

图像的定点 FFT 变换的精度分析

姜玲 黄峰

(解放军理工大学气象学院, 南京 211101)

摘要 以 TMS320DM642 为例, 针对图像处理中的定点快速傅里叶变换 (FFT) 进行研究分析。根据 FFT 的蝶形算法结构及图像数据的傅里叶变换过程, 从量化误差和溢出误差的角度分析了实现图像的定点 FFT 过程中误差的来源, 并导出了图像的 FFT 变换引入的误差均方值和最大噪-信比。对于 2 维 $M \times N$ 图像的 FFT 变换产生的量化误差的均方值与 M 和 N 成线性关系, 而溢出误差的值相对于量化误差的值很小, 可以忽略不记。TMS320DM642 仿真器上得到的结果验证了理论分析的正确性。

关键词 图像处理 快速傅里叶变换 精度分析

中图分类号: TN911.73 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2007)06-1014-04

A Fixed-Point FFT Precision Analysis of Image Processing

JIANG Ling, HUANG Feng

(People's Liberation Army University of Science and Technology, NanJing 211101)

Abstract The aim of this paper is to analyze the fixed-point Fast Fourier Transform (FFT) of the image based on a TI chip TMS320DM642 whose multiplier is 64 bits. By virtue of the butterfly merging equations of the FFT and the step to achieve the Fourier Transform of the image data, the effect of noise on fixed-point FFT was discussed from two aspects: word-length error and overflow error. The mean of the error and the max ratio of the error to signal were deduced. As the $M \times N$ image for example, the analysis indicate that the word-length error mean of the fixed-point FFT is linearly increased with M and N , and the overflow error mean of the fixed-point FFT is so small compared to the word-length error mean of the fixed-point FFT that can be ignored. To test the analysis, many simulations with different $M \times N$ are conducted on DM642 EVM Block supplied by Beijing Real-time Technology CO., LTD. The result of simulations based on ICETEK-DM642-PCI Emulator are in agreement with the theoretical analysis.

Keywords image processing, FFT, precision analysis

1 引言

随着数字技术的发展, 定点 DSP 被广泛应用于图像处理, 更多地要求用定点算法实现快速傅里叶变换, 在这种情况下, 字长对计算精度的影响无论对系统的设计还是对现有机器可以达到的精度来说都是非常重要的。但是精确分析这种影响是很困难的, 为了选择合适的寄存器长度, 通常进行简化分析。本文就是针对基-2 快速傅里叶变换算法的定

点计算, 采用线性噪声模型, 从量化误差和溢出误差两方面对图像定点 FFT 变换的精度进行了分析。

2 1 维定点 FFT 的分析

如果 $x(n), n=0, 1, 2, \dots, N-1$ 是一个复数序列, 则 $x(n)$ 的有限傅里叶变换为下述序列:

$$X(k) = T_{\text{DFT}}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, 0 \leq k \leq N-1 \quad (1)$$

收稿日期: 2005-12-05; 改回日期: 2006-05-08

第一作者简介: 姜玲 (1977 ~), 女。2006 年于解放军理工大学气象学院获信号与信息处理专业硕士学位。主要研究图像处理。E-mail: linlin8732@163.com

其反变换为

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \quad (2)$$

$$0 \leq n \leq N - 1$$

其中, $W_N^{nk} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$, $j = (-1)^{1/2}$ 。

FFT 是根据 W_N^{nk} 的对称性和周期性, 逐步将序列 $x(n)$ 或 $X(k)$ 分解为较短的序列, 计算短序列的 DFT, 然后再组合成原序列的 DFT, 进而使运算量显著减少。根据上述分解的序列不同, FFT 算法可分为时间抽取法和频率抽取法。对于不同的 N , 又可以选择不同基数的 FFT 算法。虽然对于定点 FFT 有许多不同的算法结构^[1]: 基-2、基-4 及任意基按时间抽取, 基-2、基-4 及任意基按频域抽取等, 但在不同算法中误差噪声的影响是非常相似的, 在此只分析基-2 ($N = 2^m$) 按时间抽取的定点 FFT 算法中的精度问题。

