

基于广义逆矩阵的 B 样条曲线节点消去算法研究

黄健民^{1),2)} 施法中¹⁾ 宋荆洲¹⁾

¹⁾(北京航空航天大学机械工程与自动化学院, 北京 100083) ²⁾(广西师范大学数学与计算机科学学院, 桂林 541004)

摘 要 为了能运用广义逆矩阵理论来研究 B 样条曲线的节点消去问题,以解决在 B 样条曲线曲面拟合过程中产生的冗余节点数据,提出了一种基于广义逆矩阵的 B 样条曲线节点消去算法,该算法首先利用广义逆矩阵在处理奇异性问题上的独特作用来获得 B 样条曲线的节点可以消去的充要条件;然后在此基础上,又提出了消去多个节点的算法,算法对每个可以消去的节点都可计算相应的广义逆矩阵,而且仅进行一次矩阵的相乘即可得到由消去这个节点而产生的新的控制顶点和节点。实验表明,该算法的精度优于或近似于现有的 Tiller 算法,而时间效率则同于或近似于 Tiller 的算法。由于通过调整算法中的误差阈值,可以有效地控制消去节点后的曲线与原来曲线的误差,因此算法可以用于工程实践。

关键词 广义逆矩阵 B 样条曲线 节点消去

中图法分类号: TP391.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2006)03-0379-08

Knots Removal for B-spline Curves and Surfaces

HUANG Jian-min^{1),2)}, SHI Fa-zhong¹⁾, SONG Jin-zhou¹⁾

¹⁾(School of Mechanical Engineering and Automation, Beihang University, Beijing 100083)

²⁾(School of Mathematics and Computer Science, Guangxi Normal University, Guilin 541004)

Abstract In paper the problem of removing inner knots from the knot sequence of a B-spline curve is discussed, where the theory of generalized inverse matrix is applied and then the necessary and sufficient condition for a inner knot of the B-spline curve being removable is obtained, based on which an algorithm of removing multi-knots is proposed. Experimental results show that the algorithm is reliable and efficient, hence can be applied to practice.

Keywords Moore-Penrose pseudoinverse matrix, B-spline curve, knot removal

1 引 言

在 CAD/CAM 中,非均匀有理 B 样条 (non-uniform rational B-spline, NURBS) 正得到越来越广泛的应用,其主要原因之一是由于 NURBS 为解析型和自由型曲线曲面的表示和设计提供了统一的数学形式,因此,对作为 NURBS 曲线曲面基础的非均匀 B 样条的表示形式及其升阶、降阶、插入节点和消去节点等相关技术进行研究就具有重要意义。在工业设计制造数字化进程中,人们面临着如何将传统生产条件下的物理样条等设计资料转化成计算机

能识别的数字信息的问题。通常的做法是通过扫描物理样件的表面来采集数据。为了保持原始样件上的信息,采样点一般都比较稠密,这就导致根据这些数据拟合的 B 样条曲线曲面包含了大量的冗余信息。因此发掘快捷高效的冗余信息消除技术,以节省存储空间和加速数据的交换传输速度是当前面临的一项重要课题,而 B 样条曲线曲面的快速节点消去技术正是解决这个问题的重要方法之一。

如今,关于节点消去算法的研究已经取得一定的进展,如 Lyche 和 Mørken 采用全局逼近技术首先对节点排序,然后一次消去具有较小权重的节点^[1,2];在 Kjellander, Farin 和 Sapidis 等人的工作

收稿日期:2004-05-18;改回日期:2005-05-28

第一作者简介:黄健民(1962 ~),男。1996 年获广西师范大学理学硕士学位,现为广西师范大学数学与计算机科学学院副教授。主要研究领域为微分方程定性性与稳定性理论、计算机图形学、计算机辅助几何设计。E-mail: jianminh@gl. gx. cninfo. net

中^[3-5]进一步考虑通过消去一个节点来局部光滑三次 B 样条曲线的问题;随后于 1992 年,Tiller 给出了在给定的容许误差范围内一次消去全部可消去节点的算法^[6];Eck 和 Hadenfeld 也讨论了单个内节点的消去问题^[7],他们首先建立新的控制顶点的局部结构,然后通过最小化新老曲线的差来确定局部结构中的自由度,最后获得 3 种不同的逼近意义下的节点消去算法。在国内,满家巨等采用与 Eck 相似的方法来得到内节点可消去的充要条件后,而对于不满足条件的曲线,则首先通过扰动,使之满足充要条件,然后在某种意义下进行最小化扰动,并以此具有最小扰动的 B 样条曲线作为与原曲线消去一个节点后对应的曲线^[8]。

