

一种矩形的动态不干涉算法

滕弘飞¹⁾³⁾ 刘 峻¹⁾ 王秀梅²⁾ 冯恩民²⁾ 杨宏宇¹⁾ 孙治国¹⁾

¹⁾ {大连理工大学机械工程系, 大连 116024} ²⁾ {大连理工大学应用数学系, 大连 116024}

³⁾ {中国科学院现代制造 CAD/CAM 技术开放实验室, 沈阳 110003}

摘 要 针对处于相对运动状态下的两矩形图形之间在任一瞬间的不干涉判断问题, 也即矩形的动态不干涉判断问题, 根据不适合多边形(No-Fit-Polygon)法和矩形的几何特性, 给出了相对运动的矩形与矩形图形之间动态不干涉(不重叠)的判别条件及其证明, 同时给出其不适合多边形转化为对称八边形顶点的简捷计算公式和相应的不干涉算法. 该算法具有优良的计算特性, 特别适用于既有相对平移又有转动的这种相对运动的两矩形图形之间的动态不干涉判断, 并具有一定的应用价值.

关键词 计算机图形学 矩形 动态 干涉 算法/不适合多边形

中图法分类号: TP391.72 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2001)03-0259-05

A Dynamic Non-Interference Algorithm for Rectangles

TENG Hong-fei¹⁾³⁾, LIU Jun¹⁾, WANG Xiu-mei²⁾,
FENG En-min²⁾, YANG Hong-yu¹⁾, SUN Zhi-guo¹⁾

¹⁾ {Department of Mechanical Engineering, DUT 116024} ²⁾ {Department of Applied Mathematics, DUT 116024}

³⁾ {Open Laboratory of CAD/CAM Technology for Advanced Manufacturing, Academia Sinica, Shenyang 110003}

Abstract The dynamic non-interference judgement problem refers to the judgement on non-interference between two geometric figures in relative motion at any instance which often occurs in layout optimization, route programming for robots, dynamic simulation etc. It is of great computational complexity and is to be further discussed. This paper mainly deals with the case of two rectangles. According to the theory of the No-Fit-Polygon and rectangle's geometric feature, the authors give the rules of the judgment, the proof of the rules, and the simple formulas to compute the apex of the No-Fit-Polygon (transformed into symmetrical octagon). As a result, the non-interference algorithm of above two dimensional geometric figures is established. This algorithm is simple and efficient. In particular, it is suitable for the judgment on non-interference between two rectangles in relative motion at any instance, so it is of the certain value of application.

Keywords Graphics, Rectangle, Dynamic, Interference, Algorithm/No-Fit-Polygon

0 概 述

两个给定位置矩形之间的不干涉性判断可称为矩形的静态不干涉判断, 其目前已有许多有关算法, 如不适合多边形(No Fit Polygon)法^[1]、拟物法^[2]、定界锥分拆算法^[3]、四叉树算法^[4]、解析几何方法及其他方法^[5,6]. 虽然这个问题并不新奇, 但是, 在布局优化、机器人路径选择和动态仿真等问题中, 两个相对运动的几何图形(如两矩形)之间常遇到在任意给

定瞬间下的不干涉判断问题, 它的计算却很复杂, 我们将它称为动态不干涉判断, 这是个待解决的难题.

本文主要研究矩形图形间的动态不干涉算法. 在上述常用的不干涉算法中, 虽然不适合多边形法可解决平行移动的两矩形动态不干涉问题, 但计算繁琐, 且如果两矩形之间既有平移, 又有转动, 若直接套用不适合多边形法的计算公式, 来判断任一时刻两矩形是否干涉, 则必须重新经过复杂运算来构造不适合多边形, 这样就更麻烦. 为此, 本文根据文献[1]中不适合多边形法, 利用矩形的几何特性, 给

出较简明的矩形间动态不干涉判别条件及算法,这也可以看作是将不适合多边形法推广到用于矩形图形的动态不干涉判断.本文称此算法为矩形的动态不干涉算法——栅栏法.本文将主要讨论矩形图形之间的不干涉判别条件,并构造其不干涉算法并给出算法的证明.由于本算法能方便地构造出不干涉多边形,因而适用于动态不干涉判断.

