

中图法分类号: TP391 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2011)05-0898-05

论文索引信息:程仙国,刘伟军. 外载荷的 B 样条曲线变形 [J]. 中国图象图形学报,2011,16(5): 898-902

外载荷的 B 样条曲线变形

程仙国^{1),2)}, 刘伟军¹⁾

¹⁾(中国科学院沈阳自动化研究所,沈阳 110016) ²⁾(中国科学院研究生院,北京 100049)

摘要: 运用能量优化的思想,提出一种 B 样条曲线变形的新技术,可用于 B 样条曲线的变形。首先将 B 样条曲线段类比为有限单元法中线单元,并将作用在 B 样条曲线段的外载荷等效成线单元的端点力,分别建立 B 样条曲线内部能量、外载荷能量函数方程;外载荷的改变将引起 B 样条曲线能量的变化,通过求解一个使曲线能量的变化量为最小的优化问题,得到变形后的 B 样条曲线。运用该方法实现了 B 样条曲线的局部、整体等变形操作。

关键词: B 样条曲线; 变形; 能量优化; 能量模型

Shape modification of B-spline curve via external loads

Cheng Xianguo^{1), 2)}, Liu Weijun¹⁾

¹⁾(Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016 China)

²⁾(Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049 China)

Abstract: Based on the idea of energy optimization, a new method for shape modification of the B-spline curve is proposed. First, using an analogy between the B-spline curve and the curve element of finite element method, and making the external load acting on the curve be equivalent to the end force into the element, the internal energy functional equation of the B-spline curve and the energy functional equation of the load are constructed respectively. The energy change of the B-spline curve with the change of the load, a new curve is generated by solving an optimization problem of the change of the energy. Using this approach, the local or total modification of the curve can be accomplished.

Keywords: B-spline curve; shape modification; energy optimization; energy model

0 引言

在计算机辅助设计(CAD)和计算机图形学(CG)领域,B样条方法已成为设计和描述自由曲线曲面的重要技术之一,同时变形技术可以极大地提高自由曲线曲面设计的灵活性。对于B样条曲线,可以通过直接修改控制顶点和节点矢量的方法对其形状进行调整^[1-3]。但对于工程设计人员来说,抽象的几何参数不利于设计工作的进行。将自由曲线的变形技术借用物理能量模型是比较便利的解决途

径之一,相应地产生了能量法曲线变形技术。此技术以变形曲线拥有最小物理变形能量为目标,运用各种约束及施加外载荷的方式控制曲线的形状^[4]。

1987年,Terzopoulos等人^[5]将基于物理能量模型的可变形曲线造型技术引入计算机图形学中,用来模拟圆球压在弹性立方体上引起的变形、旗帜在风中飘摆以及地毯的飘落等动态过程。1991年,Celniker等人^[6]在此物理模型基础上,利用能量优化思想,以曲线能量为目标函数,以各种特征线为约束,利用有限元和Hermit函数求解具有最小能量的曲线,实现B样条曲线的交互设计和修改,并应用

收稿日期:2010-04-16;修回日期:2010-06-24

基金项目:中国科学院沈阳自动化研究所创新工程资助项目(09F6010601)。

第一作者简介:程仙国(1981—),男。现为中科院沈阳自动化研究所机械电子工程专业博士研究生,主要研究方向为复杂参数曲线曲面的重建及编辑。E-mail:chengxianguo@sia.cn。

于曲线光顺等问题。1992年,Celniker等人^[7]利用求解最小能量曲线的方法,讨论了线性约束条件下B样条曲线的变形特性,从而可以直接通过设定和修改几何约束条件执行诸如推、拉曲线等变形操作,进行曲线形状的交互设计和修改。1995年,Wesselink等人^[8]将能量优化思想引入曲线的交互设计和修改中,提出用约束构造引力操作符以使用户能直观地控制曲线的形状,并指出可以构造类似的操作用于曲线的交互设计。2000年,Pourazady等人^[9-10]利用齐次坐标的方法将NURBS曲线在约束条件下变形的非线性问题转化成将B样条曲线变形的线性问题进行求解;朱翔等人^[11]提出了一个基于外部能量约束的曲面形状修改算法,可用于交互地设计和修改NURBS曲面的形状。2001年,胡事民等人^[12]运用约束优化的思想采用最小二乘法来修改NURBS曲线曲面,从而使曲线曲面满足一系列的几何约束。总之,这些方法需要定义一系列约束。