对于长度为 $N = 2^m$ 的序列 $x(n)$, 其中, m 是整数 (如果不满足此条件, 可以人为地增补零值点来达到), 在基-2 按时间抽取的快速算法中, 计算 DFT 需用 $m = \log_2 N$ 级, 在每一级序列中的 N 个数均由先前数列中的两个元素线性组合在一起而产生。对于基-2 算法的第 i 级蝶形运算, 用 $X_{i-1}(p)$ 和 $X_{i-1}(q)$ 表示原来的复数, 则新的一对复数 $X_i(p)$ 、 $X_i(q)$ 可表示为

$$X_i(p) = X_{i-1}(p) + X_{i-1}(q)W \quad (3)$$

$$X_i(q) = X_{i-1}(p) - X_{i-1}(q)W \quad (4)$$

其中, W 为旋转因子, p 和 q 表示在每个数列中数的位置 (应注意, $i = 0$ 指输入数列, 而 $i = m$ 指输出数列)。该蝶形计算的流图如图 1 所示。

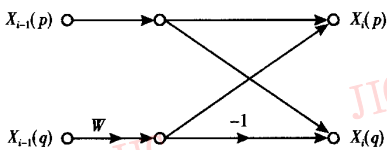


图 1 按时间抽取的蝶形计算

Fig. 1 The butterfly of the decimation-in-time radix-2-FFT

为了分析方便, 首先假定输入序列用 B 位加上一个符号位表示, 二进制小数点定在最左位的左边, 把定点运算与一个加性噪声发生器联系在一起来建立误差噪声的模型 (如图 2 所示), $\varepsilon[i, q]$ 代表在由第 $i-1$ 级数列计算第 i 级数列的第 q 个元素时产生的量化误差和溢出误差的和。

在上述计算过程中主要的量化误差和溢出误差

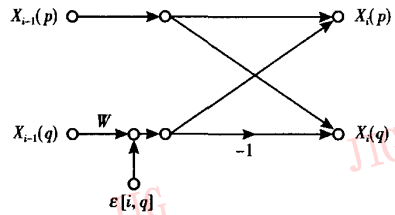


图 2 定点误差噪声的线性噪声模型

Fig. 2 The linear noise butterfly of the fixed-point FFT error

来源于:

(1) 两个 B 位数相乘, 会得到一个 $2B$ 位的积。如果把该积舍入为 B 位, 就会产生误差。当被截去的各位 b_{B+1}, \dots, b_{2B} 都是 1 时, 误差最大, 设误差为 $(e)_{\max}$, 则

$$(e)_{\max} = \sum_{i=B+1}^{2B} 1 \times 2^{-i} = 2^{-B}(1 - 2^{-B}) = (2^{-B} - 2^{-2B})$$

对于实际的非零整数 B , 当 B 大于 10 时, 可以取 $(2^{-B} - 2^{-2B}) \approx 2^{-B} = \rho$, 误差低于 10^{-4} 的数量级; 当被截去的各位全是 0 时, 误差为 0, 即为最小截断误差。则截断误差的取值范围为 $0 < e \leq \rho$ 。由于误差是在 $(0, \rho]$ 区间上均匀分布的随机变量^[2], 因此其方差为 $\Delta_1^2 = 2^{-2B}/12$;

(2) 两个 B 位数相加而有溢出时, 则其和必须右移, 因而失掉一位。若此位为 0, 则没有误差发生, 若该位为 1, 则根据数的正、负而产生 $\pm 2^{-B}$ 的误差, 这个误差的方差 (若假定正数和负数的个数相同, 则它是无偏的) 为 $\Delta_2^2 = 2^{-2B}/2$;

由蝶形图可知每个蝶形运算包含实数的 4 次乘法法和 4 次加法运算, 因此可得:

$$E\{|\varepsilon[m, q]|^2\} = 4\Delta_1^2 + 4\Delta_2^2 = \frac{7}{3} \cdot 2^{-2B} = \sigma_B^2 \quad (5)$$