建立如图1所示的坐标系 x_1ox_2 , 设矩形 A 可在 x_1ox_2 内任意平移或旋转.下面给出矩形 A 的具体定义.

定义 矩形 A : 设 $X_A = (x_1, x_2)^T \in R^2$ 为 A 的形心, x_1 轴与矩形 A 的长边或其延长线的夹角为 α , 这里假定逆时针方向为正, $\alpha \in [0, \pi)$, 并设 $u = (\cos\alpha, \sin\alpha)^T$, 向量 u 的正交单位向量 $u^\perp = (-\sin\alpha, \cos\alpha)^T$, $a = (a_1, a_2)^T \in R^2$, $2a_1, 2a_2$ 分别为矩形的长边与短边长度($2a_1 \geq 2a_2 > 0$), 则矩形 A 由 X_A, u, a 唯一确定, 记 $A = A(X_A, u, a)$.

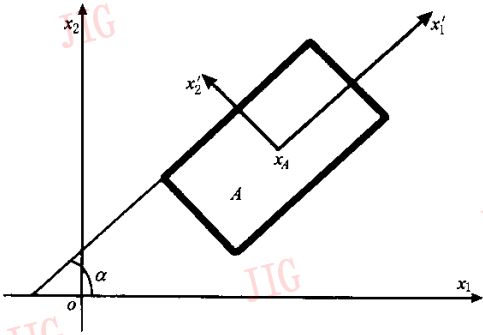


图1 笛卡尔坐标系

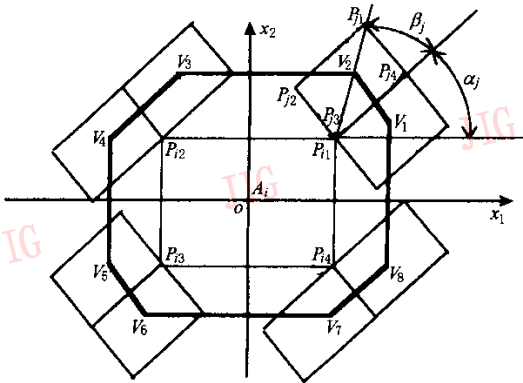


图2 矩形与矩形之间的不干涉边界

1 矩形之间的静态不干涉条件

首先研究矩形之间的静态不干涉判断, 然后将其推广到动态情况, 即首先根据不适合多边形法和矩形的几何特性, 来构造两矩形间的不干涉边界, 以

形成“栅栏”, 然后即可将两矩形的干涉性判断转化为一矩形形心与该不干涉边界位置关系的判断问题.

任给两个矩形图形 $A_i(X_{Ai}, u_i, a_i)$ 和 $A_j(X_{Aj}, u_j, a_j)$, $2a_{i1}$ 与 $2a_{j1}$ 分别为矩形 A_i 与 A_j 的长边. 为讨论问题方便, 设 A_i 的 2 个边分别平行于笛卡尔坐标的 x_1, x_2 轴.

首先可以给出矩形 A_i 的 4 个顶点坐标:

$$P_{ik} = X_{Ai} + M_i \times G_k, k \in I_4 = \{1, 2, 3, 4\} \quad (1)$$

式中

$$M_i = (a_{i1} \times u_i, a_{i2} \times u_i^\perp) \in R^{2 \times 2}$$

$$G_1 = (1, 1)^T, G_2 = (-1, 1)^T$$

$$G_3 = (-1, -1)^T, G_4 = (1, -1)^T$$

由式(1)可方便的求出 A_i 4 个顶点的坐标 P_{ik} , $k \in I_4$. 设 $\alpha_i = 0$, 则可求得如图2所示的两矩形间不干涉边界八边形 $V(V_1, V_2, \dots, V_8)$ 的 8 个顶点 $V_k(k \in I_8)$.