运用能量优化的思想,提出一种新的B样条曲线变形方法。通过有限单元法将作用在B样条曲线段上的外载荷等效成B样条曲线段端点力,外载荷的改变将引起B样条曲线控制顶点位置的变化,从而实现对B样条曲线的变形。

1 能量优化法的基本原理

从曲线的物理变形能或几何性质出发,构造曲线物理变形能量的目标函数,运用各种约束及施加外载荷的方式控制曲线的形状,利用优化方法求解满足各种约束条件的、使目标函数最小的曲线。B样条曲线的能量为^[13]

$$E = E_1 - E_2$$

$$E_{1, \text{curve}} = \frac{1}{2} \int (\alpha C_u^2 + \beta C_{uu}^2) du \quad (1)$$

$$E_{2, \text{curve}} = \int f C du$$

式中, E_1 为曲线的内部能量, E_2 为外载荷的能量, C 为以 u 为参数的B样条曲线, f 为外载荷, C_u, C_{uu} 为B样条曲线的1、2阶导数, α, β 为给定系数。

2 B样条曲线模型能量的求解

2.1 相关定义

k 次B样条曲线表达式为

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) p_i = \mathbf{R} \mathbf{P} =$$

$$[N_{0,k}(u) \cdots N_{n,k}(u)] [p_0 \cdots p_n]^T \quad (2)$$

式中, $N_{i,k}(u)$ ($i=0,1,\dots,n$)为 k 次B样条基函数, p_i 为B样条曲线的控制顶点。

2.2 B样条曲线内部能量模型

实际上,B样条曲线可以按节点序列划分成曲线段,相邻的节点组成的曲线段为一个线单元,如图1所示, $\{u_i, u_{i+1}\}$ 就是一个线单元,以线单元所对应的控制顶点作为单元节点^[14]。

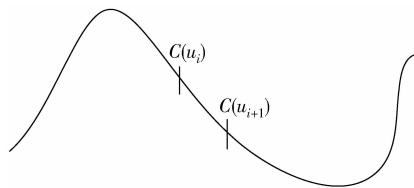


图1 B样条曲线线单元

Fig. 1 Elements of a B-spline curve

曲线的内部能量取决于曲线本身的性质。由式(1)(2)可知

$$E_{1, \text{curve}} = \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} \quad (3)$$

式中, $\mathbf{K}$ 为一个 $(n+1) \times (n+1)$ 刚度矩阵

$$\mathbf{K} = \int (\alpha \mathbf{R}_u^T \mathbf{R}_u + \beta \mathbf{R}_{uu}^T \mathbf{R}_{uu}) du$$

2.3 外部载荷能量模型

为了求解外部载荷的能量,假定作用在B样条曲线段 $u \in [u_i, u_{i+1}]$ 上的任一力 f 可以分解成作用在该曲线段端点上的力的线性插值,且整条B样条曲线的首末端点固定,B样条曲线段力学模型如图2所示。

$$f = \frac{u_{i+1} - u}{u_{i+1} - u_i} f_{i-k} + \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} f_{i-k+1} = \mathbf{S}^T \mathbf{F}_u \quad (4)$$

式中, $\mathbf{S}$ 为插值比例函数向量,

$$\mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} \frac{u_{i+1} - u}{u_{i+1} - u_i} & \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_u^T = [f_{i-k}^T \quad f_{i-k+1}^T]$$

则作用在该曲线段上的外部载荷能量为

$$E_{2,u} = [p_{i-k} \cdots p_i] \mathbf{M}_u \mathbf{F}_u$$

式中, $\mathbf{M}_u$ 为局部力系数矩阵

$$\mathbf{M}_u = \int_{u_i}^{u_{i+1}} [N_{i-k,k}(u) \cdots N_{i,k}(u)]^T \mathbf{S}^T du$$

由有限单元法的思想,B样条曲线上的外部载

荷能量为

$$E_{2, \text{curve}} = \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{F} \quad (5)$$

