi} H(\varphi) \quad (12)
 \end{aligned}$$

利用该模型进行图像分割时,具有平滑和降噪作用。其分割过程如图 3 所示。

Marquina-Osher 将 $\delta(\varphi)$ 替换成 $|\nabla \varphi|^{[23]}$,此法不依赖于水平集函数的选择,消除了 Dirac 函数对检测远离活动轮廓线边缘的抑制,问题就变成形态学问题^[22]。

分段常数 (piecewise constant) Chan-Vese 模型^[22]是 Mumford-Shah 模型的一个特例。现在以两相 (two-phase) 情况为例讨论其水平集表示形式。这里只涉及一个水平集函数 φ ,其能量函数为

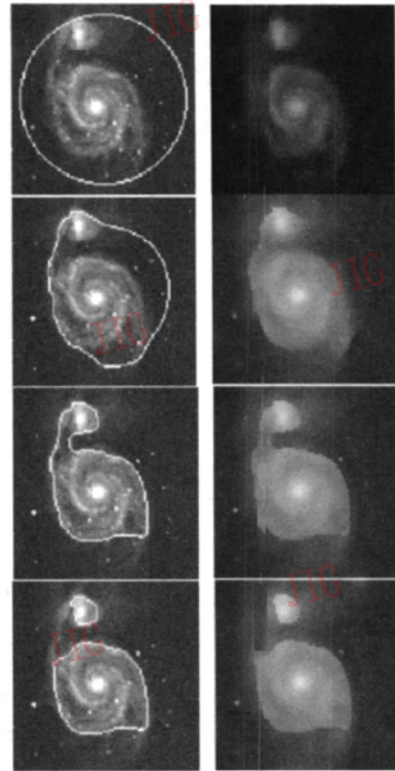


图 3 分段光滑模型的分割过程与结果

Fig. 3 Segment process and the result of the piecewise-smooth model

$$\begin{aligned}
 E(c_1, c_2, C) = & \int_{\Omega} |u_0 - c_1|^2 H(\varphi) dx dy + \\
 & \int_{\Omega} |u_0 - c_2|^2 (1 - H(\varphi)) dx dy + \\
 & \nu \int_{\Omega} |\nabla H(\varphi)| dx dy \quad (13)
 \end{aligned}$$

通过能量最小化,得到相应的欧拉-拉格朗日方程为

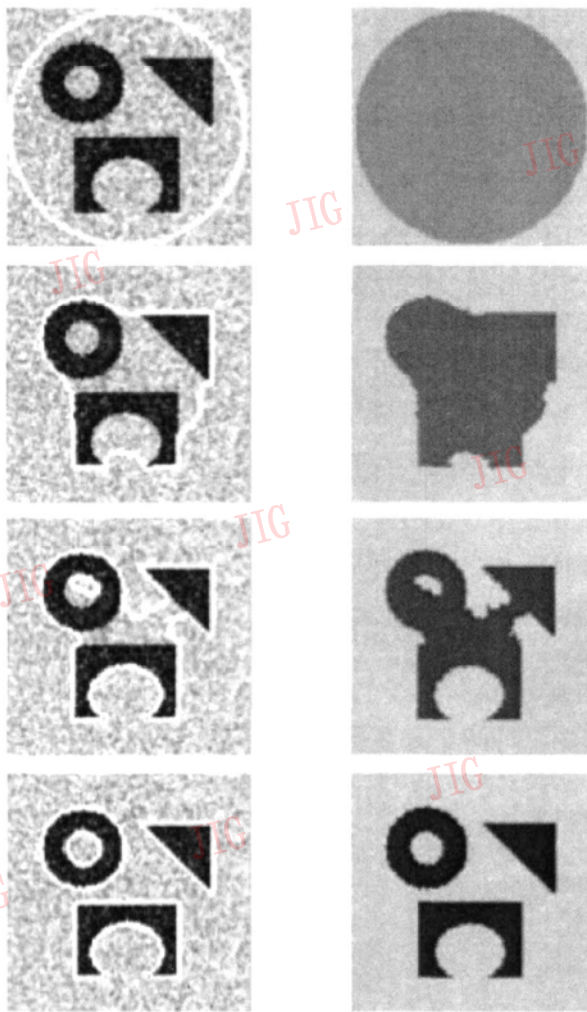
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \delta(\varphi) \left(\nu \nabla \left(\frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right) - (u_0 - c_1)^2 + (u_0 - c_2)^2 \right) \quad (14)$$