8 个顶点的坐标 $V_k(x_{Vk1}, x_{Vk2})$ 如下:

$$\begin{aligned} V_1: x_{V11} &= a_{i1} + \lambda l \cos(\alpha_j - \lambda\beta_j) \\ x_{V12} &= a_{i2} + \lambda l \sin(\alpha_j - \lambda\beta_j) \\ V_2: x_{V21} &= a_{i1} + l \cos(\alpha_j + \lambda\beta_j) \\ x_{V22} &= a_{i2} + l \sin(\alpha_j + \lambda\beta_j) \\ V_3: x_{V31} &= -a_{i1} + l \cos(\alpha_j + \lambda\beta_j) \\ x_{V32} &= x_{V22} \\ V_4: x_{V41} &= -a_{i1} - \lambda l \cos(\alpha_j - \lambda\beta_j) = -x_{V11} \\ x_{V42} &= a_{i2} - \lambda l \sin(\alpha_j - \lambda\beta_j) \\ V_k: x_{Vk1} &= -x_{V(k-4)1} \\ x_{Vk2} &= -x_{V(k-4)2} \end{aligned} \quad (2)$$

式中

$$\beta_j = \arctan(a_{j2}/a_{j1}), l = \sqrt{a_{j1}^2 + a_{j2}^2}$$

$$\lambda = \begin{cases} 1, & 0 \leq \alpha \leq \pi/2 \\ -1, & \pi/2 < \alpha < \pi \end{cases}$$

当 $\alpha_i = \pi/2$ 时, 式(2)中 a_{i1} 以 a_{i2} 代替; a_{i2} 以 a_{i1} 代替. 或者, 当 $\alpha_i = 0$ 或 $\alpha_i = \pi/2$ 时, 亦可表示为

$$V_k: x_{Vk1} = a_{i1} \cos\alpha_i + a_{i2} \sin\alpha_i + \dots$$

$$x_{Vk2} = a_{i1} \sin\alpha_i + a_{i2} \cos\alpha_i + \dots$$

在 $\alpha_j = 0$ 及 $\alpha_j = \pi/2$ 这两种特殊情况下, 不干涉多边形为如图3所示的矩形. 同理, 由式(2)可求不干涉边界的不适合多边形(转化为矩形 $V_1V_2V_3V_4$) 顶点, 计算从略.

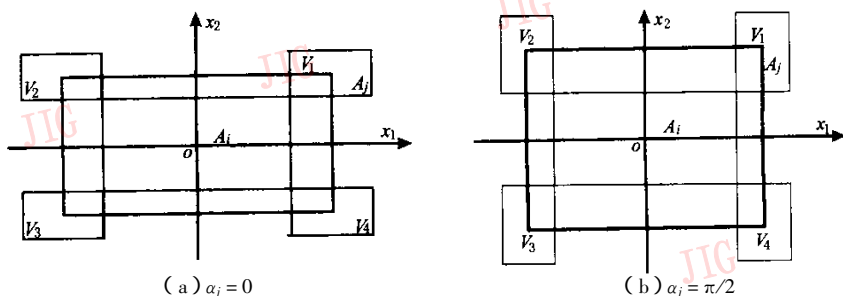


图 3 矩形与矩形之间的不干涉边界

若已知八边形 V 的各顶点,则 8 条边的方程可求,求解过程从略。

这样 A_i 与 A_j 不干涉即归结为 A_j 的形心 X_{A_j} 应落于图 2 所示的八边形 $V(V_1, V_2, \dots, V_8)$ (含边界) 的外部。当 α_i 为任意值时,则可进行坐标变换,即转换成 $\alpha_i = 0$ 或 $\alpha_i = \pi/2$ 的情况。

由于本算法取矩形形心作为参考点,因此属 No-Fit-Polygon 算法的特例,但是其矩形的不适合多边形不必沿用 No-Fit-Polygon 的复杂方法来构造,而是用本文给出的式(2)来直接给出其不适合多边形(不干涉边界)的各顶点坐标。不仅如此,由于八边形 V 相对 A_i 的形心(坐标原点)具有一定的对称性(如图 2 所示),因此其 8 个顶点的计算也较简便。

以下对矩形图形之间不干涉判别条件加以证明。

定理 两矩形图形 $A_i(0, 0, 1, 0, a_{i1}, a_{i2})$ 与 $A_j(x_{j1}, x_{j2}, \cos\alpha, \sin\alpha, a_{j1}, a_{j2})$, 其不干涉的条件为: A_j 的形心 (x_{j1}, x_{j2}) 应落于如图 2 粗线所示的八边形的外部(含边界)。