式中, $\mathbf{M}$ 为 $(n+1) \times (n-1)$ 力系数矩阵, $\mathbf{F}$ 为 $(n-1)$ 维端点力向量。

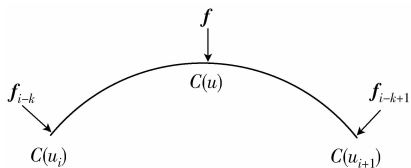


图 2 B 样条曲线段力学模型

Fig. 2 Mechanical model of a B-spline curve segment

2.4 B 样条曲线能量模型

由式(3)(5)可知, B 样条曲线总的能量方程为

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} - \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{F}$$

当 E 取得最小值时, 能保证 B 样条曲线整体光滑。又知 $\mathbf{K}$ 为对称正定矩阵, 当 E 的梯度为零时, E 取得最小值, 即

$$\mathbf{K} \mathbf{P} = \mathbf{M} \mathbf{F} \quad (6)$$

根据式(6), 对于 B 样条曲线的每个控制顶点, 除了 p_0, p_1 和 p_n, p_{n+1} 对应 f_0 和 f_{n-1} 之外, 每个控制顶点对应于一个作用力 f_{i-1} 。显然, 通过改变外部作用力 $\mathbf{F}$, 可以对 B 样条曲线进行形状的修改, 且修改后的 B 样条曲线自动保持光滑。

3 形状修改的分析

对 B 样条曲线变形分析如下。

1) 施加单个外部作用力的 B 样条曲线变形。当单个作用力 $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ 作用于 B 样条曲线的一型值点 $C(u_k)$ 时, 先将 $\mathbf{f}$ 按式(4)进行线性插值并代入式(6)有

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{P} = \mathbf{M} \mathbf{f}_{i-k} + \mathbf{M} \mathbf{f}_{i-k+1} = \mathbf{M}_f \mathbf{f} \quad (7)$$

设 r 为 B 样条曲线被移动的控制顶点数量, 则式(7)可以简写为

$$\mathbf{K}_r \Delta \mathbf{P}_r = \mathbf{M}_r \mathbf{f} \quad (8)$$

式中, $\mathbf{K}_r$ 为 $r \times r$ 对称矩阵, 从刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 中提取, $\Delta \mathbf{P}_r$ 为 B 样条曲线控制顶点位置向量的变化量, $\mathbf{M}_r$ 为作用力 $\mathbf{f}$ 的系数向量。将式(8)写成标量的形式

$$\begin{cases} \mathbf{K}_r \Delta \mathbf{P}_{rx} = \mathbf{M}_r f_x \\ \mathbf{K}_r \Delta \mathbf{P}_{ry} = \mathbf{M}_r f_y \\ \mathbf{K}_r \Delta \mathbf{P}_{rz} = \mathbf{M}_r f_z \end{cases} \quad (9)$$

因为 f_x, f_y, f_z 为标量, 令线性方程组 $\mathbf{K}_r \Delta \mathbf{P}_r = \mathbf{M}_r \mathbf{f}$ 的解为 $\Delta \mathbf{P}'$, 则式(8)的解为

$$\Delta \mathbf{P}_r = \Delta \mathbf{P}' \mathbf{f} \quad (10)$$

即得到 B 样条曲线控制顶点位置向量的变化量。

2) 施加多个外部作用力 $\mathbf{f}$ 的 B 样条曲线变形。当曲线上施加多个外部作用力时, 可以单独计算每个外部作用力 $\mathbf{f}$ 引起的控制顶点位置向量变化量, 总的变化量是每个控制顶点位置向量变化量的线性叠加。

3) 移动 B 样条曲线上一点通过指定位置。假设移动曲线上一点 $p_0 = C(u)$ 通过一指定点 p_1 , 由式(2)得

$$\mathbf{R} \Delta \mathbf{P} = \Delta \mathbf{p}$$

式中, $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ 。利用式(10)的求解结果即可计算出该变形所需外部作用力为

$$\mathbf{f} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\mathbf{R} \Delta \mathbf{P}'}$$

利用 1) 的变形方式施加作用力 $\mathbf{f}$, 即可获得所需求的变形效果。

4 数值实验与对比分析

4.1 变形实例

初始曲线如图 3 所示, 为 3 次非均匀 B 样条曲线, 作用力的方向为 B 样条曲线上作用点的法矢量方向。

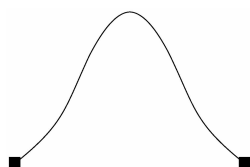


图 3 初始 B 样条曲线

Fig. 3 The original B-spline curve

图 4 演示了 B 样条曲线在单个作用力 $\mathbf{f}$ 作用下的变形效果。其中, 图 4(a) 作用力的区域为 $u \in [0.2, 0.4]$, $\mathbf{f}$ 的作用位置为 $C(0.3)$, 大小为 200 N 时的局部变形效果; 图 4(b) 在图 4(a) 的基础上将 $\mathbf{f}$ 的大小改为 400 N 时的变形效果; 图 4(c) 是将图 4(a) 的变形区域改为 $u \in [0.2, 0.6]$ 时的变形效果。