B 样条曲线的节点消去问题本质上是一个超定线性方程组的求解问题。与数学上纯粹的求解方程组不同的是,在工程实践中对超定线性方程组的相容性的憧憬从来都是不切实际的奢望。设想一个被认定为相容的线性方程组,其实只是其各系数的测量值很偶然地满足相容的条件,而实际上系数的精确值并不必然如此,因此探求具有逼近意义的线性方程组的解,似乎显得更具普适性和稳健性(robustness)。广义逆矩阵理论在本领域和其他邻近领域的成功应用^[9,10]以及广义逆矩阵的逼近特性使笔者深受启发。本文所包含的研究工作正是在这样的背景下展开。

2 广义逆矩阵概念和节点消去的数学基础

2.1 B 样条曲线的概念

B 样条一般通过 deBoor-Cox 递推公式定义^[11]。众所周知,B 样条曲线可表示为四元组 $C = (n, p, U, P)$,其中正整数 p 是该曲线的次数, $P = (p_0, p_1, \dots, p_n)^T$ 表示控制顶点列,而 $U = [u_0, u_1, \dots, u_{n+p+1}]$ 是曲线的节点矢量。在工程实践中,一般假设曲线的内节点重数^[12]不超过 p ,而在首末端点处具有 $p+1$ 个重节点。由于通过参数的规范化手续,总可以将 B 样条曲线的定义域 $[u_p, u_{n+1}]$ 化为 $[0, 1]$,因此不失一般性,可设

$$u_0 = u_1 = \dots = u_p = 0$$

$$u_{n+1} = u_{n+2} = \dots = u_{n+p+1} = 1$$

2.2 节点的插入

节点的插入算法是 B 样条方法配套技术中最

重要的技术之一。它既具有重要的理论价值,又在曲线曲面设计中有着广泛的用途^[13]。设已给定 p 次 B 样条曲线 $C = (n, p, U, P)$,在曲线定义域的某个节点区间 $[u_i, u_{i+1}]$ 内插入节点 u ,即形成新的节点矢量 $\tilde{U}$ 。B 样条曲线的节点插入算法的目的是,确定新的控制顶点列 $\tilde{P} = \{\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n+1}\}$,并使得曲线 $C = (n, p, U, P)$ 与曲线 $\tilde{C} = (n+1, p, \tilde{U}, \tilde{P})$ 的形状及连续性相同。Boehm 的节点插入算法^[14]给出了这些未知控制顶点的计算公式。

2.3 节点的消去

对 B 样条曲线进行精确的节点消去是节点插入的逆过程^[13]。所谓精确,是指在节点消去后,B 样条曲线的形状和连续性保持不变。设 B 样条曲线 $C = (n, p, U, P)$ 的内节点 u_r 的重数为 s ($1 \leq s \leq p$), $u_{r-s+1} = u_{r-s+2} = \dots = u_r \neq u_{r+1}$,设可以消去 u_r 一次,则得到的 B 样条曲线 $\hat{C} = (n-1, p, \hat{U}, \hat{P})$ 的控制顶点列 $\hat{P} = (\hat{p}_0, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{n-1})^T$ 满足

$$\begin{cases} \hat{p}_i = p_i, & i = 0, 1, \dots, r-p-1 \\ \alpha_i \hat{p}_i + (1-\alpha_i) \hat{p}_{i-1} = p_i, & i = r-p, \dots, r-s \\ \hat{p}_i = p_{i+1}, & i = r-s, r-s+1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\alpha_i = \frac{u_r - u_i}{u_{i+p+1} - u_i}$ 。为简便起见,也可将上述方程组表示为以下矩阵形式

$$A\hat{P} = P \quad (2)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{r-p-1} & 0 & 0 \\ 0 & A_L(r) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{n-r-s-1} \end{pmatrix}$$

其中,下角 L 代表 little(下同),而

$$A_L(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1-\alpha_{r-p} & \alpha_{r-p} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha_{r-p+1} & \alpha_{r-p+1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\alpha_{r-s} & \alpha_{r-s} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$A\hat{P} = P$ 也可归结为精简形式 $A_L(r)\hat{P}_L = P_L$,此处

$$\hat{P}_L = (\hat{p}_{r-p-1}, \hat{p}_{r-p}, \dots, \hat{p}_{r-s})^T$$

$$P_L = (p_{r-p-1}, p_{r-p}, \dots, p_{r-s+1})^T$$

$A(r)$ 称为内节点 u_r 的消去矩阵,而

$$A_L(r)\hat{P}_L = P_L \quad (4)$$

则称为消去方程组。

由于精确消去是插入的逆过程,因此 u_r 可精确消去一次的充要条件是与上述关于未知量 $\hat{P}$ 的方程组相容的,然而在工程实践中更值得关注的是在给定的容许误差范围内的节点消去问题,因为此时消去节点后的B样条曲线是节点消去前曲线的逼近。

2.4 广义逆矩阵概念

广义逆矩阵概念首先由 Moore 和 Penrose 提出,如今广义逆矩阵理论已成为矩阵论的一个重要分支,广泛应用于数理统计、系统理论、优化计算和控制论等许多领域。在奇异线性系统的处理方面发挥着独特的作用。

