

构造 IFS 吸引子的新算法

张亦舜 杨 扬

(北京科技大学信息工程学院, 北京 100083)

摘 要 迭代函数系统(IFS)是定义和描绘分形的有效方法,每个 IFS 确定了唯一一个称为吸引子的分形.随机迭代算法虽然能够简单快捷地在计算机上构造 IFS 的吸引子,但是不能保证在有限步内计算出组成吸引子的所有点.针对这一不足,利用 IFS 吸引子局部间具有的相似性,提出了由 IFS 中可逆仿射变换的不动点来逐步生成吸引子的原理和方法.实验证明,该算法是可行的,它不仅能有限步内生成整个吸引子,并且不必引进概率.

关键词 分形 吸引子 迭代函数系统

中图分类号: TP391-4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2002)11-1161-04

A New Algorithm of Computing IFS Attractor

ZHANG Yi-shun, YANG Yang

(Department of Computer, Beijing University of Science and Technology, Beijing 100083)

Abstract Iterated function system(IFS) is an effective method to define and describe fractals. An IFS determines only one fractal which is called attractor. Although random iterated algorithm proposed by Barnsley can display easily and quickly an attractor of IFS on computer screen, it is not sure to generate all points of an attractor within any limited steps. In order to overcome the shortcoming of the algorithm, a new algorithm of gradually computing IFS attractor from one fixed point of an invertible affine transformation is presented. Because of self-similarity of an attractor of IFS there exists similarity between different regions of an IFS attractor. With this property different parts of an attractor can be showed one by one. The experimental results prove this method is feasible. A whole attractor can be computed through limited steps by using this algorithm, and unlike random iterated algorithm probability is not necessary.

Keywords Fractal, Attractor, Iterated function system

0 引 言

自 20 世纪 70 年代 Mandelbrot 创立分形几何学^[1]以来,分形理论在众多领域得到了广泛的应用,反过来又促进了其本身的迅速发展,其中,迭代函数系统(IFS)是定义和描绘分形的典型方法.20 世纪 80 年代初, Hutchinson 首先引入了 IFS 理论^[2], Barnsley 对其作了进一步的完善,同时把 IFS 的思想应用到图象压缩中^[3],并获得了极大的成功.

每个 IFS 由若干个仿射变换组成,这种仿射变换又决定了空间坐标的旋转、伸缩和平移.一个 IFS 定义了一个吸引子,如今利用随机迭代算法可以简

单快捷地在计算机上构造出 IFS 的吸引子,而且这样的吸引子一般呈现出分形所具有的精细复杂结构和严格的自相似性,能很好地模拟各种景物,如树木、云彩等.

本文提出的吸引子构造新算法,是从仿射变换的不动点出发,利用吸引子局部间存在的相似性来逐步生成吸引子的各个部分.

1 IFS 及 IFS 吸引子

1.1 迭代函数系统

根据本文的需要,将 IFS 的讨论限制在二维平面上.

设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 上的闭子集, 若对 D 上的任意两点 p, q 存在常数 $0 < s < 1$, 使得映射 $w: D \rightarrow D$ 满足

$$d[w(p) - w(q)] \leq sd(p - q)$$

则称 w 为压缩映射, s 称为 w 的压缩因子, d 为定义在 D 上的距离.

一个 IFS 由 m 个定义在 D 上的压缩仿射变换组成, 其仿射变换 w_i 形如

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}$$

将 IFS 记为: $\{D, w_i, i=1, 2, \dots, m\}$

1.2 压缩映射定理

设 $\{D, w_i, i=1, 2, \dots, n\}$ 是 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上的 IFS, 则存在唯一一个非空紧子集 $E \subset \mathbf{R}^2$, 使下式成立

$$E = \bigcup_{i=1}^m w_i(E)$$

E 也称为 IFS 的吸引子, 通常 E 就是一个分形.