图 5 演示了 B 样条曲线在两个和两个以上作用力作用下的变形效果。其中, (a) 是 B 样条曲线在两个外部作用力大小均为 200 N, 作用点为 $C(0.3)$ 和 $C(0.7)$, 作用区域分别为 $u \in [0.2, 0.4]$

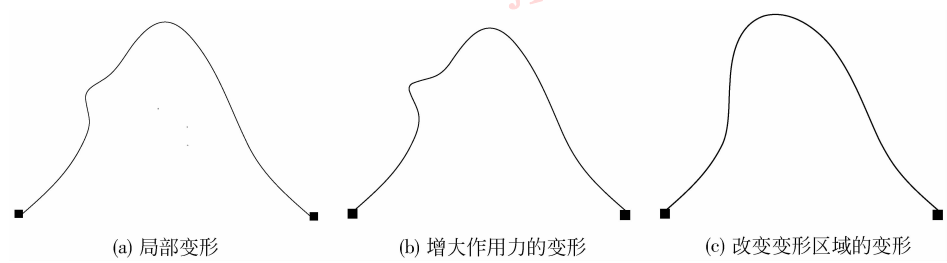


图 4 B 样条曲线在单个作用力下变形
Fig. 4 The deformation of B-spline curve with a single force

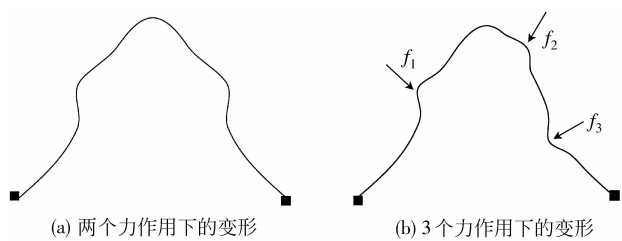


图 5 B 样条曲线在多个作用力下变形
Fig. 5 The deformation of B-spline curve with multi-force

和 $u \in [0.6, 0.8]$ 时的变形效果。(b) 是 B 样条曲线在 3 个外部作用力下的变形效果, $f_1 = 400\text{ N}$, 作用点为 $C(0.3)$, 作用区域分为 $u \in [0.2, 0.4]$; $f_2 = 200\text{ N}$, 作用点为 $C(0.55)$, 作用区域为 $u \in [0.45, 0.7]$; $f_3 = 400\text{ N}$, 作用点为 $C(0.8)$, 作用区域为 $u \in [0.7, 0.95]$ 。

4.2 对比分析

以图 3 的 B 样条曲线为初始条件, 分别运用传统的调整控制顶点^[1]、改变节点矢量^[15]和本文的方法对该 B 样条曲线进行变形, 如图 6 所示, 图中曲

线 1 表示原曲线, 曲线 2 表示变形后的曲线。一般情况下, 用修改控制顶点或改变节点矢量的方法对 B 样条进行移点变形时, 不能保证变形后的曲线始终通过给定点。若要求变形后曲线通过给定点的几何约束条件, 修改控制顶点或节点矢量对 B 样条曲线进行变形, 求解非常复杂, 而且当参数点与目标点的距离比较大时, 用调整控制顶点进行变形后的曲线光顺性差, 用改变节点矢量方法对曲线进行移点变形时, 目标点必须位于 B 样条曲线控制顶点所形成的凸包之内。