此外, 还考虑原始序列中自身误差传播的影响, 把这些误差的方差记为 δ^2 。

根据文献 [1], 由每个基元噪声源产生的输出噪声分量幅度的均方值相同 (σ_B^2), 每个输出节点的全部输出噪声等于传播到该节点的噪声之和, 对于长度为 N 的序列最多有 $N-1$ 个噪声源的噪声传播至每个输出节点, 因此长度为 N 的序列在第 k 个 DFT 值的计算中输出噪声的均方值上限为

$$E\{|F(k)|^2\} = (N-1)\sigma_B^2 + \delta^2 \quad (6)$$

由于可以考虑输入序列的实部和虚部是不相关的, 对于小数点定在最左位左边的 B 位二进制数的幅度密度在 $-\frac{1}{\sqrt{2N}}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2N}}$ 之间均匀分布的, 因此, 复

输入序列的均方幅度为

$$E\{|x(n_1, n_2)|^2\} = \frac{2/N^2}{12} \times 2 = \frac{1}{3N^2} \quad (7)$$

联合式(1)与式(7)可得:

$$\begin{aligned} E\{|X(k)|^2\} &= \sum_{n=0}^{N-1} E\{|x(n)|^2\} |W^{kn}|^2 \\ &= N \times \frac{1}{3N^2} = \frac{1}{3N} \end{aligned} \quad (8)$$

联合式(6)和式(8)得输出噪声-信号比为

$$\frac{E\{|F(k)|^2\}}{E\{|X(k)|^2\}} = \frac{(N-1)\sigma_B^2 + \delta^2}{1/3N}$$

当 N 很大时上式可近似为

$$\frac{E\{|F(k)|^2\}}{E\{|X(k)|^2\}} = \frac{N\sigma_B^2 + \delta^2}{1/3N} = 3N^2\sigma_B^2 + 3N\delta^2 \quad (9)$$

FFT 反变换的蝶形类似于上述正 FFT 变换。

3 2 维定点正反 FFT 的分析

对于 $M \times N 2$ 维复序列 $x(n_1, n_2)$ 的离散傅里叶正变换及反变换为

$$\begin{aligned} X(k_1, k_2) &= \sum_{n_1=0}^{M-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x(n_1, n_2) W_M^{n_1 k_1} W_N^{n_2 k_2} \\ &= \sum_{n_1=0}^{M-1} \left(\sum_{n_2=0}^{N-1} x(n_1, n_2) W_N^{n_2 k_2} \right) W_M^{n_1 k_1} \\ &= \sum_{n_2=0}^{N-1} \left(\sum_{n_1=0}^{M-1} x(n_1, n_2) W_M^{n_1 k_1} \right) W_N^{n_2 k_2} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x(n_1, n_2) &= \frac{1}{MN} \sum_{k_1=0}^{M-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} X(k_1, k_2) W_M^{n_1 k_1} W_N^{n_2 k_2} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{k_1=0}^{M-1} \left(\sum_{k_2=0}^{N-1} X(k_1, k_2) W_N^{n_2 k_2} \right) W_M^{n_1 k_1} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{k_2=0}^{N-1} \left(\sum_{k_1=0}^{M-1} X(k_1, k_2) W_M^{n_1 k_1} \right) W_N^{n_2 k_2} \end{aligned} \quad (11)$$