矩阵 $A \in C_{m \times n}$ 的 Moore-Penrose 广义逆矩阵是指 $m \times n$ 阶矩阵 X ,它满足如下4个 Penrose 方程:

$$AXA = A, XAX = X, (AX)^T = AX, (XA)^T = XA$$

本文以 A^+ 表示矩阵 A 的广义逆矩阵。

根据文献[15]的定理 6-26,可以得到下面的引理:

引理 设 $A \in C_{m \times n}$,若矩阵方程 $AX = B$ 相容,则 $AA^+B = B$ 。

证明 设 X_0 是 $AX = B$ 的任一解,则由第1个 Penrose 方程得

$$B = AX_0 = AA^+AX_0 = AA^+B$$

在本文中,矩阵(或向量) $A = (a_{i,j})_{m \times n}$ 的范数为

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2}$$

3 基于广义逆矩阵的节点消去

由前所述,若通过从B样条曲线 $C = (n, p, U, P)$ 消去 s 重节点 u_r 一次来得到曲线 $\hat{C} = (n-1, p, \hat{U}, \hat{P})$,则需要求解式(2),以确定控制顶点列 $\hat{P}$ 。除非 C 恰好是由 $\hat{C}$ 插入同一个节点而得到,否则在一般情况下,式(2)无解。本文虽然取极小最小二乘解 $\hat{P} = A^+P$ 作为式(2)的近似解,但问题是这个近似解的“可靠”程度如何?

可以通过下面两点来衡量近似解的可靠性:

(1)如果节点是可以精确消去的,那么由近似解确定的曲线 $\hat{C}$ 的形状和连续性应该与消去节点前的曲线 C 相同;

(2)如果节点是不能精确消去的,那么由近似

解确定的曲线 $\hat{C}$ 与消去节点前的曲线的“误差”应该是可以控制的。

3.1 节点可以精确消去的充要条件

如果在由控制顶点 A^+P 所确定的曲线 $\hat{C} = (n-1, p, \hat{U}, A^+P)$ 中插回被消去的节点 u_r ,以得到几何形状和连续性与 $\hat{C}$ 相同的曲线 (n, p, U, AA^+P) ,则可考察该曲线与曲线 $C = (n, p, U, P)$ 的离散误差 $\delta = \|P - AA^+P\|$,若 $\delta = 0$,这显然表明曲线 C 中的节点 u_r 是可以精确消去的,而 A^+P 就是消去节点后的曲线的控制顶点列。反之,设节点 u_r 可以精确消去,且与式(2)是相容的,则由引理知,应有 $\|P - AA^+P\| = 0$,由此即可得到节点可以精确消去的充要条件。

定理 节点 u_r 可以精确消去的充分必要条件 $AA^+P = P$,或 $(I - AA^+)P = 0$ 。

3.2 节点可消去的判别准则及误差控制

然而,考虑到测量误差和计算机的舍入误差,在实际应用中通常用误差阈值(tolerance, TOL)来表示数的“相等”关系:若两个数的差的绝对值小于阈值 T ,则可以认为这两个数“相等”。此时,上述节点可以消去的条件可相应改为 $\|AA^+P - P\| < T$,或放宽为

$$\max_i \text{distance}((AA^+P)_i, P_i) < T$$

条件的放宽将导致曲线 $\hat{C}$ 偏离原曲线 C ,但其偏离量在“最小二乘”的意义下是最小的。设 $\hat{C} = (n-1, p, \hat{U}, \hat{P})$ 是由原曲线 $C = (n, p, U, P)$ 依任意方式消去节点 u_r 一次后得到的曲线,则必有 $\|AA^+P - P\| \leq \|\hat{A}\hat{P} - P\|^{[16]}$ 。这表明:与其他节点消去方法相比,按广义逆矩阵方法消去节点所得到的曲线,在重新插回 u_r 后,其控制顶点列 AA^+P 更加接近原曲线的控制顶点列 P (依最小二乘意义)。特别地,与 Tiller 的节点消去方法相比,情况也是如此。因此,根据 Tiller 在附录中所证的结论^[6]:如果两曲线的离散误差不超过 T 时,那么这两曲线的最大偏离量也不会超过 T 。

3.3 连续消去多个节点

若 $C = (n, p, U, P)$ 中有多个可以消去的节点,设为 $u_{r_1}, u_{r_2}, \dots, u_{r_l}$,则消去这些节点的过程如下:

$$\begin{aligned} (n, p, U, P) &\xrightarrow{\text{消去节点 } u_{r_1}} (n-1, p, U \setminus \{u_{r_1}\}, \\ &\quad A^+(n, r_1)P) \xrightarrow{\text{消去节点 } u_{r_2}} \dots \xrightarrow{\text{消去节点 } u_{r_l}} (n-l, p, \\ &\quad U \setminus \{u_{r_1}, \dots, u_{r_l}\}, A^+(n-(l-1), r_l) \dots A^+(n, r_1)P) \end{aligned}$$