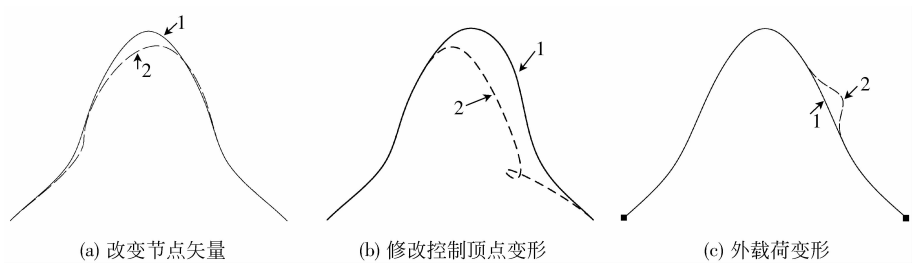


图 6 B 样条曲线变形对比
Fig. 6 The comparison of the deformation of B-spline curve

5 结 论

利用 B 样条曲线物理能量模型, 提出一种 B 样条曲线变形的新技术, 有效地增强了 B 样条曲线设

计的灵活性, 该方法对 B 样条曲线变形的整体或局部影响是可控的, 可预见的。用户只需在变形曲线上直接选取作用力的作用点, 给定变形区域以及作用力的大小即可达到预期的变形效果。同时, 这种方法还可以协调曲线的局部变形与保持曲线整体光

顺性之间的矛盾,使变形后的曲线自动保持光滑。与传统能量优化方法求解整条曲线控制顶点相比,本文是在已知控制顶点的条件下,求解曲线变形区域控制顶点的变化量,计算量要小得多。

参考文献 (References)

- [1] Piegl L. Modifying the shape of rational B-splines part 1: curves [J]. Computer-Aided Design, 1989, 21(8): 509-518.
- [2] Chen Kaiyun, Xie Xiaoqin. Research on how the knot vector influences non-uniform rational B-spline curve [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(10): 294-299. [陈凯云, 谢晓芹. 节点矢量影响 NURBS 曲线的规律研究与应用[J]. 机械工程学报, 2008, 44(10): 294-299.]
- [3] Li Yajuan, Wang Guozhao. On knot modification of B-spline or NURBS surface [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2005, 17(5): 986-989. [李亚娟, 汪国昭. 改变 B 样条曲面与 NURBS 曲面的节点[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(5): 986-989.]
- [4] Zhu Xinxiong. The Modeling Technique of Free-Form Curve and Surface [M]. Beijing: Science Press, 2000: 273-305. [朱心雄. 自由曲线曲面造型技术[M]. 北京: 科普出版社, 2000: 273-305.]
- [5] Terzopoulos D, Platt J, Barr A. Elastically deformable models [J]. Computer Graphics, 1987, 24(4): 205-214.
- [6] Celniker G, Gossard D. Deformable curve and surface finite-elements for free-form shape design [J]. Computer Graphics, 1991, 25(4): 257-266.
- [7] Celniker G, Welch W. Linear constraints for deformable non-uniform B-spline surfaces [C]//Proceedings of the Symposium on Interactive 3D Graphics. New York: ACM, 1992: 165-170.
- [8] Wesselink W, Veltkamp R. Interactive design of constrained variational curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1995, 12(5): 533-546.
- [9] Pourazady M, Xu X. Direct manipulations of B-spline and NURBS curves [J]. Advances in Engineering Software, 2000, 31(2): 107-118.
- [10] Pourazady M, Xu X. Direct manipulations of NURBS surfaces subjected to geometric constraints [J]. Computers & Graphics, 2006, 30(4): 598-609.
- [11] Zhu Xiang, Hu Shimin, Sun Jianguang. Shape modification of surfaces via external energy constraints [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2000, 12(9): 651-655. [朱翔, 胡事民, 孙家广. 基于外部能量约束的曲面形状修改[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12(9): 651-655.]
- [12] Hu Shimin, Li Y F, Ju T, et al. Modifying the shape of NURBS surfaces with geometric constraints [J]. Computer-Aided Design, 2001, 33(12): 903-912.
- [13] Terzopoulos D, Qin H. Dynamic NURBS with geometric constraints for interactive sculpting [J]. ACM Transactions on Graphics, 1994, 13(2): 103-136.
- [14] Jing Ling, Xi Ping, Tang Rongxi. Application of finite element method in deformable curve and surface model [J]. Chinese Journal of Computers, 1998, 21(3): 245-251. [经玲, 席平, 唐荣锡. 有限元方法在曲线曲面造型中的应用[J]. 计算机学报, 1998, 21(3): 245-251.]
- [15] Juhasz I, Hoffmann M. Constrained shape modification of cubic B-spline curves by means of knots [J]. Computer-Aided Design, 2004, 36(5): 437-445.