证明 不失一般性,假设 $x_{j1} \geq 0, x_{j2} \geq 0, 0 < \alpha < \pi/2$, 即在第一象限内,其他情形可做类似讨论。用反证法,假设 A_i 与 A_j 干涉,以下分几种情况讨论。

(1) A_j 的其他顶点 P_{j2} 与 A_i 干涉

如图 2 所示,由式(1)易知:

$$P_{j2} = (x_{j1} - a_{j1}\cos\alpha - a_{j2}\sin\alpha, x_{j2} - a_{j1}\sin\alpha + a_{j2}\cos\alpha) \\ = (x_{j1} - l\cos(\alpha - \beta), x_{j2} - l\sin(\alpha - \beta)) \quad (3)$$

由 P_{j2} 与 A_i 干涉可知

$$x_{j1} - l\cos(\alpha - \beta) < a_{i1}, x_{j2} - l\sin(\alpha - \beta) < a_{i2}$$

即

$$x_{j1} < a_{i1} + l\cos(\alpha - \beta), x_{j2} < a_{i2} + l\sin(\alpha - \beta)$$

也即 (x_{j1}, x_{j2}) 落于八边形 $V(V_1, V_2, \dots, V_8)$ 的内部,与已知条件相矛盾。

而当 A_j 的顶点 P_{j1}, P_{j3}, P_{j4} 与 A_i 干涉时,同理可证,证明从略。

(2) A_j 的边 $P_{j2}P_{j3}$ 与 A_i 干涉

A_j 的边 $P_{j2}P_{j3}$ 的方程为

$$y - x_{j2} + l\sin(\alpha + \beta) = \\ -(x - x_{j1} + l\cos(\alpha + \beta))\cot\alpha$$

若边 $P_{j2}P_{j3}$ 与 A_i 干涉,则 P_{i1} 必在 $P_{j2}P_{j3}$ 的上部,即

$$a_{i2} - x_{j2} + l\sin(\alpha + \beta) > \\ -(a_{i1} - x_{j1} + l\cos(\alpha + \beta))\cot\alpha$$

$$x_{j1} - l\cos(\alpha - \beta) < a_{i1}$$

$$x_{j2} - l\sin(\alpha + \beta) < a_{i2}$$

于是有

$$x_{j2} - a_{i2} - l\sin(\alpha + \beta) < \\ -(x_{j1} - a_{i1} - l\cos(\alpha + \beta))\cot\alpha$$

$$x_{j1} < a_{i1} + l\cos(\alpha - \beta)$$

$$x_{j2} < a_{i2} + l\sin(\alpha + \beta)$$

即 (x_{j1}, x_{j2}) 含于八边形内部,与已知条件相矛盾。

A_j 的其他边与 A_i 干涉情况同理可证,转化为矩形不适合多边形情况也同理可证,证明皆从略。定理证毕。

2 矩形之间的动态不干涉条件

根据相对运动理论,两矩形各自的运动所导致的它们相对位置的改变(即需要重新判断其干涉性),总可以等效地转化为一个矩形相对于另一矩形(基准图形)作相对运动的情况。为讨论问题方便,本文设基准矩形 A_i 处于静止状态,且形心在坐标原点,其长边和短边分别平行于笛卡尔坐标的 x_1, x_2 轴,而矩形 A_j 则在此坐标系中作等效的相对运动。

若矩形 A_j 既平移又转动(即方向角 α_j 是变化的),若需判断给定时刻 t 两矩形是否干涉时,则可利用运动方程求出两矩形的形心位置坐标,这样就将动态不干涉问题转化为静态不干涉问题的求解。

如果矩形图形仅平移的话,则本文方法的不干涉边界八边形不变,只需求得某一时刻运动矩形的形心位置,即可通过其与原不干涉边界的位置关系来作出干涉性判断,若矩形图形有转动的话,则利用含变量 α_j 的式(2)来构造新的不适合多边形也很方便。