其中 $A(\cdot, \cdot)$ 表明消去矩阵的阶数随着消去节点的个数的变化而变化,也和节点的下标相关。

由此可以看到,消去多个节点的过程可以描述为与这些节点相应的消去矩阵的广义逆矩阵的乘积问题。

4 算法的描述

根据前面的结论,消去 B 样条曲线 $C = (n, p, U, P)$ 的 $s(0 < s \leq p)$ 重节点 u_r 一次,只需求出与 u_r 相应的消去矩阵 $A^+(n, r)$,并将 $A^+(n, r)P$ 作为所得到的曲线的控制顶点列即可。其实由于在用 $A^+(n, r)P$ 取代 P 的过程中, P 中仅有下标为 $r-p, r-p+1, \dots, r-s$ 的共 $p-s+1$ 个顶点被 $A^+(n, r)P$ 中的下标为 $r-p, r-p+1, \dots, r-s-1$ 共 $p-s$ 个顶点所取代,而其他顶点保持不变,因此,欲求出消去节点后曲线的控制顶点列,只需求解消去式(4)即可,而求广义逆矩阵的运算只需对消去矩阵 $A_L(r)$ (见式(3))进行运算即可。算法如下:

算法 Alg_RemoveOneKnot

- (1) 计算与节点 u_r 相联系的消去矩阵 $A_L(r)$ 及其广义逆矩阵 $A_L^+(r)$;
- (2) if ($\max_i \text{dist}((A_L(r)A_L^+(r)P_L)_i, (P_L)_i) < T$);
- (3) $n \leftarrow n-1$;
- (4) $U = U \setminus \{u_r\}$;
- (5) 以 $A_L^+(r)P_L$ 取代 P_L 即得到新的控制顶点列。

其中,带下标 i 的向量表示该向量的第 i 个分量。

对于消去多个节点的情况,根据前面的讨论可知,求消去节点后曲线的控制顶点列的问题可描述为求与这些节点相应的消去矩阵的广义逆矩阵乘积的问题。但问题在于,若依次消去两个节点 u_{r_1} 和 u_{r_2} ,则与节点 u_{r_2} 相应的消去矩阵 $A_L(r_2)$ 可能是和 r_1 相关的,即 $|r_1 - r_2|$ 的值的大小影响到消去方程组 $A_L(r_2)\hat{P}_L = P_L$ 的解。因此,必须首先在 U 中消去节点 u_{r_1} ,并更新相应的控制顶点之后,才能计算 $A_L(r_2)$ 。这意味着试图通过一次广义逆矩阵的相乘就可以快速求得新的控制顶点列的想法实际上是行不通的。

通过分析节点消去的过程,并根据 B 样条曲线的局部性质可以发现,其实消去一个节点 u_r 对曲线 C 的影响是局部的,即曲线 C 上仅定义在参数区间 $[u_{r-p}, u_{r-s+p+1}]$ 上的那部分曲线段发生了变化,而其他曲线不变。可以设想,如果 u_r 和 u_i 是两个几何

相异的内节点,并且节点 u_r “远离”节点 u_i ,那么节点 u_i 的消去与否,对于节点 u_r 的能否消去以及对于因节点 u_r 的消去而产生的曲线 C 的控制顶点的变化应该是没有影响的。这个由 B 样条基的局部支承性质所决定的 B 样条曲线的局部性质,就导致了下面的推论,其证明见附录。

推论 设 u_r 和 u_i 是 B 样条曲线 $C = (n, p, U, P)$ 的两个几何相异的内节点,如果满足 $|r-i| \geq p+1$,那么节点 u_r 的消去与否对于节点 u_i 的消去方程组就没有影响。

根据这个推论可知,只要两个节点都是可以消去的,并且这两个节点的下标满足推论的条件,那么它们的消去方程组就互不相关,即首先被消去的节点,不管是否更新其相应的控制顶点,其对第 2 个节点能否消去及其消去矩阵均没有影响。因此这样就可以消去多个节点,即可利用多次循环来消去节点,且在每次循环中,利用算法 Alg_RemoveOneKnot 一次消去满足推论条件的尽可能多的节点。由于在同一次循环中先消去的节点对其后欲消去的节点的消去矩阵及其广义逆矩阵的计算没有影响,因此可以在消去一个节点后,随即更新其相应的控制顶点,或是在一次循环结束消去多个节点之后才统一更新与这些节点相应的控制顶点。由于这两种方法的时间效率是一样的,因此本文选择其中之一,即得到下面的算法:

算法 Alg_RemoveKnots

- (1) 计算每个相异内节点 u_r 的消去矩阵 $A_L(r_2)$ 及其广义逆矩阵 $A_L^+(r)$;
- (2) while (存在可消去的节点);
- (3) for ($j=0; j < \text{相异内节点个数}$);
- (4) if (第 j 个相异内节点可消去);
- (5) 消去这个内节点一次并更新曲线的控制顶点列;
- (6) $j = j + p + 1$;
- (7) 重新计算受影响的内节点的消去矩阵及其广义逆矩阵;
- (8) else;
- (9) $j = j + 1$ 。

5 算法的实现

如何进行广义逆矩阵的计算,如今有多种方法可以实现。如果手边有计算任意阶数矩阵的逆矩阵代码,那么利用根据矩阵的满秩分解而得到的下列

计算公式

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T \quad (5)$$

来计算广义逆矩阵就是一件容易的事情。由于在本文中涉及的消去矩阵 A 是列满秩的,因此根据文献[16],式(5)是成立的。

如果任意阶数矩阵的逆矩阵的计算不易实现,则下面的方法也是很好的选择。这种计算 A^+ 的 Greville 方法是一种有限迭代法,即在由已知矩阵的前 k 列所构成的子矩阵的广义逆矩阵的基础上,可构造出前 $k+1$ 列所构成子矩阵的广义逆矩阵,由此可见,若矩阵 A 有 n 列,则经过 n 步就可以得到 A^+ 。Greville 方法所根据的是下面的定理^[15]:

定理 (Greville) 设 $A \in C_{m \times n}$ 。记 $a_k (k=1, 2, \dots, n)$ 为 A 的第 k 列向量, $A_k (k=1, 2, \dots, n)$ 为由 A 的前 k 列构成的子矩阵,又记

$$d_k = A_{k-1}^+ a_k, c_k = a_k - A_{k-1} d_k, k=2, \dots, n$$

则

$$A_k^+ = \begin{pmatrix} A_{k-1}^+ - d_k b_k^* \\ b_k^* \end{pmatrix}$$

其中

$$b_k^* = \begin{cases} c_k^+ & c_k \neq 0 \\ (1 + d_k^T d_k)^{-1} d_k^T A_{k-1}^+ & c_k = 0, k=2, \dots, n \end{cases}$$

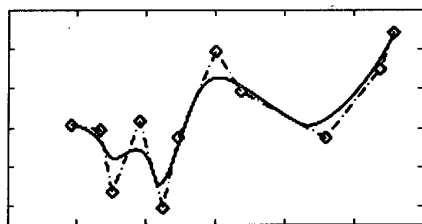
Greville 方法的优点是,无需计算任何矩阵的逆或广义逆,只利用矩阵乘法即可求得 Moore-Penrose 逆。

最简单的求广义逆矩阵的方法就是调用 Matlab 的 C++ 数学函数库。因为对矩阵 A 而言, $\text{pinv}(A)$ 的返回值即是 A 的 Moore-Penrose 广义逆矩阵,所以只要通过适当的设置,就可以在 MSVC6.0 的集成编程环境中调用 Matlab C++ 函数库中的函数,并且生成的应用程序可以脱离 Matlab 环境而独立运行。

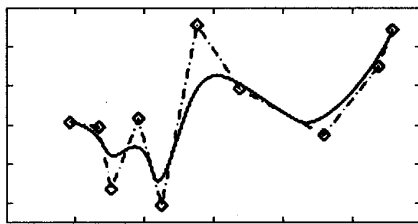
6 实验及结果

为验证本文和算法的效果,在操作系统为 Windows 2000 的 PC 上用 C++ 对本文提出的算法进行了实验,机器的配置为 Pentium 1.7G/256M DDR。实验中,通过调用 Matlab C++ 函数库来计算消去矩阵的广义逆矩阵,以使算法的实现简单而明晰。实验结果表明,由于本文的算法不仅有很好的时间效率,而且算法的误差是可以控制的,因而是可靠的。

图 1 为用于实验的三次 B 样条曲线消去节点前后的图像。其曲线在节点消去前后的节点矢量的详细数据见表 1。图 1(a) 为节点被消去前的曲线,在该曲线的节点矢量中含有 15 个节点,控制顶点有 11 个。图 1(b) 为消去第 4 个相异的内节点 $u=0.644\ 002$ 一次后的曲线,该相异节点的重数减少 1,控制顶点也减少了 1 个,但从肉眼上很难看出两曲线的差别。



(a) 消去前



(b) 消去后

图 1 节点消去前后的曲线

Fig. 1 The curves before and after knot removal

6.1 误差分析

为了对消去节点前后的曲线进行定量分析,笔者开发了应用程序 CurDiff,用于计算两曲线的拟合误差。用 CurDiff 来对输入的两条曲线进行误差分析时,首先自适应地在两条曲线上采样,并计算曲线上的每个采样点到另外一条曲线的最小距离;然后以所有这些距离值为样本进行统计分析;最后 CurDiff 输出为拟合误差的最大值、最小值、平均值