式中, c_1 和 c_2 分别表示区域内部 $\{\varphi \geq 0\}$ 和区域外部 $\{\varphi < 0\}$ 的图像灰度平均值, ν 是正常数。为计算能量函数式(13),Chan-Vese 给出 Heaviside 函数和 Delta 函数为

$$\begin{aligned}
 H_{\varepsilon}(\varphi) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\varphi}{\varepsilon} \right) \right) \\
 \delta_{\varepsilon}(\varphi) &= H'_{\varepsilon}(\varphi)
 \end{aligned}$$

分段常数 Chan-Vese 模型^[22]的分割过程如图 4 所示。

这种基于 Mumford-Shah 模型的水平集分割方法初始曲线可选在图像区域的任意位置,而且不依赖图像梯度大小,尤其对含有噪声的图像具有很好的分割效果。



(a) 曲线演化过程 (b) 图像的分段常数近似

图 4 基于分段常数模型分割过程

Fig. 4 The segment process of the piecewise constant model

4.2 数值解法

从上述基于 Mumford-Shah 模型和水平集方法的曲线演化方程可以看出, 基于水平集的图像分割方法都需要求解欧拉-拉格朗日方程。为解决欧拉-拉格朗日方程计算量大的问题, 人们在 Chan-Vese 模型的基础上提出了一些快速算法。Gibou-Fedkiw^[24] 定义了 $V(\varphi^n, x) = -(u_0 - c_1)^2 + (u_0 - c_2)^2$ 来求解欧拉-拉格朗日方程, 其中当 $V(\varphi^n) \cdot \text{sign}(\varphi^n) < 0$ 时, 相应的像素点值就会改变符号, 从而实现水平集曲线的演化。Song-Chan 提出一种直接计算能量函数的方法^[26], 该方法勿需求解欧拉-拉格朗日方程, 从而大大地提高计算速度。

基于 Chan-Vese 模型算法计算量大、降噪能力差和初始曲线很难给定等缺陷。Gao-Buiti 提出了一种基于模型的分级算法 (hierarchical approach)^[27], 不同于 Chan-Vese 方法, 该算法将曲

线演化过程和降噪过程分开进行, 先曲线演化, 接着根据水平集曲线分割的图像区域分别降噪处理, 这样既提高了运算速度, 也可利用其他的方法进行降噪从而增加算法的灵活性, 解决了传统方法在处理强噪声图像或图像的边缘丢失时图像分割出现的问题。

5 基于水平集的多相位 (multiphase) 图像分割方法

以上所讨论的都是基于水平集的两相位图像的分割情况, 对于水平集的多相位图像的分割情况研究者也做了大量的研究工作^[22, 28-30]。

Zhao-Chan 等人提出了用 n 个水平集函数表示 n 个相位的水平集方法^[28] 来分割多相位的图像, 也就是说每一个分割部分 Ω_i 由一个水平集函数 φ_i 来表示。这种方法要求每个子区域之间互不重叠 ($\bigcap_{i=1}^N \{\varphi_i < 0\} = \emptyset$), 其分割是将图像中的每个像素按所在的类归到不同的子区域中 ($\Omega = \bigcup_{i=1}^N \{\varphi_i \leq 0\}$)。但是对于包含很多相位的图像, 此算法效率往往很低。

随后, Vese-Chan 提出了用 n 个水平集函数表示 2^n 个相位^[22], 该算法使用水平集函数的符号来作为相位的二进制代码。假设图像有 4 个相位 $\Omega_i, i = 0, \dots, 3$, 那么就需要两个水平集函数 φ_0 和 φ_1 来表示, 如

$$\Omega_0 = \{\varphi_0 \geq 0\} \cap \{\varphi_1 \geq 0\}$$

$$\Omega_1 = \{\varphi_0 \leq 0\} \cap \{\varphi_1 \geq 0\}$$

$$\Omega_2 = \{\varphi_0 \geq 0\} \cap \{\varphi_1 \leq 0\}$$

$$\Omega_3 = \{\varphi_0 \leq 0\} \cap \{\varphi_1 \leq 0\}$$

可以过多估计相位的个数, 多余相位会随着收敛的过程而消失。该方法计算效率比 Zhao^[28] 提出的有所提高, 但存在相位错误辨识和存储量大等缺陷。其分割过程如图 5 所示。

针对计算存储量大的问题, Lie-Lysaker 提出用一个水平集函数的不同水平层来表示不同的相位^[29]。首先定义基本函数:

$$\psi_i = \frac{1}{\alpha_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\varphi - j)$$