矩形 A_j 相对于 A_i 常见的运动形式有匀速直线运动、加速直线运动和复合运动(既平移又转动)等。下面以一种简单复合运动为例,来加以讨论。

设两矩形图形 A_i 和 A_j 形心分别为 $X_{Ai}(0,0)$ 和 $X_{Aj}(x_{jc1}, x_{jc2})$,且 A_j 相对于 A_i 既作速度为 v (与 x_1 轴正向沿逆时针方向的夹角为 θ)的匀速直线运动,同时又绕其形心作角速度为 ω (逆时针方向取正,顺时针方向取负)的匀角速转动。同时设时间 t_0 时 A_j 形心的初始位置为 $X_{Aj0}(x_{jc10}, x_{jc20})$,方向角为 α_{j0} ,那么到任意时刻 t_1 ,根据运动学公式可求得矩形 A_j 的位置如下

$$X_{Ajt} = X_{Aj0} + (v(t_1 - t_0)\cos\theta, v(t_1 - t_0)\sin\theta)^T \quad (4)$$

$$\alpha_{jt} = \begin{cases} \alpha_i - 2n\pi, & \text{当 } 2n\pi \leq \alpha_i < (2n+1)\pi, \\ n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} \\ \alpha_i - (2n+1)\pi, & \text{当 } (2n+1)\pi \leq \alpha_i < 2(n+1)\pi \end{cases}$$

式中 $\alpha_i = \alpha_{j0} + \omega(t_1 - t_0)$, $\alpha_{jt} \in [0, \pi)$ 。将式(4)与式(2)联立,即可求得八边形不适合多边形的顶点坐标值,这样 t_1 时刻两矩形的不干涉条件就归结为此时的矩形形心 X_{Ajt} 是否落在式(2)求得的八边形不干涉边界之外。

3 算法步骤及计算复杂性讨论

判断两矩形图形是否干涉的算法步骤如下:

- (1) 输入原始数据:输入两矩形图形 A_i, A_j 的形心坐标值、长、宽,以及 x_1 轴与两图形长边沿反时针方向的夹角 α (方向角)。
- (2) 坐标转换:设其中 A_i 图形作为基准图形,再以其形心为坐标原点建立新笛卡尔坐标系,且两坐标轴分别平行于 A_i 的长边短边。
- (3) 根据相对运动的运动方程,求出任意时刻矩形 A_j 的形心坐标 $X_{Aj}(x_{j1}, x_{j2})$ 及方向角 α_j 。
- (4) 计算不干涉边界:根据式(2)计算不干涉边界的方程,而在矩形之间有相互转动时,代入相应的 α_j 值即可。
- (5) 判断不干涉:即将其归结为判断矩形

$A_j(X_{Aj}, u_j, \alpha_j)$ 的形心是否落在此不干涉边界八边形 V 之外。

本方法与No-Fit-Polygon法的矩形之间不干涉判断过程一致,即首先构造不适合多边形,然后进行参考点与该多边形的干涉判断。本方法的优点是计算效率高。通过比较两者的计算次数可知,对于静态不干涉判断,在构造不适合多边形时,No-Fit-Polygon法需进行48次卷积运算^[7],而本方法仅进行26次乘法运算,在进行参考点与不适合多边形的干涉判断时,则两种方法计算次数相同。

另外,No-Fit-Polygon法只能对相互间有平移的矩形直接作出干涉判断,而当方向角 α_j 变化时,则需重新构造不适合多边形,因而计算繁琐。本方法由于式(2)中包含有方向角度 α_j 参数,它可以很简捷地重新构造不适合多边形,因而可方便地对两矩形相互间既有平移又有转动的情况作出干涉与否的判断。

4 算例

以第2节中所述的简单复合运动为例,在笛卡尔坐标系中给出两矩形图形 $A_i(0,0,1,0,40,30)$ 与 $A_j(-100,150,\cos 30^\circ, \sin 30^\circ,40,20)$,如图4所示。若从 $t=0$ 时刻开始, A_j 以5坐标单位/s的速度沿与 x_1 轴成 -30° 角方向作匀速直线运动,同时绕其形心沿逆时针方向作角速度 $\omega=0.046\text{rad/s}$ 的匀角速转动,由本文的不干涉判断算法可简捷地求得,两矩形在 $t=30.2\text{s}$ 时,在顶点处发生第一次干涉,此时 A_j 形心 $X_{Ajt}=(30.8,74.4)^T$,方向角 $\alpha_j=109.6^\circ$ 。经解析几何等方法验证,证明了本方法的正确性和有效性。