和方差。

如前所述,若以阈值 T 表示容许误差,则凡距离小于阈值 T 的两个点均被认为是位置相同的点。在本算法的实现中, T 的默认值取为 10^{-8} 。表 2 为另一曲线的实验结果,表 2 给出了阈值 T 与可消去节点的数量以及消去精度之间的关系,由表 2 可见,阈值 T 的大小直接影响可消去节点的数量和消去精度。

表 1 本文算法消去节点前曲线的节点向量 U 有 15 个节点,消去节点后的节点向量 V 比 U 少一个节点。
 P 和 Q 分别为消去节点前后的控制多边形

Tab. 1 U and V , the knot vectors before and after removal. P and Q are the corresponding control polygons									
U	0.0	0.0	0.0	0.0	0.156 011	0.469 222	0.469 222	0.644 002	0.644 002
	0.891 446	0.891 446	1.0	1.0	1.0	1.0			
V	0.0	0.0	0.0	0.0	0.156 011	0.469 222	0.469 222	0.644 002	0.891 446
	0.891 446	1.0	1.0	1.0	1.0				
P	(-5.395 46,1.836 88)		(-3.318 98,2.078 59)		(-2.442 79,5.291 88)		(-0.459 7, -1.654 38)		
	(1.217 6, -6.109 16)		(2.306 19, -2.474 41)		(5.032 72,1.878 75)		(6.843 68,0.157 75)		
	(12.960 5, -2.490 89)		(16.902,0.962 584)		(17.901 8,2.856 26)				
Q	(-5.395 46, -1.836 88)		(-3.318 98,2.078 59)		(-2.442 79, -5.291 88)		(-0.459 7,1.654 38)		
	(1.217 6, -6.109 16)		(3.782 00,3.121 47)		(6.843 68, -0.157 75)		(12.960 5, -0.490 89)		
	(16.902,0.962 584)		(17.901 8,2.856 26)						

表 2 本文算法可消去的节点数量和消去精度与容许误差 T 的关系
Tab.2 The relation among the numbers of removable knots, precision and tolerance T

容许误差 T	$0 \sim 10^{-6}$	10^{-5}	10^{-4}	$10^{-3} \sim 2$	2.1
可消去的节点个数	0	1	2	3	4
平均偏移量	0.0	$2.253\ 86 \times 10^{-7}$	$9.748\ 18 \times 10^{-6}$	$3.126\ 74 \times 10^{-6}$	0.013 129

6.2 时间效率

为考察本算法的时间效率,通过对随机生成的节点个数分别为 50,100,200,500,1 000 的三次 B 样条曲线各进行 10 次试验来统计其运算时间。由于节点是随机生成的,不仅每次用于试验的曲线都是不同的,而且可消去节点的个数也各异,因此本文统计的是试验中平均消去一个节点的时间,其结果如表 3 所示。

表 3 B 样条曲线节点消去的时间效率
Tab.3 Time efficiency of knot removal

节点个数	50	100	200	500	1 000
消去一个节点的 平均用时(s)	0.000 45	0.001 31	0.003 07	0.014 82	0.038 23

6.3 与 Tiller 算法的节点消去算法的比较

在前述的关于节点消去的算法中,除了 Tiller

的算法之外,其他的算法多侧重于节点消去方法的理论探讨。在这些算法中,作者除了提出算法的步骤之外,并没有任何具体的实现细节。只有 Tiller 的算法提供了实现的代码,因此本文只与 Tiller 算法进行比较。

对表 2 中提到的曲线,用 Tiller 的算法进行实验的结果如表 4 所示。

从表 4、表 2 对比可看到,就测试的曲线而言,在消去精度方面,本文提出的算法优于或近似于 Tiller 算法。这也是符合广义逆矩阵的最小二乘逼近特性的。而对于表 3 中的曲线,在相同的条件下,Tiller 算法则比本文的算法在时间性能方面稍好(见表 5),其原因在于 Matlab 的 C++ 函数 pinv 是基于矩阵的奇异值分解,而矩阵的奇异值分解由于是一个迭代过程,故耗时较多。

表 4 Tiller 算法可消去的节点数量和消去精度与容许误差 T 的关系
Tab.4 Tiller: The relation among the numbers of removable knot, precision and tolerance T

容许误差 T	$0 \sim 10^{-6}$	10^{-5}	10^{-4}	$10^{-3} \sim 2$	2.1
可消去的节点个数	0	1	2	3	4
平均偏移量	0.0	$2.253\ 87 \times 10^{-7}$	$9.748\ 18 \times 10^{-7}$	$3.126\ 76 \times 10^{-6}$	0.0131 30