1.3 IFS 吸引子的构造

目前在计算机上, 可以用递归算法和随机迭代算法^[4,5]两种方法来构造 IFS 吸引子. 其中, 递归算法通常由于递归层次过多, 不仅使得生成吸引子的速度很慢, 甚至会因超出计算机系统的限制, 而无法运行, 因此难以应用; 而随机迭代算法则简单而有效, 不过随机迭代算法也有如下一些不足: 首先必须引进概率, 且在一般情况下, 不论概率如何选取, 其迭代过程中生成的点落入各个区域的几率不尽相同, 这必然造成大量点的重复计算; 其次, 由于是按概率来随机选取下次迭代所用的仿射变换, 因此任何有限次的迭代都不能保证一定能生成吸引子中的所有点.

下面介绍的新算法, 能在有限步内生成吸引子中的所有点, 且不必引入概率.

2 构造吸引子的新算法

2.1 算法原理

新算法的主要思想是根据 IFS 吸引子具有的自相似性, 即根据 IFS 吸引子的局部与整体的相似性可自然得到局部与局部相似的性质, 根据此性质, 若得到了吸引子某个局部的点, 则由相应变换就可以得到若干其他局部的点, 且由这些点组成一个更大的已知局部, 由此再求其他局部的点, 重复此过程, 直到求得整个吸引子. 下面以如图 1 所示的 Sierpinski 三角形为例来介绍此算法如何求取 IFS 吸引子, 与 Sierpinski 三角形对应的 IFS 由如下 3

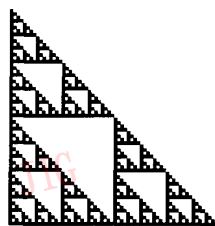


图1 Sierpinski 三角形

个仿射变换组成

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

这 3 个变换把平面上的单位正方形每边缩小二分之一后, 放到 3 个指定的位置 (如图 2 所示).

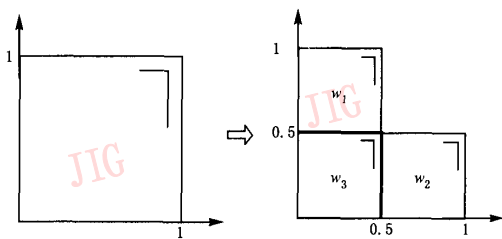


图2 Sierpinski 三角形的仿射变换

设 Sierpinski 三角形吸引子为 E , 则 $E = \bigcup_{i=1}^3 w_i(E)$, E 由相似的 $w_1(E), w_2(E), w_3(E)$ 3 个部分组成, 若得到了 $w_1(E)$, 则根据 $w_1(E)$ 与 $w_2(E)$ 相似的性质, 必定存在变换 $v_{2,1}$ ($v_{i,j}$ 表示与 w_i 关联的第 j 个变换), 使下式成立:

$$v_{2,1}(w_1(E)) = w_2(E)$$

简写为

$$v_{2,1}w_1 = w_2 \quad (1)$$

记 w_1^{-1} 为 w_1 的逆变换, 得到

$$v_{2,1} = w_2w_1^{-1} \quad (2)$$

同样, 存在变换 $v_{3,1} = w_3w_1^{-1}$, 使下式成立:

$$v_{3,1}(w_1(E)) = w_3(E)$$

同理, 因为

$$w_1(E) = w_1(w_1(E)) \cup w_1(w_2(E)) \cup w_1(w_3(E))$$

所以若已知 $w_1(w_1(E))$, 则存在变换 $v_{2,2}$, 使下式成立

$$v_{2,2}(w_1(w_1(E))) = w_1(w_2(E)) \quad (3)$$

简写为 $v_{2,2}w_1w_1=w_1w_2$

结合式(1),式(3)有 $w_1v_{2,1}w_1=v_{2,2}w_1w_1$

即得 $v_{2,2}=w_1v_{2,1}w_1^{-1}$

同样存在变换 $v_{3,2}=w_1v_{3,1}w_1^{-1}$,使下式成立

$$v_{3,2}(w_1(w_1(E)))=w_1(w_3(E))$$

一般有

$$v_{2,j}(w_1^{(j)}(E))=w_1^{(j-1)}(w_2(E))$$

$$v_{3,j}(w_1^{(j)}(E))=w_1^{(j-1)}(w_3(E))$$

其中, $j=1,2,\dots,n$.