根据上述式子,可以得到对 2 维复序列 $x(n_1, n_2)$ 进行正 FFT 变换、反 FFT 变换的一个流程如图 3 所示。

下面对 $M \times N 2$ 维复序列 $x(n_1, n_2)$ 经过上述流程变换的误差传播进行分析。

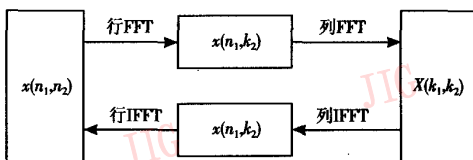


图 3 2 维 FFT 的变换流程

Fig. 3 The transform flow of the 2D FFT

(1) 行 FFT 变换的截断误差

该变换相当于 1 维长度 N 序列的 FFT,因此在第 k_2 个 DFT 值的计算中输出噪声的均方值为

$$E\{|F(n_1, k_2)|^2\} = (N-1)\sigma_B^2 + \delta_0^2$$

而对于原始序列自身的误差为零即 $\delta_0^2 = 0$, 上式又可写为

$$E\{|F(n_1, k_2)|^2\} = (N-1)\sigma_B^2 \quad (12)$$

(2) 列 FFT 变换的截断误差

该变换相当于 1 维长度 M 序列的 FFT,因此在第 k_1 个 DFT 值的计算中输出噪声的均方值为

$$E\{|F(k_1, k_2)|^2\} = (M-1)\sigma_B^2 + \delta_1^2$$

而此时 $\delta_1^2 = (N-1)\sigma_B^2$, 因此上式又可写为

$$E\{|F(k_1, k_2)|^2\} = (M-1)\sigma_B^2 + (N-1)\sigma_B^2 \quad (13)$$

(3) 列 IFFT 变换的截断误差

该变换相当于 1 维长度 M 序列的 IFFT,因此在第 n_1 个 IDFT 值的计算中输出噪声的均方值为

$$E\{|F(n_1, k_2)|^2\} = (M-1)\sigma_B^2 + \delta_2^2$$

而此时 $\delta_2^2 = (M-1)\sigma_B^2 + (N-1)\sigma_B^2$, 因此上式又可写为

$$E\{|F(n_1, k_2)|^2\} = 2(M-1)\sigma_B^2 + (N-1)\sigma_B^2 \quad (14)$$

(4) 行 IFFT 变换的截断误差

该变换相当于 1 维长度 N 序列的 IFFT,因此在第 n_2 个 IDFT 值的计算中输出噪声的均方值为

$$E\{|F(n_1, n_2)|^2\} = (N-1)\sigma_B^2 + \delta_3^2$$

而此时 $\delta_3^2 = 2(M-1)\sigma_B^2 + (N-1)\sigma_B^2$, 因此上式又可写为

$$E\{|F(n_1, n_2)|^2\} = 2(M-1)\sigma_B^2 + 2(N-1)\sigma_B^2 \quad (15)$$

此外,由上面 1 维 FFT 的分析可知,若输入 2 维 $N \times M$ 序列的实部和虚部不相关,对于小数点定在最左位的左边的 B 位二进制数,则行的幅度密度在 $-\frac{1}{\sqrt{2M}}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2M}}$ 之间均匀分布,列的幅度密度在 $-\frac{1}{\sqrt{2N}}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2N}}$ 之间均匀分布,因此,复输入序列的均方幅度为

$$E\{|x(n_1, n_2)|^2\} = \frac{2}{36N^2M^2} = \frac{1}{18N^2M^2} \quad (16)$$

根据式(10)得:

$$\begin{aligned} E\{|X(k_1, k_2)|^2\} &= E\{|x(n_1, n_2)|^2\} \times MN \\ &= \frac{2}{36N^2M^2} \times MN = \frac{1}{18NM} \end{aligned} \quad (17)$$

联合式(13)和式(17)得正变换后的输出噪声-信号比为

$$\frac{E\{|F(k_1, k_2)|^2\}}{E\{|X(k_1, k_2)|^2\}} = \frac{(N-1)\sigma_B^2 + (M-1)\sigma_B^2}{1/(18NM)} \approx 18NM(N+M)\sigma_B^2 \quad (18)$$

联合式(15)和式(16)得正-反变换后的输出噪声-信号比为

$$\frac{E\{|F(n_1, n_2)|^2\}}{E\{|x(n_1, n_2)|^2\}} = \frac{2(N-1)\sigma_B^2 + 2(M-1)\sigma_B^2}{1/(18N^2M^2)}$$

当 M, N 很大时上式可近似为

$$\frac{E\{|F(n_1, n_2)|^2\}}{E\{|x(n_1, n_2)|^2\}} = \frac{2N\sigma_B^2 + 2M\sigma_B^2}{1/(18N^2M^2)} = 36(N^3M^2 + N^2M^3)\sigma_B^2 \quad (19)$$