表5 Tiller 算法:节点消去的时间效率
Tab.5 Tiller: Time efficiency of knot removal

节点个数	50	100	200	500	1000
消去一个节点的 平均用时(s)	0.00046	0.00133	0.00310	0.01489	0.03837

需要指出的是,在工程实践中,由于节点的消去过程通常不是一个实时交互的过程,因此其对时间性能的要求不是太高。从这个意义来说,本文的算法适用于工程实践。

7 结 论

本文运用广义逆矩阵理论对B样条曲线的节点消去问题进行了研究。就笔者所知,这是将广义逆矩阵理论应用于B样条研究的为数不多的尝试。通过广义逆矩阵在处理奇异性问题上的独特作用,就可获得B样条曲线的节点可以消去的充分必要条件。在此基础上,本文提出了消去多个节点的算法。实验表明,该算法的精度是可靠的,同时时间效率也较高。由于消去节点后的曲线是原来曲线的有效逼近,并且它们之间的误差是可以控制的,因此算法可以用于工程实践。

参考文献 (References)

1 Lyche T, Mørken K. Knot removal for parametric B-spline curves and surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(4): 217 ~ 230.

2 Lyche T, Mørken K. A data-reduction strategy for splines with application to the approximation of function and data[J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 1988, 8(2): 185 ~ 208.

3 Kjellander J. Smoothing of cubic parametric splines[J]. CAD, 1983, 15(3): 175 ~ 179.

4 Farin G, Rein G, Sapidis N. Fairing cubic B-spline curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(1-2): 91 ~ 103.

5 Sapidis N, Farin J. Automatec fairing algorithm for B-spline curves[J]. CAD, 1990, 22(2): 121 ~ 129.

6 Tiller W. Knot-removal algorithms for NURBS curves and surfaces[J]. CAD, 1992, 24(8): 445 ~ 453.

7 Eck M, Hadenfeld J. Knot-removal for B-spline curves[J]. CAGD, 1995, 12(3): 259 ~ 282.

8 MAN Jia-ju, HU Shi-min, YONG Jun-hai. Knot-Removal and Fairing of B-Spline Curves[J]. Journal of Software, 2001, 12(1): 143 ~ 147. [满家巨, 胡事民, 雍俊海等. B-样条曲线的节点去除与光顺[J]. 软件学报, 2001, 12(1): 143 ~ 147.]

9 CHEN Guo-dong, WANG Guo-jin. Degree reduction approximation of Bézier curves by generalized inverse matrices[J]. Journal of

Software, 2001, 12(3): 435 ~ 439. [陈国栋, 王国瑾. 基于广义逆矩阵的 Bézier 曲线降阶逼近[J]. 软件学报, 2001, 12(3): 435 ~ 439.]

10 WANG Guo-jin, WANG Guo-zhao, ZHENG Jian-min. Computer Aided Geometric Design [M]. Beijing: Higher Education Press, 2001: 249 ~ 263. [王国瑾, 汪国昭, 郑建民. 计算机辅助几何设计[M]. 高等教育-施普林格出版社, 2001: 249 ~ 263.]

11 De Boor C. A practical guide to splines [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1978.

12 Piegl L, Tiller W. The NURBS book [M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.

13 SHI Fa-zhong. Computer-aided geometric design and non-uniform rational B-spline [M]. Beijing: High Education Press, 2001. [施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.]

14 Boehm W. Inserting new knots into B-spline curve[J]. CAD, 1980, 12(4): 199 ~ 201.

15 CHENG Yun-peng. Matrix Theory [M]. Xi'an: Northwestem Polytechnic University Press, 2000. [程云鹏. 矩阵论[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1989.]

16 HE Xu-chu. Generalized inverse theory and algorithms [M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Press, 1985. [何旭初. 广义逆矩阵的基本理论和计算方法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1985.]

附 录

推论 设 $u_r^{(0)}$ 和 $u_i^{(0)}$ 是 B 样条曲线 $C = (n, p, U^{(0)}, P^{(0)})$ 的两个几何相异的内节点, 且满足 $r - \hat{r} \geq p + 1$, 那么节点 $u_r^{(0)}$ 的消去与否, 则对于节点 $u_i^{(0)}$ 的消去方程组没有影响。

证明 设节点 $u_r^{(0)}$, $u_i^{(0)}$ 的重数分别是 $s, \hat{s}$, $u_r^{(0)} \neq u_{r+1}^{(0)}, u_i^{(0)} \neq u_{i+1}^{(0)}$ 。