得递推公式

$$v_{2,j}=w_1v_{2,j-1}w_1^{-1} \quad (4)$$

$$v_{3,j}=w_1v_{3,j-1}w_1^{-1} \quad (5)$$

令 w_1 的不动点为 $P(x_0, y_0)$, 即 $w_1(P)=P$, 则有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} w_1^{(j)}(E)=P$$

对于计算机绘图,吸引子 E 是像素点的集合,且存在正整数 n ,使 $w^{(n)}(E)=P$. 吸引子构造层数 n 由 w_1 的压缩因子 s_1 及吸引子的大小决定,若吸引子 E 在 $K \times K$ 大小的正方形区域中,则可取吸引子构造层数 n 满足

$$s_1^{(n)} \times K \leq 1 \quad (6)$$

s_1 和 K 的确定可参考文献[5],而 $v_{2,j}$, $v_{3,j}(j=1,2,\dots,n)$ 可由以上递推公式求得,因为 $w_1^{(j)}(E)=w_1^{(j+1)}(E) \cup v_{2,j+1}(w_1^{(j+1)}(E)) \cup v_{3,j+1}(w_1^{(j+1)}(E))$,由此即可从 P 点逐步构造吸引子 E .

2.2 w 的逆变换 w^{-1}

求 w^{-1} 时,设

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$w^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e' \\ f' \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} w^{-1}w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e' \\ f' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a'a+b'c & a'b+b'd \\ c'a+d'c & c'b+d'd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'e+b'f+e' \\ c'e+d'f+f' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由此可容易地求得 w^{-1} 的各个系数.

2.3 算法

设 IFS 为 $\{D, w_i, i=1,2,\dots,m\}$, 假定 w_1 是可逆变换,且其压缩因子是所有仿射变换中最大的, $P(x_1, y_1)$ 是其不动点. 根据前面介绍的原理,在计算机上构造 IFS 吸引子的算法如下:

(1) 根据 s_1 及吸引子的大小,用式(6)确定吸引子构造层数 n

(2) $i=2$ to m , 循环步骤(3),(4)

(3) $j=1$ to n , 循环步骤(4)

(4) 根据式(2),(4),(5)等对各个 v_{ij} 的系数进行类似计算

(5) $B=P(x_1, y_1)$

(6) 画 B

(7) $j=n$ to 1, 循环步骤(8),(9),(10)

(8) $A=\bigcup_{i=2}^m v_{ij}(B)$

(9) 画 A

(10) $B=A \cup B$

(11) 结束

3 实验结果和分析

图 3,图 4 是吸引子构造层数 n 分别取 6 和 22 时,用此算法生成 Sierpinski 三角形和蕨叶的过程.

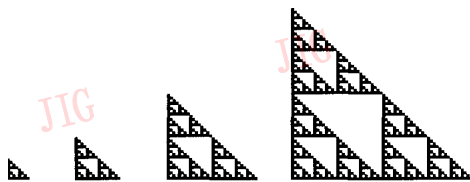


图 3 Sierpinski 三角形生成过程



图 4 蕨叶生成过程

上述算法中, A, B 皆为像素点的集合,可定义两个二维数组存放 A, E , 其数组大小取决于吸引子大小. 算法的构造主要是两个二重循环,它们分别用于计算变换 v_{ij} 的系数和集合 A , 由于其循环次数分别由 IFS 中仿射变换的数目 m 和吸引子的构造层数 n 决定, 因此算法的时间复杂性为 $O(m \times n)$. 若记 $|S|$ 为集合 S 的元素个数, 那么在求 $v_{ij}(B)$ 时, 当 $|B| > |v_{ij}(B)|$, 则必存在重复计算的点, 为简化讨论, 假定 $|B \cap v_{ij}(B)| = 0$, 则重复次数为 $|B| - |v_{ij}(B)|$; 同时令上述算法中 IFS 的吸引子为 E ,

$|w_1(E)|/|E|=r$, 则算法中总的重复计算次数约为

$$\frac{1-r^n}{1-r} \times ((m-1) \times |w_1(E)| - \sum_{i=2}^m |w_i(E)|)$$

对于如图2所示的Sierpinski三角形, 由于其所有的 v_{ij} , $|B|=|v_{ij}(B)|$ 皆成立, 不存在重复计算的点, 因此生成速度很快, 在PⅡ机上其生成仅用了0.2s, 而对如图4所示的蕨叶, 则由于存在大量重复计算的点, 故生成速度相对较慢, 用了86.4s.