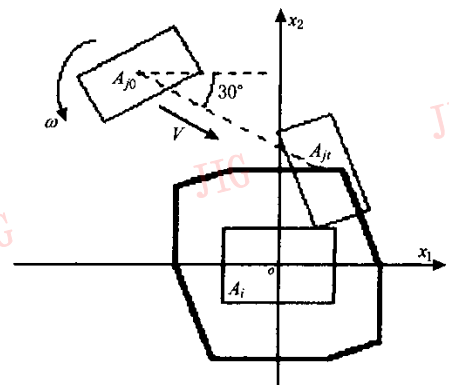


图4 两矩形间动态干涉判断算例

5 结束语

本文工作意在讨论矩形之间的动态不干涉问题,而利用传统方法求解此问题,是通过引入运动方程,来求出给定时刻 t 两矩形的相对几何位置关系,然后归结为用传统的静态不干涉算法来进行判断,但是计算繁复.本文给出一种简捷的两矩形之间干涉性判断的不适合多边形顶点的计算公式.采用此公式来构造不适合多边形不但简单、计算效率较高,而且尤其适用于对两矩形之间既有平移又有转动的情况,即根据两矩形间相对运动的运动方程,首先求出任一时刻两矩形的形心坐标及方向角,然后套用本方法的计算公式,便可作出干涉与否的判断.目前复杂几何图形的不干涉判别计算,常将复杂几何图形近似地用其包络矩形或组合矩形来描述,故本文的不干涉判别条件及算法具有一定的应用价值.希望能将此方法推广到三维情况,并籍此展开几何图形动态不干涉算法的研究.

参 考 文 献

- 1 Adamowicz M, Albano A. Nesting two-dimensional shapes in rectangular modules. *Computer aided design*, 1976 (8 1) 27 ~ 33.
- 2 黄文奇,詹叔浩.求解 Packing 问题的拟物方法. *应用数学学报*, 1979 (2) 176 ~ 181.
- 3 陈国庆,冯恩民,滕弘飞.求解一类 packing 问题的最优化方法——定界锥分拆法. *吉林工业大学学报(东北地区第六届运筹学学术年会专辑)*, 1990 62 ~ 65.
- 4 Theo Pavlidis. 计算机图形显示和图象处理的算法. 吴成柯译. 北京:科学出版社, 1987 350 ~ 354.
- 5 熊志刚,张关康.一种快速的三维凸体干涉检查方法. *工程图学学报*, 1991 2 36 ~ 40.

- 6 Rourke J O, Chien Chi-Bin, Olson T. A new linear algorithm for intersecting convex polygons. *Computer Graphics and Image Processing*, 1982, 19: 384 ~ 391.
- 7 Guibas L, Ramshaw L, Stolfi J. A kinetic framework for computational geometry. In Blum M, Galil Z, Ibarra O H *et al* (ed). *The 24th Annual IEEE Symposium on Foundation of Computer Science*. New York: IEEE Computer Society Press, 1983. 100111.

滕弘飞 1962 年获大连理工大学工学学士学位,现为大连理工大学机械工程学院教授,博士生导师.研究方向为智能 CAD 及优化、演化算法、人机合作、机器写作.

刘峻 1999 年获大连理工大学工学硕士学位,现为大连理工大学机械工程学院博士生.研究方向为智能 CAD、航天器布局.

王秀梅 1997 年获大连理工大学数学博士学位,现为大连理工大学应用数学系讲师.研究方向为运筹学.

冯恩民 1963 年获大连理工大学数学学士学位,现为大连理工大学应用数学系教授,博士生导师.研究方向为运筹学.

杨宏宇 1999 年于大连理工大学获工学硕士学位,现为大连理工大学机械工程学院助教.研究方向为故障诊断.

孙治国 1998 年获洛阳工学院工学学士学位,现为大连理工大学机械工程学院博士生.研究方向为智能 CAD、人机合作.