由 $C = (n, p, U^{(0)}, P^{(0)})$ 消去节点 $u_i^{(0)}$ 一次, 可得到 $C^{(1)} = (n - 1, p, U^{(1)}, P^{(1)})$, 其所产生的消去方程组为 $A(\hat{r}, \alpha) P_L^{(1)} = P_L^{(0)}$, 其中

$$A(\hat{r}, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 - \alpha_{\hat{r}-p} & \alpha_{\hat{r}-p} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 - \alpha_{\hat{r}-\hat{s}} & \alpha_{\hat{r}-\hat{s}} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_L^{(1)} = (p_{\hat{r}-p-1}^{(1)}, p_{\hat{r}-p}^{(1)}, \dots, p_{\hat{r}-\hat{s}}^{(1)})^T$$
$$P_L^{(0)} = (p_{\hat{r}-p-1}^{(0)}, p_{\hat{r}-p}^{(0)}, \dots, p_{\hat{r}-\hat{s}+1}^{(0)})^T$$
$$\alpha_i = \frac{u_i^{(0)} - u_{i+1}^{(0)}}{u_{i+p+1}^{(0)} - u_i^{(0)}}, i = \hat{r} - p, \dots, \hat{r} - \hat{s}_0.$$

(1) 若 $r - \hat{r} \geq p + 1$, 则由 $C = (n, p, U^{(0)}, P^{(0)})$ 消去节点 $u_r^{(0)}$ 一次, 可得到 $\hat{C} = (n - 1, p, \hat{U}, \hat{P})$, 再消去 $u_{\hat{r}}^{(0)} (= \hat{u}_{\hat{r}})$ 一次可得到 $\tilde{C} = (n - 2, p, \tilde{U}, \tilde{P})$, 产生节点的消去方程组为 $A(\hat{r}, \beta) \tilde{P}_L = \hat{P}_L$, 其中

$$\begin{aligned}\tilde{P}_L &= (\tilde{p}_{\hat{r}-p-1}, \tilde{p}_{\hat{r}-p}, \dots, \tilde{p}_{\hat{r}-\hat{s}})^T \\ \hat{P}_L &= (\hat{p}_{\hat{r}-p-1}, \hat{p}_{\hat{r}-p}, \dots, \hat{p}_{\hat{r}-\hat{s}+1})^T \\ \beta_i &= \frac{\hat{u}_{\hat{r}} - \hat{u}_i}{\hat{u}_{\hat{r}+p+1} - \hat{u}_i}, \quad i = \hat{r} - p, \dots, \hat{r} - \hat{s}\end{aligned}$$

由于从 $C = (n, p, U^{(0)}, P^{(0)})$ 消去节点 $u_r^{(0)}$ 可得到 $\hat{C} = (\cdot, p, \hat{U}, \hat{P})$, 因此知 $\hat{P}_i = P_i^{(0)} (i \leq r - p - 1)$ 和 $\hat{u}_i = u_i^{(0)} (i \leq r - 1)$ 。由于 $r - \hat{r} \geq p + 1$ 以及 $\hat{s} \geq 1$, 因此可得 $P_L^{(0)} = \hat{P}_L$ 和 $A(\hat{r}, \alpha) = A(\hat{r}, \beta)$ 。

(2) 若 $\hat{r} - r \geq p + 1$, 则此时由 $C = (n, p, U^{(0)}, P^{(0)})$ 消去节点 $u_r^{(0)}$ 一次可得 $\hat{C} = (n - 1, p, \hat{U}, \hat{P})$, 并可得到等式

$$\hat{p}_i = p_{i+1}^{(0)} (i \geq r - s) \quad (6)$$

和

$$\hat{u}_i = u_{i+1}^{(0)} (i \geq r) \quad (7)$$

再消去节点 $u_{\hat{r}}^{(0)} (= \hat{u}_{\hat{r}-1})$ 一次即可得到 $\tilde{C} = (n - 2, p, \tilde{U}, \tilde{P})$, 并产生消去方程组 $A(\hat{r} - 1, \gamma) \tilde{P}_L = \hat{P}_L$, 其中此处的

$$\begin{aligned}\tilde{P}_L &= (\tilde{p}_{\hat{r}-p-2}, \tilde{p}_{\hat{r}-p-1}, \dots, \tilde{p}_{\hat{r}-\hat{s}-1})^T \\ \hat{P}_L &= (\hat{p}_{\hat{r}-p-2}, \hat{p}_{\hat{r}-p-1}, \dots, \hat{p}_{\hat{r}-\hat{s}-1})^T \\ \gamma_i &= \frac{\hat{u}_{\hat{r}-1} - \hat{u}_i}{\hat{u}_{\hat{r}+p+1} - \hat{u}_i}, \quad i = \hat{r} - p - 1, \dots, \hat{r} - \hat{s} - 1\end{aligned}$$

由于由 $\hat{r} - r \geq p + 1$ 和式 (7) 可得 $\gamma_{i-1} = \alpha$, $i = \hat{r} - p - 1, \dots, \hat{r} - \hat{s} - 1$, 从而 $A(\hat{r}, \alpha) = A(\hat{r} - 1, \gamma)$, 且 $\hat{P}_L$ 中诸分量的下标皆不小于 $r - s$, 利用式 (6) 即可得 $P_L^{(0)} = \tilde{P}_L$ 。