4 结论

理论分析和实验结果均表明, 本文提出的算法是可行的, 该算法可不必引入概率, 且能够保证在有限步内, 用计算机构造出IFS的完全吸引子, 这虽弥补了随机迭代算法需引入概率的问题, 但显然该算法的计算过程较随机迭代算法更复杂, 通常也要计算大量重复的点.

参考文献

- 1 Mandelbrot B. 大自然的 fractal 几何学(中译本)[M]. 上海: 上海远东出版社, 1998.

- 2 Hutchinson J. Fractals and self similarity[J]. Indiana University Mathematics Journal, 1981, 30(5): 713~747.
- 3 Barnsley M F, Sloan A D. A better way to compress images[J]. BYTE, 1988, 13(1): 215~223.
- 4 Welstead S. Fractal and wavelet image compression techniques [M]. SPIE PRESS, 1999.
- 5 陈守吉, 张立明. 分形与图象压缩[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1998.



张亦舜 1964年生, 讲师, 2002年获北京科技大学信息工程学院控制理论与控制工程专业博士学位, 研究兴趣为图象压缩、小波变换、编码理论.



杨扬 1955年生, 北京科技大学信息工程学院教授, 博士生导师. 主要研究领域为图象处理、语音识别、多分辨率数字信号处理.

全能照片工作站

——EPSON Stylus Photo 925 超级照片打印机

EPSON Stylus Photo 925 是爱普生公司最新推出的一款 A4 幅面超级照片打印机. 机身右上角的点阵液晶显示屏及其下面的 3 个插卡槽是 Stylus Photo 925 独特设计. 通过这个点阵式液晶屏, 可以无需连接电脑即可实现一些简单实用的操作. EPSON Stylus Photo 925 具有如下一些特点:

(1) 超众的打印技术

Stylus Photo 925 采用了爱普生独有的新型微压电打印技术, 其打印分辨率优化到了 5760dpi. 此外, 这款打印机还支持由爱普生公司最新推出的 PIMII 技术, 其除附带专业图像打印软件 PhotoQuicker 3.2 外, 还最新研发出可以设计不同照片模板的 PIF (PRINT Image Framer) 技术. 由于它提供了众多个性化的照片模板格式, 从而大大增加了人们的创作乐趣.

(2) 超群的照片质量

由于 Stylus Photo 925 具有业界领先的微压电打印技术, 配合目前业界最高的 5760dpi 的优化分辨率和 4 微微升超精微墨滴, 即使在普通纸上以快速模式打印出的图像, 其色彩过渡也非常平滑、均匀, 阴暗部分也有上佳的表现, 即使是最难表现的人物肤色也非常清晰、自然. EPSON Stylus Photo 925 不但在打印质量上达到了业界领先水平, 而且在打印速度上也同样出色. 在经济模式下, 其打印 A4 幅面的黑白文本和彩色文本的速度均达到每分钟 8.5 页.

(3) 多种附加功能

除了具备超级照片打印机所具有的超高优化分辨率、超精微墨滴、超群画质、超快速度以及超低噪音外, 还具有很多简单易用的附加功能. 它具有多达 3 个插卡槽, 几乎适用于目前市场上流行的众多类型数码相机存储卡. 这款打印机还附有卷纸架一个, 它可以支持 3 种不同类型的卷纸, 可完成卷纸连续打印. Stylus Photo 925 配合自动裁纸功能, 还能够实现高速独立打印, 从而为需要大批量打印照片的专业用户提供了方便. Stylus Photo 925 既能独立高速打印质量卓绝的照片, 又能在软件的帮助下进行随意的照片编辑设计; 既能完全脱离电脑独立工作, 又可串联 USB 接口在电脑中精心设计, EPSON Stylus Photo 925 可谓是一个全能照片工作站, 用其可以轻松实现所有优美照片的打印输出.