4 实验结果

实验中分别对 $64 \times 64, 128 \times 128, 256 \times 256, 512 \times 512, 1024 \times 1024$ 等 5 幅图像分别进行了 2 维正、反 32 位基-2 定点 FFT 算法的处理,并得出了处理后的平均信噪比,结果如表 1 所示,表中的理论数据根据式(19)计算所得,式中 $\sigma_B^2 = \frac{7}{3} \times 2^{-2B} = \frac{7}{3} \times 2^{-64}$, M, N 为图像的尺寸大小。

表 1 实验结果

Tab.1 Result of the experiment

图像大小	理论值	实验值		
		实验 1	实验 2	实验 3
64 × 64	$21 \times 2^{-30} = 1.955777e-8$	9.637706e-9	1.877104e-8	1.166002e-8
128 × 128	$21 \times 2^{-26} = 3.129244e-7$	3.500189e-8	3.178623e-8	2.839905e-8
256 × 256	$21 \times 2^{-21} = 1.001358e-5$	9.061392e-6	9.896550e-6	9.284262e-6
512 × 512	$21 \times 2^{-16} = 3.204346e-4$	3.231900e-5	3.442503e-5	3.531190e-5
1024 × 1024	$21 \times 2^{-11} = 1.025391e-2$	1.423190e-4	1.614213e-4	1.032512e-4

由表中的数据可以看出实验数据完全满足理论分析结果,实验数据明显小于理论分析的上限,而且与理论分析的上限数据都有一定的差距。这个实验结果与理论分析结果的差距可以进行以下两个方面的分析:(1)在计算量化误差分析时并没有考虑到当 $W'_N = \pm 1$ 或 $W'_N = \pm j$ 的特殊情况。实际上当 $W'_N = \pm 1$ 或 $W'_N = \pm j$ 时,所做的乘法实际上没有产生量化误差,而在理论分析中当作产生误差来考虑的,这无疑使理论分析结果稍偏大;(2)由于实验结果取的是误差的均值,这也导致实验结果要比理论结果小。总之,实验结果验证了理论分析结果的正确性。

参考文献 (References)

1 Yu Bian-zhang, Li Zhi-jun, Jin Ming-lu. Digital Signal Processing [M]. Xi'an: Northwest Industrial University Press, 2000: 67 ~ 80. [俞卞章,李志钧,金明录编著. 数字信号处理[M]. 西安:西北工业大学出版社, 2000: 67 ~ 80].

2 Alan V Oppenheim, Ronald W Schafer, John R Buck, et al. Discrete-Time Signal Processing (Second Edition) [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2003: 532 ~ 538. [[美]奥本海姆 A V, 谢弗 R W, 巴克 J R 编著. 离散时间信号处理(第二版)[M]. 刘树棠,黄建国译. 西安:西安交通大学出版社, 2003: 532 ~ 538.]

3 Sun Zhong-kang. The Fast Fourier Transform and Applying (First Edition)[M]. Beijing: Posts and Telecom Press, 1957: 52 ~ 121. [孙仲康编著. 快速傅立叶变换及应用(第一版)[M]. 北京:人民邮电出版社, 1957: 52 ~ 121.]

4 Knight W R, Kaiser R. A simple fixed-point error bound for the fast fourier transform[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Process, 1979, 27(6): 615 ~ 620.

5 Peter D Welch. A fixed-point fast fourier transform error analysis[J]. IEEE Transactions on Audio Electroacoustics 1969, AU-17(2): 151 ~ 157.

6 Li Dan, Long Teng, Li Fang-hui. The finite word-length effect analysis of the fixed-point fast fourier transform [J]. Beijing University Journals of Science and Technology, 1999, 19(5): 617 ~ 621. [李耽,龙腾,李方慧. 定点 FFT 的有限字长效应分析[J]. 北京理工大学学报, 1999, 19(5): 617 ~ 621.]