其中, $\alpha_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (i - k)$

接着问题就变成求解以下能量函数最小化:

$$\min_{\substack{c, \varphi \\ \kappa(\varphi) = 0}} \left\{ E(c, \varphi) = \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx + \beta \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\nabla \psi_i| dx \right\}$$

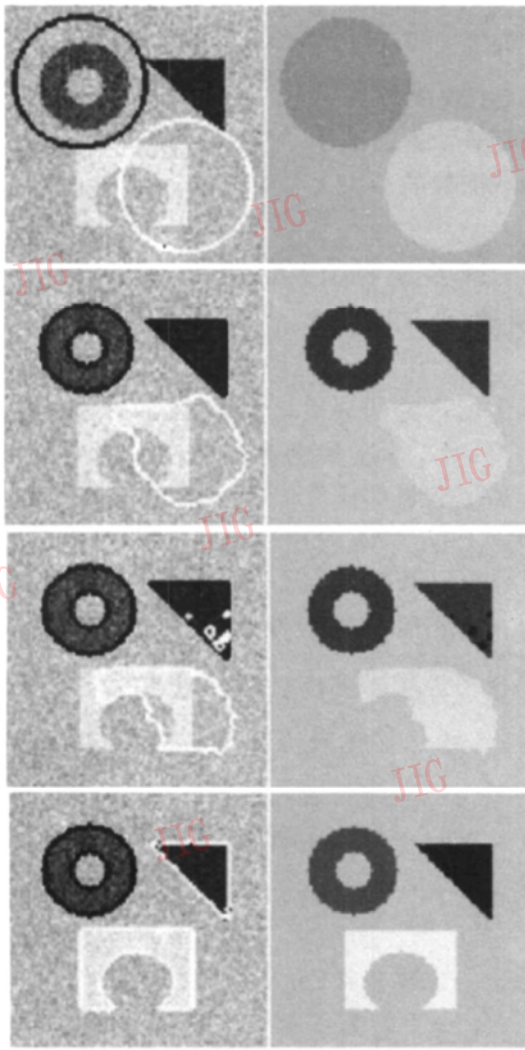


图 5 使用 4 相位分段常数模型对噪声融入图像的分割情况

Fig 5 The segmentation of the noisy image using 4-phases piecewise-constant model

式中, $K(\varphi) = \prod_{i=1}^n (\varphi - i)$ 。如果满足 $K(\varphi) = 0$ 那么存在唯一的 i 使得每一个 $x \in \Omega$ 有 $\varphi(x) = i$ 。Liev-Lysake 采用了扩展的拉格朗日方法解决以上最小化问题^[29]。但此法在表示曲线单位法矢及曲率方面有一定的困难, 而且还用高阶多项式来作为基本函数, 正确的分割往往依赖于较好的初始曲线。Bresson 等人针对这一问题提出通过寻找活动轮廓的全局最小化算子来确定初始曲线^[32]。

6 结 论

目前, 水平集图像分割算法已广泛地应用于各个领域, 特别是医学^[31]和航空领域。基于梯度的水平集图像分割方法适用于梯度变化很大的图像,

用窄带方法可降低计算复杂度; 基于 Mumford-Shah 模型的水平集图像分割方法适用于模糊或噪声较大的图像。在分割多相位图像时, 也是基于这两种基本方法。多相位图像的所有相位可用多个水平集函数来表示, 也可用一个水平集函数的不同水平层来表示, 从而达到分割目的。实践证明, 这 3 种图像的水平集图像分割方法应用广泛, 能达到很好的分割效果。水平集方法是一种简单、精确、灵活的数值方法, 具有很多优点, 其中最主要的优势在于处理外形复杂、拓扑结构变化的图像。它可以广泛地应用到科学计算领域, 有很好的发展前景。现在, 研究者都在基于水平集方法不断地降低计算复杂度, 提高算法速度和分割准确度。

参考文献 (References)

- Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature dependent speed algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 79(1): 12~ 49
- Osher S, Shu C W. High-order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equation[J]. SIAM Journal of Numerical Analysis, 1991, 28(4): 907~ 922
- Osher S, Sethian J A. Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces[M]. New York: Springer-Verlag, 2002, 22~ 114
- Giga Y. Surface Evolution Equation—A Level Set Method[M]. Lipschitz Lecture Notes 44, Germany: University of Bonn, 2002, 56~ 85
- Richard Tai Y H, Osher S. Total Variation and Level Set Based Methods in Image Science[D]. Los Angeles: University of Cambridge, 2005
- Osher S, Fedkiw R. Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces[M]. New York: Springer-Verlag, 2002, 34~ 67
- Malladi R, Sethian J, Vemuri B. Shape modeling with front propagation: A level set approach[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1995, 17(2): 158~ 174
- Kass M, Witkin A, Terzopoulos D. Snakes: Active contour models [J]. International Journal of Computer Vision, 1995, 1(4): 321~ 331
- Caselles V, Catta T, Coll T, et al. A geometric model for active contours in image processing[J]. Numeric Math, 1993, 66(1): 1~ 31
- Malladi R, Sethian J A, Vemuri B C. A topology independent shape modeling scheme A1. In: Proceedings of SPIE Conference: Geometric Methods Computer Vision II[C]. San Diego, CA, USA, 1993, 2031: 246~ 258
- Cohen L D. On active contour models and balloons[J]. Computer Vision, Graphics and Image Processing, 1991, 53(2): 211~ 218
- Caselles V, Kimmel K, Sapiro G. On geodesic active contours[J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 22(1): 61~ 79

- 13 Adalsteinsson D, Sethian J A. The fast construction of extension velocities in level set methods[J]. *Computational Physics* 1999, **1**(48): 2~ 22
- 14 Sethian J A. Fast marching level set methods for three dimensional photolithography development[A]. In *Proceeding of SPIE[C]*, San Diego CA, USA, 1996 **2726**: 261~ 272
- 15 Tsitsiklis J. Efficient algorithms for globally optimal trajectories[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1995, **40**(9): 1528~ 1538
- 16 Zhao Hong-kai. Fast sweeping method for eikonal equations[J]. *Math Computation* 2005, **74**(9): 603~ 627.
- 17 Zhang Yong-tao, Zhao Hong-kai, Chen Shan-qin. Fixed-point Iterative Sweeping Methods for Static Hamilton-Jacobi Equations[D]. Los Angeles University of California 2005.
- 18 Kao C Y, Osher S, Tai Y H. Fast Sweeping Methods for Hamilton-Jacobi Equations[DB]. <ftp://ftp.math.ucla.edu/pub/cam-report/cam03-75.pdf> 2002
- 19 Tsai Y R. Rapid and accurate computation of the distance function using grids[J]. *Journal of Computer Physics* 2002, **178**(1): 175~ 195
- 20 Chan T, Vese L. Active contours without edges[J]. *IEEE Transactions on Image Processing* 2001, **10**(2): 266~ 277.
- 21 Mumford D, Shah J. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 1989, **42**(6): 577~ 685.
- 22 Vese L A, Chan T F. A multiphase level set framework for image segmentation using the Mumford and Shah model[J]. *International Journal of Computer Vision* 2002, **50**(3): 271~ 293
- 23 Marquina A, Osher S. Explicit algorithms for a new time dependent model based on level set motion for nonlinear deblurring and noise removal[J]. *SIAM Journal of Science Computer* 2000, **22**(2): 387~ 405.
- 24 Alvarez F, Guichard F, Morel J M, *et al*. Axioms and fundamental equations of image processing[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 1993, **123**(8): 199~ 257.
- 25 Ghouf F, Fedkiw R. A fast level set based algorithm for segmentation [A]. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition[C]*, New York 2002 **2011**: 213~ 222
- 26 Song B, Chan T. Fast Algorithm for Level Set Based Optimization [D]. Los Angeles University of California 2000
- 27 Gao S, Tien D B. Image segmentation and selective smoothing by using Mumford-Shah model[J]. *IEEE Transactions on Image Processing* 2005, **14**(10): 1537~ 1549.
- 28 Zhao Hong-kai, Chan T, Merriman B, *et al*. A variational level set approach to multiphase motion[J]. *International Journal of Computer Physics* 1996, **127**(12): 179~ 195.
- 29 Lie J, Lysaker M, TalX. A Variant of the Level Set Method and Applications to Image Segmentation[D]. Norway University of Bergen 2003
- 30 Smith K A, Solis F J, Chopp D L. A projection method for motion of triple junctions by level sets[J]. *Interfaces Free Bound* 2002, **4**(3): 263~ 276
- 31 Wasilewski M. Active Contours Using Level Sets for Medical Image Segmentation[D]. Waterloo University of Waterloo 2004
- 32 Bresson X, Esedoghli S, Vandergheynst P, *et al*. Global Minimization of the Active Contour/Snake Model[R]. TR05(04), Los Angeles University of California 2005.